ISSN 2066 – 3250

ŞTIINŢE EXACTE ŞI
ŞTIINŢE ALE NATURII

Vol. XV

EDITURA UNIVERSITĂŢII DIN ORADEA

- 2023 -

Date contact

- Universitatea din Oradea, Facultatea de Informatică şi Ştiinţe, C.P. 14, Oficiul Postal 1, Str. Universităţii, nr. 1, 410087, Oradea, Bihor, România
- Tel. +40-259-408161
- e-mail: afodor@uoradea.ro; sfilip@uoradea.ro

Informatii generale

- ISSN: 2066 – 3250
- Frecvenţa apariţiei: 1 număr/an

- Acestă revistă publică rezultatele cercetării ştiinţifice din domeniul Biologiei, Chimiei, Matematicii, Fizicii şi Informaticii, ale studenţilor, cadrelor didactice din învăţământul preuniversitar şi ale elevilor.

IDENTIFICAREA UNOR FACTORI DE STRES LA ADOLESCENȚI

Mihnea Darian FLORUȚA[1], Sorina CORBU[2]

[1] Colegiul Național „Emanuil Gojdu” – elev clasa a X-a, Oradea, România mihneafloruta@gmail.com
[2] Colegiul Național „Emanuil Gojdu” – profesor dr. Biologie, Oradea, România

Rezumat: *În prezenta lucrare am surprins nivelurile de stres în cazul adolescenților, efectele acestuia și am identificat și analizat o serie de soluții în privința acestei probleme, aflată în creștere, studiind efectul unor factori de stres din viața de elev, precum examenul de evaluare națională, adaptarea la ciclul liceal sau supraîncărcarea curiculumui școlar la clasele bilingve. Nivelul cel mai mare de stres a fost înregistrat la elevii mai mari, din clasa a X-a, care aveau programa școlară înărcată, însă au dovedit o mai bună gestionare a acestuia. Soluțiile propuse de noi în urma prezentului studiu au fost legate de adaptarea programei școlare și a modul de desfășurare a orelor în beneficiul elevilor.*

Cuvinte cheie: adolescență, elevi, mentalitate, sănătate mentală, stres, Welltory

INTRODUCERE

Psihologia consideră că fenomenul stresului are loc când o persoană percepe o cerere externă ce îi depășește aria capabilității de a o gestiona [25]. Prin urmare, solicitarea în sine și analiza stresului ține de individualism, natura factorului, resursele disponibile și capacitățile personale, care, împreună cu prezumțiile rezultatelor, sunt cele ce determină dacă și cum este stresul experimentat. Interpretarea calității de „stresant” poate fi atribuită exclusiv relativ, astfel eticheta nefiind echivalentă pentru fiecare individ.

Termenul de natură medical-psihologică „stres” a fost pentru prima dată introdus în vocabularul medical de către cercetătorul austriac Hans Selye [14]. Autorul teoriei stresului a identificat două tipuri de stres, și anume ***eustres*** (stres benefic) și ***distres*** (stres dăunător) [4].

Ulterior dispariției amenințării, indiferent de natura sa reală sau imaginară, centrii nervoși și fizicul ar trebui să intre într-o stare de relaxare. Ritmul alert al stilului contemporan de viață abordat de omul modern însă aduce, în calitate de consecință ocazională, cazuri în care individul uită să se mai relaxeze, astfel, prin inducție, fiind favorizate apariția și menținerea stresului [2].

Conceptul se împarte în două ramuri: stresul acut și stresul cronic, cel dintâi reprezentând stările comune și scurte, iar cel din urmă fiind stadiul avansat, repetitiv și intens, care predispune individul la consecințe de o gravitate crescută din punct de vedere al stării de sănătate [5]. De asemenea, există un caz particular, întâlnit în situații limită – reacția de tipul „Luptă sau fugi”. Stresul acut a fost introdus de Selye ca „Sindromul General al Adaptării” și are trei etape: 1. Reacția de tip alarmă; 2. Rezistența; 3. Epuizarea [14,19,20].

Factorii de stres (stresorii) se clasifică în externi (relațiile interumane, noi experiențe și schimbări, instituția de învățământ) și interni (pesimismul, lipsa încrederii în sine, dificultăți de adaptare, gândire inflexibilă) [6]. Stresorii cronici sau de lungă durată se distind de evenimentele acute din viață în funcție de natura lor continuă și persistentă pe o perioadă prelungită de timp [3, 8]. Există un mecanism de corelare între sistemul cardiovascular cu metabolismul bazal în amigdala cerebrală [17].

Rohleder rezumă dovada ce denotă că stresorii cronici sunt asociați cu o gamă vastă de boli și afecțiuni, precum boli cardiovasculare, rezistență la insulină sau răspunsuri psihologice la stres (furie sau anxietate) [3,12]. Date epidemiologice arată că stresul cronic prezice apariția bolii arteriale coronariene (BAC). Angajații care experimentează stres legat de locul de muncă și indivizii care sunt izolați social sau singuratici prezintă un risc crescut de un eveniment BAC. În adiție, stresul de durată scurtă, cauzat de stresori emoționali, poate declanșa probleme cardiace în cazul indivizilor cu arterioscleroză avansată [13].

Intervențiile de gestionare ale stresului utilizează strategii minte-către-corp și corp-către-minte pentru a reduce efectele stresului cronic [7].

În situații stresante, suntem prinși de gânduri și sentimente dificile și suntem îndepărtați de valorile noastre. Comportamntul nostru se schimbă și deseori facem lucruri care ne îngreunează viața [5]. When cortisol levels are elevated, Când nivelurile de cortizol sunt elevate, acestea pot accesa și interfera cu procesele cognitive care se ocupă cu atenția, memoria și procesarea emoțiilor [10].

Reacțiile individului și ale organismului la stres se încadrează pe patru planuri: comportamentale (irascibilitate, abuz de substanțe dăunătoare, schimbări de alimentație), cognitive (probleme de concentrare, de atenție, emiterea unor judecăți de valoare greșite), emoționale (îngrijorare, supărare, anxietate, furie), fizice (oboseală, dureri de cap, probleme digestive, lipsa energiei) [15].

Se semnalează astfel o concepție despre raportul dintre psihic și fizic în termenul unei relații de codependență, în care psihicul își impune adesea dominanța – mintea poate cere orice trupului și acesta trebuie să o urmeze, fiind, de fapt, împreună în suferință în aceste cazuri–, însă prezintă reflexiile fizicului de asemenea [20]. Imaginația e rcunoscută în cercetare ca fiind o intervenție importantă a sănătății mentale în tratarea stresului, anxietății și insomniei, prin imagini mentale pozitive, precum un scenariu sau loc calm, plăcut, frumos și confortabil [9].

Conform elevilor, perioada adolescenței cuprinde în vastitatea sa de experiențe o mulțime de provocări a căror trăsături pot induce stări de stres, adesea puternice, iar caracterele tinerilor încă în dezvoltare, alături de schimbările interioare și exterioare ce au loc în corpul și în jurul lor au tendința atât să amplifice, cât și să impună dificultăți sporite pe diverse planuri ale vieții lor, într-o manieră directă și indirectă. Școala are o influență demnă de luat în considerare în impactul stresului, implicând o mulțime de experiențe solicitante, fie din punctul de vedere al activității de studiu, fie fiind vorba despre viața socială.

În studiul de față am identificat și măsurat la adolescenți propria lor opinie și perspectivă asupra stresului, precum și nivelurile unor procese vitale. În final, rezultând tot din experiența personală a elevilor, dar și din recomandările unor profesori, printre care inclusiv consilierul școlar, am propus unele soluții de ameliorare a acestuia.

MATERIALE ŞI METODE

Subiecții luați în studiu au fost 71 de adolescenții, cu varsta cuprinsă între 14-16 ani, elevi în diferite clase de gimnaziu sau liceu, fiecare supus unui posibil factor de stres specific: clasa a opta, care urmează să suțină examenul de Evaluare Națională (EN), clasa a noua, Științe ale Naturii, care trece printr-un intens proces adaptativ, și clasa a zecea, Matematică-Informatică Bilingv Engleză (aleși datorită intensității și cantității cerințelor de la școală).

Instrumentul utilizat a constat dintr-un chestionar elaborat în Google Forms, care reflectă propriile opinii ale elevilor în legătură cu implicarea stresului în viața lor, cu factorii ce îl cauzează în multiple categorii și cu propriile considerente asupra unor modalități optime de evitare/prevenire a stresului. Am conceput chestionarul axându-ne pe conceptele din viața adolescenților, atât legate de școală, cât și de viața personală, corelate cu stresul și prin analiza unor chestionare standardizate [1, 11, 16] utilizate în studii pshiologice. Metoda anchetei cu ajutorul chestionarului a fost însoțită de măsurarea valorilor de stres, energie, stare generală a corpului, bătăile inimii și concentrarea prin programul Welltory (https://welltory.com/) (Fig. 1), o aplicație gratuită, atât pe dispozitivele Android, cât și pe cele IOS și care poate fi asociată cu alte dispozitive specializate sau alte programe pe tematica analizei stării de sănătate.

Graficele au fost realizate în programul Chartle (https://www.chartle.com/).

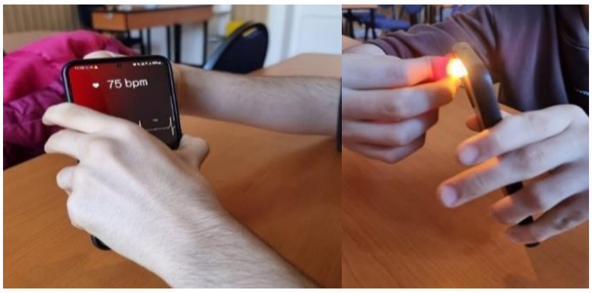


Figura 1. Mod de utilizarea programului Welltory.

REZULTATE ŞI DISCUŢII

În funcție de clasă, respectiv de tipul de factor de stres, între 38,6% și 44,6% dintre elevi consider că au un nivel mediu de stres, iar 44-45% au afirmat că sunt stresați într-un cadru relaxant. (Fig. 3). Nivelul stresului pentru elevii de clasa a X-a atinge cotele maxime între cele trei, apropiindu-se de nivelul general de stres al unui individ supus unor contexte stresante. Clasa a IX-a se situează pe a doua poziție, nivelul cel mai mic de stres revenind clasei a VIII-a (Fig. 2).

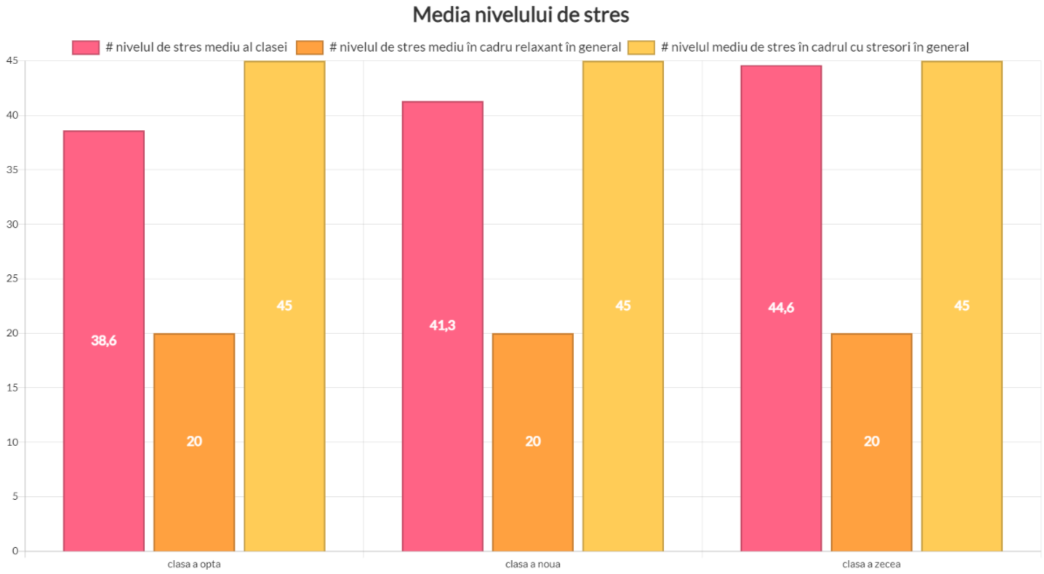


Figura 2. Nivelul personal de stres al elevilor, din cele trei clase, conform aplicației Welltory, comparativ cu valorile medii.

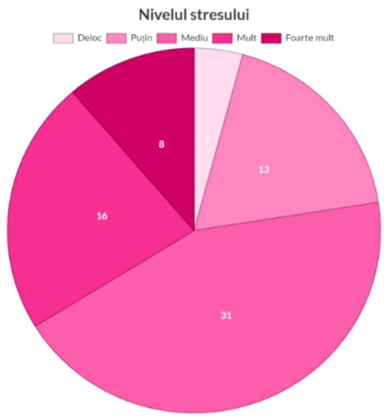


Figura 3. Nivelul personal de stres, conform declarațiilor elevilor din chestionar.

Nivelul de stres a crescut odată cu anul de studiu și a fost, în fiecare caz, mult peste cel normal. Conform unui studiu realizat de APA în 2013 [30], adolescenții resimțeau un nivel de 3.9/10 de stres, față de cel de 5.1/10 al adulților, iar acesta crește treptat.

Conform figurii 4, o pondere mare de elevi (40/71) au persoane de încredere, cu care pot discuta, în clasă, 40 elevi din alte clase și școli, 6 în rândul profesori, 36 în afara ariei școlare, iar 4 nu au deloc, ceea ce este alarmant.

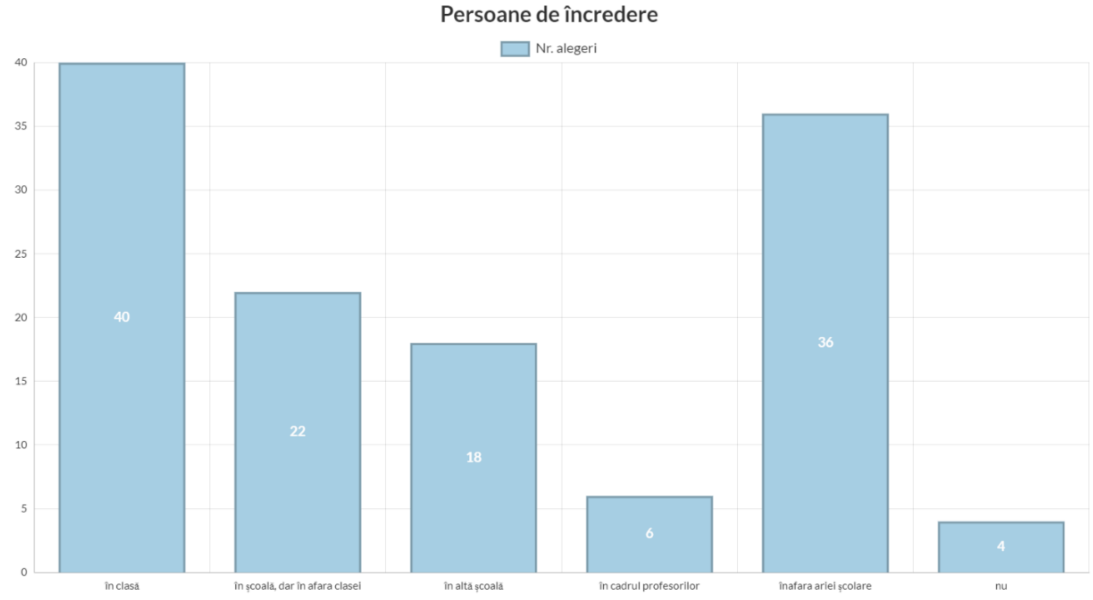


Figura 4. Relațiile elevilor pe diferite planuri

Elevii dorm în jur de 6-7 ore, mulți neatingând acest efectiv. Numărul de ore recomandat la vârsta adolescenței este de 8-10 ore [18], așa că programul de somn al adolescenților este în declin, ceea ce le afectează funcționarea fiziologică. Școala survine ca un motiv pentru acestă perturbare de somn, în explicația multora (Fig. 5).

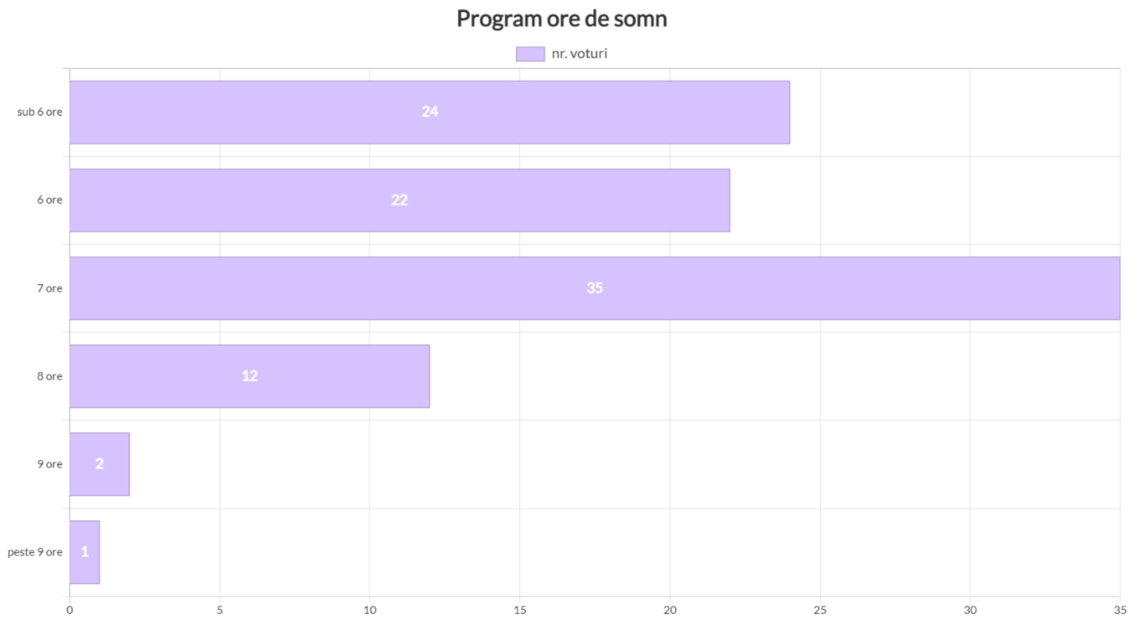


Figura 5. Programul de somn al elevilor

Conform figurilor 6 și 7, elevii de clasa a zecea dețin rezultatele cele mai bune la capacitatea de a se concentra și de a-și menține energia. Elevii din anul terminal de gimnaziu prezintă un nivel de stres mediu înspre mare, însă au valori optime ale concentrării și energiei. Astfel, situația lor se încadrează la conceptul eustresului.

Figura 6. Concentarea elevilor conform aplicației Welltory.

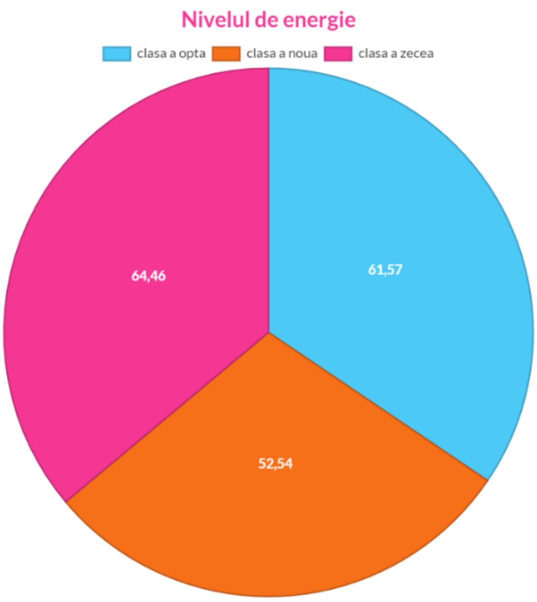


Figura 7. Nivelul de energie al elevilor conform Welltory

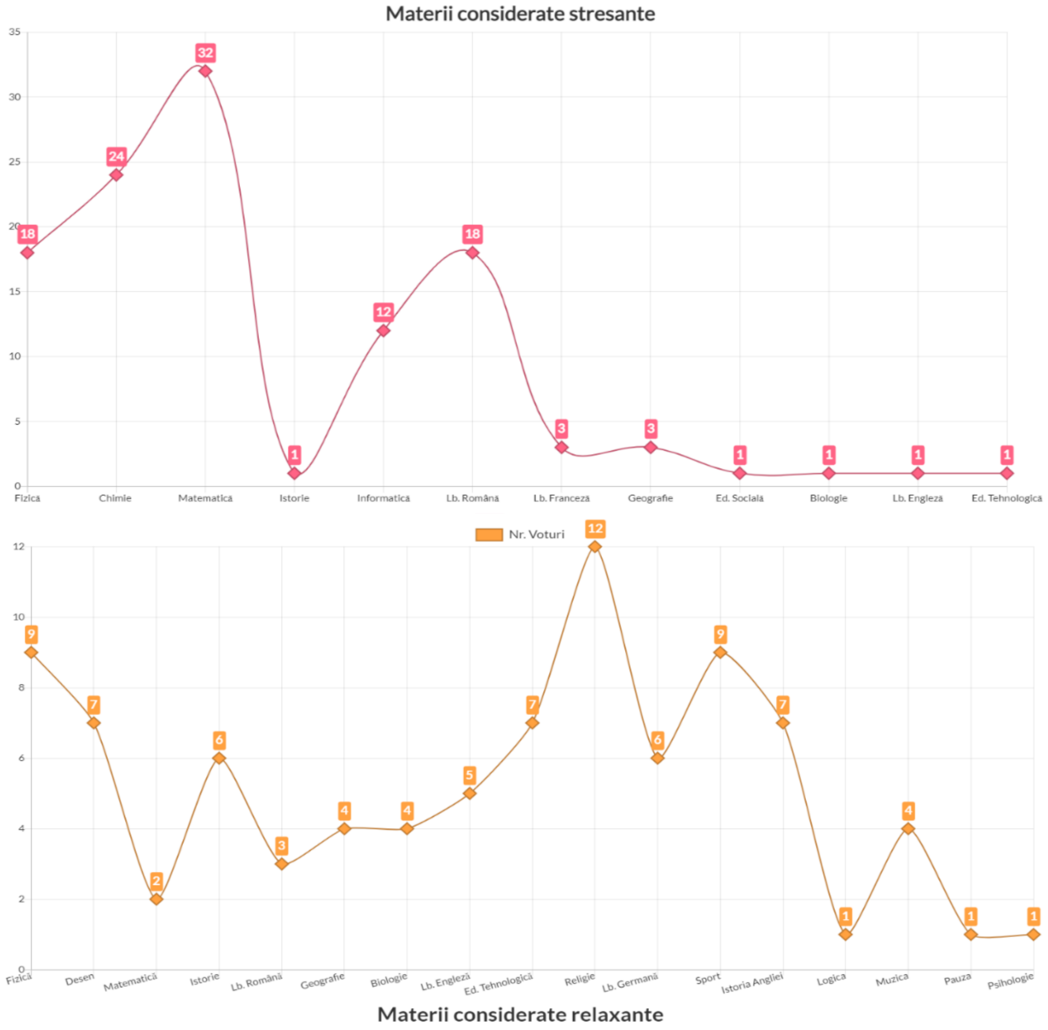


Figura 8. Ierarhizarea materiilor

Cea mai stresantă materie pentru elevi reiese a fi matematica, iar cea mai relaxantă este religia. Fizica este considerată şi una dintre materiile cele mai stresante, dar şi una dintre cele mai interesante (Fig. 8), de unde deducem rolul subiectivității și al individualizării. Nivelul de stres pentru Evaluarea Națională este de 70% (Fig. 9).

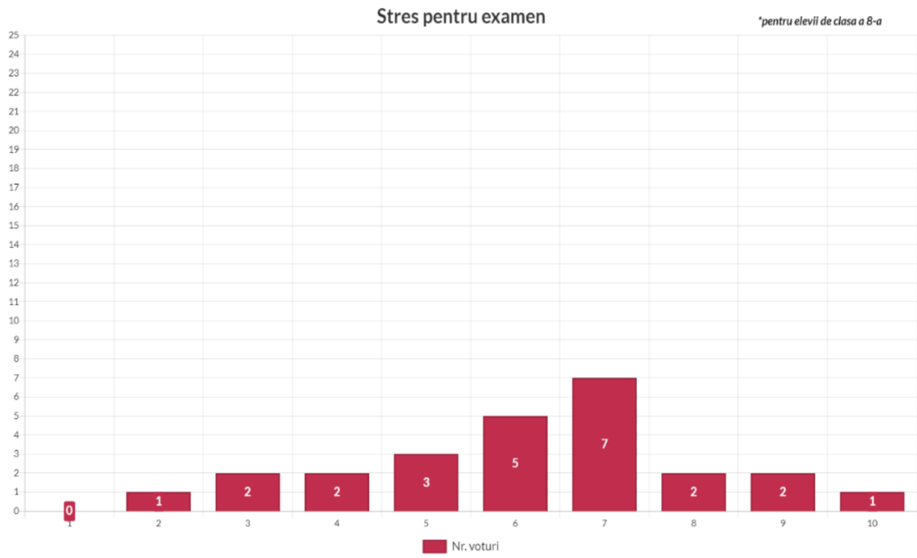


Figura 9. Nivelul de stres al elevilor de clas a VIII-a, pentru examenul de Evaluare Națională.

Li s-a cerut elevilor să exemplifice câteva simptome cauzate de stres, dar și să propună metode pentru a-l combate. Cele mai întâlnite răspunsuri au fost: durerile de cap, de spate, stările de greață, schimbările în alimentație, lipsa atenției, procrastinarea, uzul de cofeină, eficiența scăzută, oboseala, grijile sau anxietatea, probleme cu somnul, gânduri iraționale, frici, iritabilitate.

Pentru ameliorarea acestor simptome, propunem: odihnă, timp petrecut în aer liber, cu familia, cu animalele de companie, cu prietenii, activitate fizică, gândire pozitivă, controlul respirației, cititul, vizionarea filmelor, pictura, dansul, teatrul, integrarea și socializarea, reducerea numărului de ore petrecute la școală, o atitudine potrivită a profesorilor, personalizare, activități interactive.

CONCLUZII

Elevii din anul terminal de gimnaziu au prezentat un nivelul de stres cauzat de examenul de evaluare națională de 7/10.

Adolescenții dorm în medie 7 ore pe noapte, un număr situat la limita inferioară pentru vârsta lor.

Cea mai stresantă materie pentru elevi a fost identificată a fi matematica, iar cea mai relaxantă a fost religia.

Majoritatea elevilor au susținut că adaptarea într-un nou ciclu școlar a fost ușoară sau medie.

După școală, elevii studiază zilnic între 1-4 ore.

În urma măsurătorilor utilizând programul Welltory, cele mai mari valori privind starea generală de sănătate revin clasei a X-a, valorile medii clasei a VIII-a, iar cele mai mici rezultate elevilor din clasa a IX-a.

Elevii mai mari sunt mai stresați, dar își știu gestiona mai bine stările.

Elevii de clasa a VIII-a prezintă eustres.

Mentalitatea sănătoasă este un factor capital, iar activitățile recreaționale, de dezvoltare personală trebuie sporite și încurajate înspre preferințele adolescenților.

Recomandăm adaptarea materiilor școlare la nevoile și preferințele elevilor, personalizarea fiind necesară în măsură cât mai mare.

Mulțumiri: Mulțumesc doamnei profesoare de psihologie Mihaela Mincic, doamnei profesoare de informatică Tanța Hodișan și elevei Nicola Alessia pentru ajutor în realizarea, centralizarea datelor și intervievarea elevilor din diferitele clase.

BIBLIOGRAFIE

[1] Akshar, A., Salim, S., Yashdeep, G., Iqbal, R., Shaleen, S. (2020). Covid-19 anxiety and stress survey (cass) in high school and college students due to coronavirus disease 2019. Chest. Vol.158(4), pp.314

[2] Behere, S.P., Yadav, R., Behere, P.B. (2011). A comparative study of stress among students of medicine, engineering, and nursing. Indian J Psychol Med, Vol. 33, pp.145-148

[3] Benally, T.M., Kravitz, L. (2021). Stress physiology: Understanding and counteracting a health crisis. https://www.unm.edu/~lkravitz/Article%20folder/stressphysiology21.html, accesat in 13.10.2023.

[4] Butac, L. (2021). Despre eustres și distres (manuscris)

[5] Chițescu, A. (2022). Totul despre stres: Ce este, tipuri, simptome și efecte asupra organismului. https://www.medicover.ro/despre-sanatate/totul-despre-stres-si-cum-sa-il-gestionezi,117, n, 285, accesat in 13.10.2023

[6] Felman, A., Sampson, S., (2020). Why Stress Happens and How to Manage It. Medical News Today. https://www.healthymindonline.com/blogs/detail/328/why-stress-happens-and-how-to-manage-it, accesat în 13.10.2023

[7] Fish, M.T. (2018). Don't stress about it: A primer on stress and applications for evidence-based stress management interventions in the recreational therapy setting. Therapeutic Recreation Journal, Vol. 52(4),pp. 390-409

[8] Harkness, K.L., Monroe, S.M. (2016). The assessment and measurement of adult life stress: Basic premises, operational principles, and design requirements. Journal of Abnormal Psychology, Vol.125(5), pp. 727-745

[9] Jerath, R., Beveridge, C., Jensen, M., Paladiya R. (2020). The therapeutic role of guided mental imagery in treating stress and insomnia: A neuropsychological perspective. Open Journal of Medical Psychology, Vol. 19 (10), pp. 21-39

[10] Lupien, S.J., Juster, R-P, Raymond, C., Marin, M-F., (2018). The effects of chronic stress on the human brain: From neurotoxicity, to vulnerability, to opportunity. Frontiers in Neuroendocrinology, Vol. 49, pp. 91-105.

[11] Priyanka, B. (2016). Stress questionnaire for college students

[12] Rohleder, N. (2019). Stress and inflammation - The need to address the gap in the transition between acute and chronic stress effects. Psychoneuroendocrinolog, Vol. 105, pp. 164-171

[13] Steptoe, A., Kivimaki, M. (2012). Stress and cardiovascular disease. Nat Rev Cardiol, Vol.3;9(6), pp.360-370

[14] Tan, S.Y., Yip, A. (2018). Hans Selye (1907-1982). Founder of the stress theory. Singapore Med J, Vol. 59(4), pp.170-171
[15] Tawakol, A., Ishai, A., Takx, R.A.P., Figueroa, A.L., Abdelrahman, A., Kaiser, Y. (2017). Relation between resting amygdalar activity and cardiovascular events: a longitudinal and cohort study. The Lancet, Vol. 389, pp. 834-845
[16] ***, Organizația Mondială a Sănătății (2020). Cum să faci ceea ce contează în perioade stresante: Un ghid ilustrat, pp. 22-24
[17] ***, (2017). Stresul: definitie, cauze, factori de stres si metode de combatere. https://www.spitalpneumobaiamare.ro/images/pdf/2017/educatie/stresul.pdf, accesat în 13.10.2023
[18] ***, (2005). US Department of Health and Human services: Sleep health objective. https://health.gov/healthypeople/objectives-and-data/browse-objectives/sleep, accesat în 13.10.2023
Pagini web:
[19] https://www.habitsforwellbeing.com/the-general-adaptation-syndrome-by-hans-selye/, accesat la 3 aprilie 2023
[20] https://www.medicover.ro/despre-sanatate/totul-despre-stres-si-cum-sa-il-gestionezi,117,n,285, accesat la 29 martie 2023
[21] https://www.apa.org/monitor/2014/04/teen-stress, accesat la 14 aprilie 2023
[22] https://www.chegg.com/learn/topic/physiological-responses-to-stress, accesat la 21 martie 2023
[23] https://www.cast-pharma.com/stress-response-physiology/, accesat la 3 aprilie 2023
[24] https://www.unm.edu/~lkravitz/Article%20folder/stressphysiology21.html, accesat la 25 aprilie 2023
[25] https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC5915631/, accesat la 14 aprilie 2023
[26] https://journals.sagepub.com/doi/pdf/10.4103/0253-7176.92064, accesat la 7 aprilie 2023
[27] https://www.dacianpalladi.ro/managementul-stresului/, accesat la 21 martie 2023
[28] https://welltory.com/, accesat la 25 aprilie 2023
[29] https://www.chartle.com/, accesat la 3 mai 2023
[30] https://www.apa.org/news/press/releases/stress/2013/highlights accesat la 25 aprilie 2023

ANALIZA FIZICO-CHIMICĂ A MIERII

Alexandra BURCĂ (PAPIȚ)[1], Anda Ioana Grațiela PETREHELE[2], Claudia-Mona MORGOVAN[2]

[1]student anul III, specializarea Chimie, Facultatea de Informatică și Științe
[2] cadru coordonator, șef lucrări dr., Departamentul de Chimie, Facultatea de Informatică și Științe, Universitatea din Oradea

Rezumat: *În această lucrare ne-am propus să analizăm din punct de vedere fizic și chimic, anumite sorturi de miere de albine din România, atât din producție autohtonă, cât și în urma analizării datelor unor studii recente efectuate asupra mierii. În urma analizării sorturilor de miere, s-a observat o variație atât a compoziției fizice cât și a compoziției chimice a mierii. Aceste variații se datorează în mare parte sursei botanice, a zonei geografice, a climei, a metodei de extracție, dar și a perioadei și a condițiilor de depozitare. Având multiple proprietăți benefice, mierea este un important element nutritiv și curativ, care merită să ajungă din nou în atenția omenirii, deoarece produsele stupului au o multitudine de proprietăți farmacologice și exercită asupra organismelor vii o serie de efecte terapeutice.*

Cuvinte cheie: miere, analiza fizico-chimică

INTRODUCERE

Încă din timpuri străvechi, oamenii au descoperit mierea ca fiind nu doar un aliment, ci și medicament. Scrierile din perioada antică greco-romană subliniază numeroasele proprietăți medicale ale mierii: antiseptic, tonifiant, ușor sedativ, antipiretic, aperitiv și digestiv.

În România, apicultura și apiterapia sunt cunoscute încă de pe vremea dacilor. Mierea a constituit pentru predecesorii noștri sursa principală de îndulcire a alimentelor, datorită valorii nutritive și energetice.[1]

Mierea de albine este un produs natural complex, ce rezultă din prelucrarea de către albinele melifere (Apis mellifera L.) a nectarului florilor, sau sucurilor dulci recoltate de pe alte părți ale plantelor și depozitarea acestora în celulele fagurilor pentru a le servi drept hrană energetică. Enzimele secretate de către albine, au capacitatea de a scinda zaharoza și a o inverti în glucoză și fructoză.[1, 2]

Mierea este o substanță apoasă bogată în zaharuri (până la 95% din substanța uscată), reprezentate în principal de D-glucoză și D-fructoză, dizaharide reprezentate de maltoză, izomaltoză, nigeroză, turanoză și cantități foarte mici de polizaharide.[3]

Pe parcursul procesului de transformare a nectarului, în miere sunt încorporate proteine, materii albuminoide, acizi (formic, malic, citric, gluconic, succinic, acetic), substanțe minerale (fosfați de calciu, fier, săruri de aluminiu, stronțiu, cobalt, titan, crom, iod, argint, zinc, plumb, iridiu etc., în cantități infinitezimale), substanțe de origine organică (enzime: catalază, inulază, inhibină), vitamine, hormoni, antibiotice naturale și polen, astfel că mierea de albine nu poate fi egalată de niciun preparat farmaceutic sintetic, deoarece ea este o substanță vie și direct asimilabilă. Totodată acest proces este însoțit de preschimbarea și înlocuirea acizilor nefolositori, deodată cu eliminarea surplusului de apă. Astfel, valoarea pH-ului mierii poate varia între 3-5-5,5, în funcție de proveniența floristică.[4]

La finalul procesului de ,,fabricare a mierii", are lor căpăcirea celulelor din fagure cu o pojghiță de ceară, ceea ce contribuie la menținerea calității ei inițiale, fiind astfel izolată de umezeală și de acțiunea factorilor externi.

Compoziția mierii de albine este una extrem de complexă, fiind apreciată pentru calitățile sale nutritive și terapeutice. Apiterapia este știința prevenirii și tratamentului bolilor folosind produsele albinelor, precum mierea și derivatele acesteia, polenul, propolisul, veninul, apilarnilul, etc. Produsele stupului au o multitudine de proprietăți farmacologice și exercită asupra organismelor vii o serie de efecte terapeutice.

Compoziția și efectele terapeutice ale mierii sunt redate în tabelul următor:

Tabelul 1. Cele mai importante vitamine din miere

Vitamina	Conținut la 1 kg de miere	Acțiune
Tiamina (B_1)	0,1 mg	Acționează asupra sistemului nervos, întreține tonusul digestiv, reglează metabolismul carbohidraților, elimină acidul uric, menține dantura sănătoasă, are acțiune antalgică
Riboflavina (B_2)	1,5 mg	Favorizează metabolismul carbohidraților, grăsimilor și a fierului
Acidul pantotenic	2,0 mg	Participă la construcția și funcția pielii, părului și mucoaselor
Acidul nicotinic (B_5)	0,3 – 1,0 mg	Participă la procesele celulare legate de metabolismul hidrocarburilor, reglează funcția pielii,a sistemului nervos, îmbunătățește circulația sanguină periferică și stimulează parenchimul ficatului
Piridoxina (B_6)	2 – 5 mg	Are efect tonic asupra sistemului nervos,a pielii și a aparatului digestiv
Acidul folic	0,1 mg	Stimulează maturarea hematiilor din măduva osoasă
Acidul ascorbic	30 – 50 mg	Acționează în metabolismul țesuturilor din organism, activează formarea protrombinei, menține structura oaselor,a mușchilor, a dinților, a vaselor sanguine. Mărește tonusul vital al organismului, stimulează creșterea, activează circulația sanguină.
Vitamina K	urme	Ajută la coagularea sângelui, participă la sinteza protrombinei.

Din punct de vedere nutrițional, mierea are următoarea compoziție: apă, zaharuri nereducătoare, substanțe minerale, proteine, acizi organici, vitamine, fermenți, hormoni, în total aproximativ 435 de substanțe organice, conținutul de microelemente fiind similar cu cel al sângelui uman, de aceea aceasta este foarte ușor de asimilat. Dintre multitudinea de alimente care pot furniza organismului un aport semnificativ de energie, mierea merită fără îndoială să se afle pe primul loc, fiind imediat asimilabilă, deoarece pe parcursul procesului de transformare a nectarului în miere, are loc o scindare a zaharurilor complexe.[4-6]

PARTEA EXPERIMENTALĂ

În această lucrare ne-am propus să analizăm din punct de vedere fizic și chimic, anumite sorturi de miere de albine din România. Sorturile de miere analizate în cadrul acestei lucrări sunt: miere de salcâm (MS), miere de rapiță (MR) și miere polifloră (MP), așa cum se observă în Fig.1:

Figura1. Miere polifloră, miere de rapiță, miere de salcâm

1. Analiza organoleptică a mierii

1.1. Culoarea

Culoarea mierii variază în funcție de substanțele colorate care se găsesc în nectarul florilor și de pigmenții vegetali conținuți, astfel aceasta poate varia de la incolor până la aproape neagră.

La mierea de nectar, strânsă la începutul primăverii predomină culoarea galbenă, până la portocaliu, iar la cea extra-florală, pot apărea și nuanțe de verzui, până la brun. Din Fig.1 se poate observa cât de mult variază culoarea mierii în funcție de sortul acesteia, dar și de starea de cristalizare. Astfel, mierea de salcâm prezintă o culoare gălbuie, fiind într-o stare semi-cristalizată, mierea de rapiță prezintă o culoare alb – gălbuie fiind cristalizată în totalitate, iar mierea polifloră este galben-aurie, în stare lichidă, dar vâscoasă. [7,8]

1.2. Aspectul

La fel ca și în cazul culorii, aspectul mierii este determinat de proveniența acesteia, de condițiile de extracție și prelucrare, precum și de puritatea sa. Mierea supusă analizei prezintă următoarele caracteristici, după cum urmează:

- mierea de salcâm: are o culoare slab-gălbuie, în stare semi-cristalizată, omogenă, cu vâscozitate ridicată, fără spumă și fără corpuri străine, dar cu resturi de faguri într-o proporție scăzută;
- mierea de rapiță: are o culoare alb-gălbuie, este cristalizată în totalitate, omogenă, fără spumă și fără corpuri străine, cu resturi de faguri în proporție scăzută;
- mierea polifloră: are o culoare galbenă- aurie, este omogenă, vâscoasă, fără spumă și fără corpuri străine, cu resturi nesemnificative de faguri. [4.7]

1.3. Mirosul și gustul

Gustul mierii este dulce și plăcut, cu diferite arome în funcție de sursa meliferă și de unele transformări care pot avea loc în compoziția mierii. În definirea gustului mierii, un aport important îl au zaharurile, aminoacizii și alți acizi, taninurile, substanțele volatile etc.

Gustul cel mai dulce îl are mierea în care predomină fructoza, în timp ce mierea provenită de la pomii fructiferi este ușor acrișoară, cea de salcie, castan, iarbă neagră este ușor amăruie, iar cea care provine de la muștar, ceapă prezintă nuanțe de picant.
Mirosul mierii este parfumat, caracteristic speciei de la care provine mierea respectivă.[4,7]

2. Proprietățile fizice ale mierii

2.1. Vâscozitatea

Majoritatea sorturilor de miere au o vâscozitate normală, dar care depinde în cea mai mare măsură de conținutul de apă, dar și de temperatură și într-o mică măsură de compoziție. Studiile realizate relevă faptul că realizarea curbei de vâscozitate în funcție de temperatură prezintă un punct de inflexiune în jurul temperaturii de 35^0C, ceea ce înseamnă că vâscozitatea mierii se modifică rapid între 30 și 40^0C, rămânând apoi constantă la temperaturi superioare.

2.2. Higroscopicitatea

Higroscopicitatea este proprietatea de a absorbi, în anumite condiții, umiditatea din aerul atmosferic, motiv pentru care, se impune păstrarea sa în vase bine închise, în spații cu umiditate care să nu depășească 60%. Această proprietate a mierii este strâns legată de concentrația de zaharuri pe care o conține fiecare tip de miere. Astfel, mierea cu o *cantitate mai mare de glucoză* este mai higroscopică și are un termen de valabilitate mai scurt (ex: mierea de rapiță).

De asemenea, *mierea cristalizată* este mai higroscopică decât cea fluidă, deoarece aceasta este lipsită de lichid protector la suprafață, astfel că absoarbe mai multă apă care apoi difuzează în toată masa ei. În concluzie, mierea destinată păstrării îndelungate trebuie să aibă un raport glucoză – fructoză subunitar (ex: mierea de salcâm).[4,7,9]

2.3. Densitatea şi greutatea specifică

Greutatea specifică a mierii este direct proporțială cu conținutul de apă al acesteia, astfel, la un conținut de apă de 15%, la 200C, îi corespunde o greutate specifică de 1,4350 kg/L (1 kg miere = 700 mililitri). La o temperatură de -360C mierea îngheață, ceea ce duce la o scădere a volumului ei cu 10%, iar la încălzire se dilată, astfel că la 250C, volumul ei crește cu 5%.

Densitatea unei substanțe se exprimă prin masa ei pe unitate de volum de substanță și masa aceluiași volum de apă la o temperatură anume. Deoarece densitatea apei este de 1g /mL la temperatura de 40C, densitatea relativă a unei substanțe la orice temperatură este egală cu densitatea substanței la temperatura respectivă.[3,4,6,10]

Mod de lucru:

În 3 pahare Berzelius de 10 mL, se măsoară câte 10 mL din fiecare tip de miere avut și se cântărește pentru a afla greutatea celor 10 mL de produs. Pe baza datelor obținute, se calculează densitatea fiecărui sortiment de miere.

N.B: Având în vedere că densitatea se măsoară în kg/m3, masa de produs măsurat în grame, se transformă în kilograme, iar volumul măsurat în mililitri, se transformă în metri cubi.

Rezultatele obținute sunt prezentate în Tab. 2 și Fig.2:

Tabelul 2. Densitatea sorturilor de miere studiate

MS= miere de salcâm, MR= miere de rapiță, MP= miere polifloră

Tip de miere	**Volum (m^3)**	**Greutate (kg)**	**Densitate (kg/m^3)**
MS	0,00001	0,01473	1,473
MR	0,00001	0,01480	1,480
MP	0,00001	0,01504	1,504

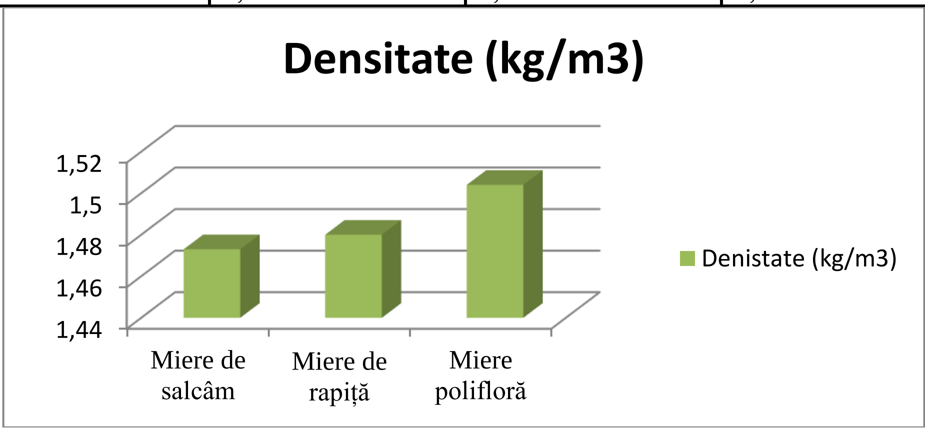


Figura 2. Densitatea sorturilor de miere studiate

2.4. Indicele de refracție și devierea luminii polarizate

Indicele de refracție oferă informații asupra procentului de apă și a greutății specifice a mierii. Pentru determinarea acestui indice, se utilizează un refractometru. Devierea luminii polarizate care străbate mierea de la dreapta la stânga, dă indicații asupra concentrației zaharurilor din miere.[3,4,6,22]

Mod de lucru: se prepară o soluție de miere de concentrație 10%, astfel: în 3 baloane cotate de 100 mL, se cântăresc 10 grame de miere din fiecare sortiment avut și se aduce la semn cu apă distilată.

Refractometrul Abbe se calibrează în funcție de indicele de refracție a apei distilate, apoi din fiecare soluție se iau câte 2-3 picături și se picură pe rând pe prisma refractometrului, apoi se citesc valorile indicate. Rezultatele obținute sunt cuprinse în Tab. 3 și Fig.3:

Tabelul 3. Indicele de refracție a mierii

MS= miere de salcâm, MR= miere de rapiță, MP= miere polifloră

Tip de miere	Indice de refracție
MS	1,346
MR	1,345
MP	1,347

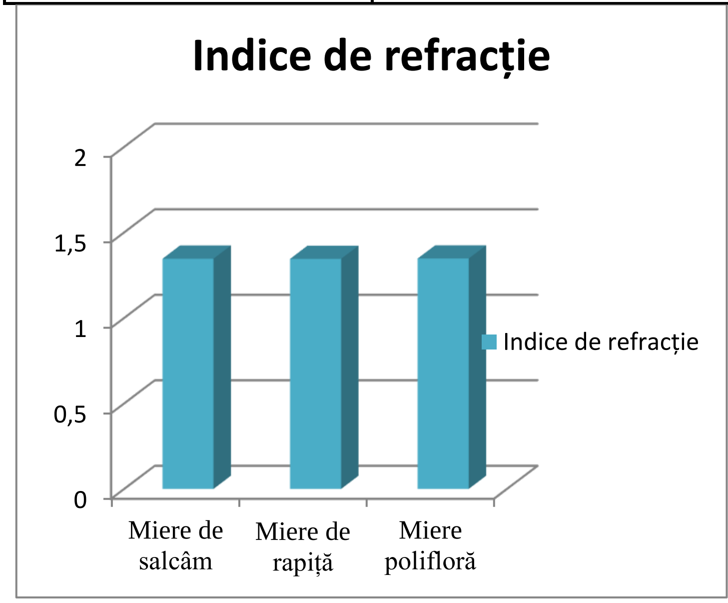


Figura 3. Indicele de refracție al mierii

REZULTATE ȘI DISCUȚII

Compoziția chimică a mierii

Compoziția chimică a mierii variază în funcție de mai mulți factori, printre care: plantele din care se face recoltarea, condițiile de climă, zona de recoltare, procedeul de extragere utilizat, etc. În medie ***83%*** din compoziția mierii este reprezentată de *substanța uscată* și *17% de apă.*

Apoximativ *80% din substanța uscată* este reprezentată de *zaharuri*, din care în proporție de aproximativ 70% este glucoza și fructoza, care se formează în urma invertirii enzimatice a zaharozei. Pe lângă acestea, mierea de albine conține vitamine din complexul B, vitamina C, proteine (0,4 – 0,8 %), aminoacizi printre care: leucina, alanina, metionina, substanțe minerale (calciu, magneziu, fosfor, fier, cupru, mangan, zinc, siliciu, sulf, sodiu), acid pantotenic, acid folic, acid nicotinic, antioxidanți, fermenți, enzime, factori antibiotici, urme de polen, hormoni, precum și o serie de factori de creștere etc.

Vitaminele, deși se găsesc în cantități foarte mici în miere, sunt suficiente pentru a-i crește valoarea nutritivă, dietetică și terapeutică. Dintre enzimele care se găsesc în miere, cele mai reprezentative sunt invertaza, care transformă zaharoza în glucoză și fructoză, și diastaza care scindează polizaharidele în zaharuri simple.

Compoziția chimicî a mierii din România este redată ân Fig. 4:

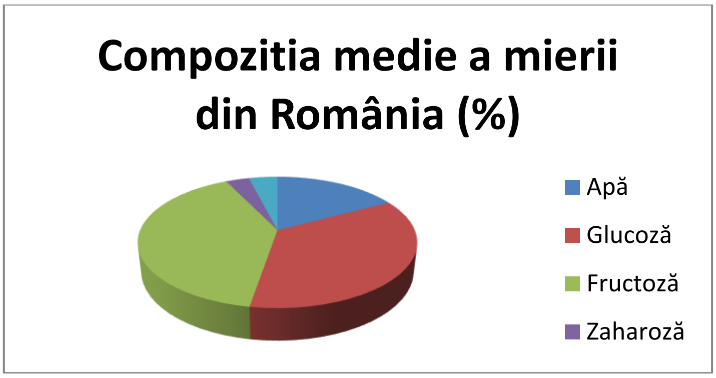


Figura 4. Compoziția medie a mierii din Romania

Determinarea concentrației de zaharuri din miere

Mod de lucru: se prepară o soluție de miere de concentrație 10%, astfel: în 3 baloane cotate de 100 mL, se cântăresc 10 grame de miere din fiecare sortiment avut și se aduce la semn cu apă distilată. Refractometrul se calibrează în funcție de indicele de refracție a apei distiate, apoi din fiecare soluție se iau câte 2-3 picături și se picură pe rând pe prisma refractometrului, apoi se citesc valorile indicate.[3,4,6,11]

Rezultatele determinărilor sunt prezentate în Tab.4 și Fig.5:

Tabelul 4. Concentrația de zaharururi a mierii

MS = miere de salcâm, MR = miere de rapiță, MP = miere polifloră

Tip de miere	Concentrația de zaharuri (%)
MS	8,75
MR	8,25
MP	9,5

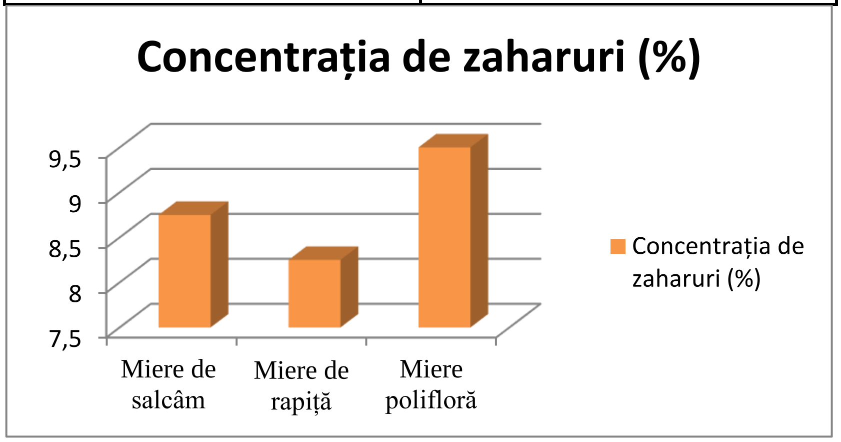


Figura 5. Concentrația de zaharuri din miere

Din măsurătorile efectuate, reiese faptul că mierea supusă analizei conține un procent de peste 80% zaharuri, ceea ce corespunde standardelor de calitate a mierii.

Acizii organici

Acizii organici determină aciditatea mierii, care este un parametru exprimat în mL de NaOH de 0,1 N utilizată la 100 g miere și poate avea o valoare de maxim 4 mL în cazul mierii florale, respectiv 5 mL în cazul mierii de mană. Dintre acești acizi, acidul formic are un rol foarte important, având un efect dezinfectant și bactericid.

Determinarea pH-ului mierii se realizează cu ajutorul hârtiei indicator. Pentru mierea utilizată în cadrul realizării acesti lucrări, s-au obținut următoarele valori:

Tabelul 5. Valoarea pH-ului mierii supuse testării

MS = miere de salcâm, MR = miere de rapiță, MP = miere polifloră

Tipul de miere	Valoare pH
MS	≈ 4
MR	≈ 4,4
MP	≈ 3,9

Detreminarea acidității mierii

Principiul metodei: extractul apos al probei de analizat se titrează cu o soluție de NaOH 0,1 N, în prezența fenolftaleinei. Valorile obținute sunt utilizate pentru determinarea acidității mierii și sunt trecute în Tabelul IV.7. Aciditatea mierii se calculează după formula:

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{10\ x\ V}}{\mathbf{M}}\text{, unde:}$$

V= volum de soluție de NaOH 0,1N (mL)

M= masa probei de miere care a fost luată pentru determinare (grame = 3 gr)

Tabelul 6. Determinarea acidității mierii

MS = miere de salcâm, MR = miere de rapiță, MP = miere polifloră

Tip de miere	Volum de NaOH 0,1N (mL)	Aciditate
MS	1,2	4
MR	1,3	4,33
MP	2,6	8,66

Rezultatele obținute relevă faptul că mierea polifloră utilizată prezintă aciditatea cea mai mare, chiar peste media admisă, ceea ce înseamnă un posibil început de fermentație.

Proteinele, compușii fenolici, flavonoidele și conținutul de acid ascorbic

Cantitatea de proteine care se găsește în miere este destul de scăzută (sub 1%). Cu toate acestea valoarea nutritivă este ridicată deoarece mierea conține în principal aminoacizi esențiali liberi, precum: lizina, treonina, valina, metionina, izoleucina, leucina, fenilalanina, triptofan, etc. În afară de aminoacizi și enzime, în miere au fost identificate și alte proteine: albumine, globuline, nucleoproteine. [12,13]

În Fig. 6 este prezentat conținutul de proteine a diferitelor sorturi de miere de pe teritoriul României, determinări realizate în cadrul unui studiu recent:

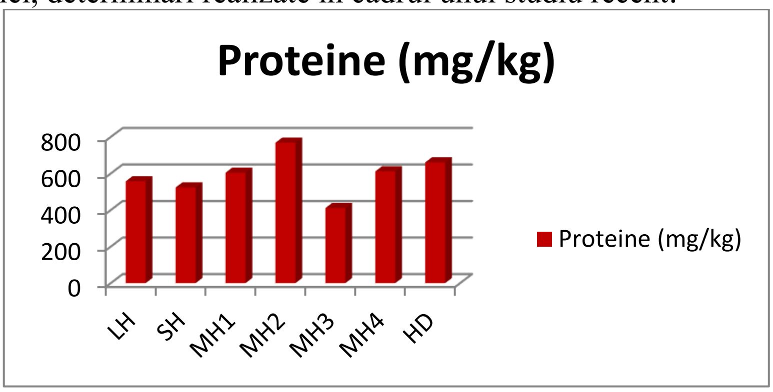


Figura 6. Conținutul de proteine al mierii

LH = miere de tei din Muntenia, SH = miere de floarea-soarelui din Transilvania, MH1 = miere polifloră din zona de câmpie a Transilvaniei, MH2 = miere polifloră din zona de munte a Moldovei, MH3 = miere polifloră din zona de munte a Crișanei, MH4 = miere polifloră din zona de luncă a Crișanei, HD = miere de mană din Muntenia

Compușii fenolici, flavonoidele și acidul ascorbic sunt constituenți importanți ai mierii, fiind considerați compuși bioactivi cu acțiune favorabilă asupra sănătății omului. [12,14]
Un studiu recent realizat, a pus în evidență compoziția în compuși fenolici, flavonoide și acid ascorbic a unor sorturi de miere recoltate de pe teritoriul României. Rezultatele studiului sunt prezentate în graficul următor:[7]

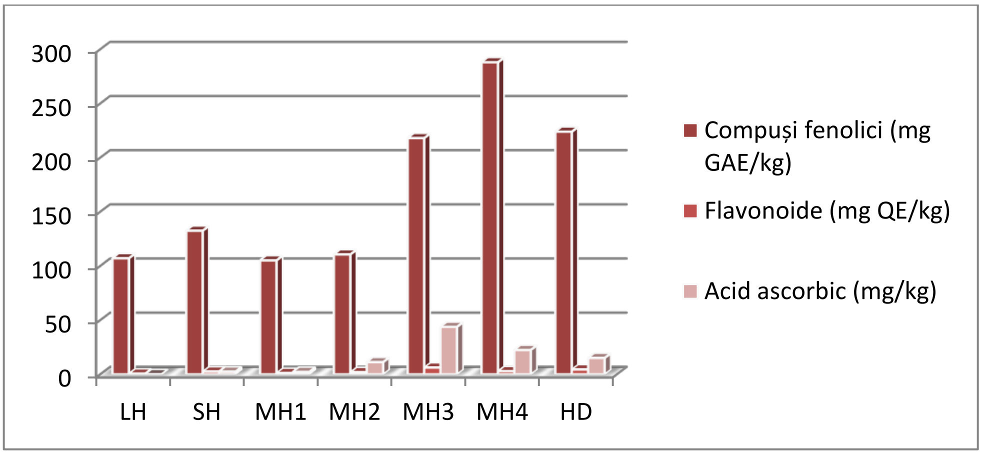


Figura 7. Conținutul de compuși fenolici, flavonoide și acid ascorbic
LH = miere de tei din Muntenia, SH = miere de floarea-soarelui din Transilvania, MH1 = miere polifloră din zona de câmpie a Transilvaniei, MH2 = miere polifloră din zona de munte a Moldovei, MH3 = miere polifloră din zona de munte a Crișanei, MH4 = miere polifloră din zona de luncă a Crișanei, HD = miere de mană din Muntenia

Compoziția chimică a mierii este influențată de mai mulți factori, precum originea botanică a mierii, clima, aria geografică și condițiile de depozitare. În cadrul acestui studiu, clima de munte și de luncă a favorizat o compoziție bogată în compuși bioactivi.

În urma analizării sorturilor de miere, s-a observat o variație atât a compoziției fizice cât și a compoziției chimice a mierii. Aceste variații se datorează în mare parte sursei botanice, a zonei geografice, a climei, a metodei de extracție, dar și a perioadei și a condițiilor de depozitare.[12-15]

Cu toate acestea, toate sorturile de miere prezintă compuși bioactivi și diverse componente utile pentru susținerea funcționării normale a organismului. În concluzie, mierea ar trebui să fie supusă unor teste suplimentare pentru dezvoltarea unor noi produse biomedicale.

BIBLIOGRAFIE

[1] Hristea, C.L., Ialomițeanu, M. (1978). Produsele albinelor în sprijinul sănătății omului. Redacția Publicațiilor Apicole. București, pp. 32
[2]Cristina, M. (2005). Apiterapia sau cum să folosim produsele stupului pentru sănătate, Ed. Fait Lux, București
[3]Dumitrescu, H., Milu, C. et all. (1997). Controlul fizico – chimic al alimentelor, Ed. Medicală, București
[4]Mărghitaş, A. (2005). Albinele şi produsele lor, Ed. Ceres, Bucureşti
[5]Cirnu, I. (1971). Mierea de mană, Ed. Apimondia, București
[6]Akun, P. (2004). Foloasele mierii, Editura Lucman, București
[7] Almasaudi, S. (2021). Activitățile antibacteriene ale mierii, Saudi J. Biol. Sci.
[8] Alam, F., Islam, M.A., Gan, S.H., Khalil, M. I. (2014). Honey: a potential therapeutic agent for managing diabetic wounds, Evid. Based Complement. Altern. Med.
[9] Lusby, P. E., Coombes, A., Wilkinson, J. M. (2002). Honey: a potent agent for wound healing, J.Wound Ostomy. Continence Nurs
[10] Abedi, F., Ghasemi, S., Farkhondeh, T., Azimi, M. (2021). Nezhad, M. Shakibaei, S. Samarghandian – Possible pontential effects of honey and its main components against Covid-19 infection, Dose-Response
[11] Lazăr, S. (2002). Bioecologie şi tehnologie apicolă, Universitatea de Ştiințe Agricole şi Medicină Veterinară, Ion Ionescu de la Brad: Iasi, Editura Alfa, Iaşi
[12]EU. Council, Council directive 2001/11 O/EC of 20 December 2001 relating to honey, OJEC 2002, L10, pp.47–52

[13] El Sohaimy, S. A., Masry, S. H. D., Shehata, M. G. (2015). Physicochemical characteristics of honey from different origins, Ann. Agric. Sci.
[14]L. da C Azeredo, M. A. A. ,Azeredo, S. R. de Souza, V. M. L. Dutra (2003). Protein contents and physicochemical properties in honey samples of Apis mellifera of different floral origins, Food Chem
[15]Smetanska, S. S. Alharthi, K. A. Selim (2021). Physicochemical, antioxidant capacity andandida species, Med Mycol. 2006; color analysis of six honeys from different origin, J. King Saud Univ. Sci.

APLICAȚII ALE CHIMIEI ÎN CRIMINOLOGIE ȘI CRIMINALISTICĂ

Daria-Andrea BOGDAN[1], Daria CHEBELEU[1], Anița LUNCAN[2]

[1]Colegiul Naţional "Emanuil Gojdu" – elevă clasa XI-a, Oradea, România, dariaaandreab@gmail.com;
[1] Colegiul Naţional "Emanuil Gojdu" – elevă clasa XI-a, Oradea, România, dariachebeleu@yahoo.com.
[2] Colegiul Naţional "Emanuil Gojdu" – profesoară Chimie, Oradea, România

Rezumat. *Chimia este o disciplină cu o utilitate indisputabilă în criminalistică și criminologie. În această lucrare, vom observa cum reacționează patru probe diferite (aspirină, ibuprofen, paracetamol și una necunoscută) la anumite teste utilizate și de chimiștii criminaliști. În urma cromatografiei în strat subțire și a testelor de reactivitate cu NaOH, $NaHCO_3$ și $FeCl_3$, am asociat substanței necunoscute structura paracetamolului.*

Cuvinte cheie: TLC, cromatografie, paracetamol, ibuprofen, aspirină, analgezice, clorură ferică, chimie criminalistică

INTRODUCERE

Mulți oameni ar dori să trăiască într-o lume utopică, lipsită de infracțiuni, însă, în societatea actuală, acest lucru nu este posibil. Totuși, cu ajutorul criminologiei și al criminalisticii, se pot descoperi cauzele și mijloacele unei crime, și, de asemenea, se poate încerca prevenirea atitudinilor antisociale.

Criminologia este o știință interdisciplinară, care analizează criminalitatea în totalitate, având la bază atât o parte logică, reală, cât și una istorică, socială. Deoarece criminalitatea este un fenomen complex, în cercetarea acesteia este necesară o largă varietate de specialiști în multiple domenii, precum filosfia, sociologia, psihiatria, medicina și chimia. [3]

Criminalistica reprezintă știința prin intermediul căreia se pot identifica persoanele implicate în săvârșirea infracțiunilor, cercetarea acestora și prevenirea faptelor antisociale, folosind un ansamblu de cunoștințe despre metodele, mijloacele tehnice și procedeele tactice. Este, la rândul ei, o știință multidisciplinară, îmbinând științele exacte (chimie, biologie, ș.a.) cu cele umaniste (logică, psihologie, ș.a.) [2]

Criminalistica și criminologia folosesc, drept metode de sprijin auxiliare, alte științe. Aici se încadrează chimia, dar și medicina, cu precădere tehnicile de evaluare psihiatrică, neurologică, endocrinologică, de medicină legală, etc. [10] De cele mai multe ori, comportamentul criminal are surse profunde, izvorând din diverse tulburări comportamentale, dar pot fi și probleme psihologice, care au întunecat gândirea și au împins infractorul să recurgă la consumul unor substanțe interzise, care cauzează pierderea controlului asupra rațiunii. Vom prezenta câteva droguri puternice și periculoase în acest sens.

Cocaina este cel mai puternic stimulent al sistemului nervos central, care poate fi găsit în natură. Frecvent, se întalnește sub forma de hipoclorit de cocaină, care este o pulbere cristalină albă, extrasă din planta Erythroxylon coca.

Cannabisul este planta din a cărei rășină, flori și frunze se obțin substanțe psihoactive, precum hașiș și marijuana, în care se regăsesc tetrahidrocanabinolul și canabinolul ca principale substanțe active. Hașișul are o mai mare cantitate de THC, ceea ce îl face un drog mai puternic decât marijuana. Deși creierul secretă THC, în cantități exagerate, afectează logica și gândirea consumatorului.

Heroina este cel mai cunoscut drog. Format prin transformarea morfinei din opiumul brut prin procese chimice, conține dolantină, codeină, metadonă, tilidină și fentanil. Aceste substanțe toxice estompează activitatea intelectuală, influențează starea psihică eliminând frica, iar pe termen lung dă alterări cognitive, ale personalității și depresie. [9]

Chimia face posibile anumite tehnici utilizate în aceste domenii, precum: identificarea unor posibili suspecți sau victime (prin probe de sânge, de ADN, amprente, urme de picioare, fire de păr, ș.a.), identificarea anumitor substanțe (droguri, otrăvuri, ș.a.), identificarea sursei unui incendiu, identificarea potențialelor arme utilizate, etc. În plus, conform unor studii americane cu rezultate controversate, există anumite corelații între chimia creierului și comportamentul impulsiv sau violent. [7,8]

Printre procedeele chimice utilizate în aceste două domenii se numără: testele de culoare, cromatografia în strat subțitre, cromatografia de gaze, cromatografia de lichide, spectroscopia în infraroșu, spectroscopia RAMAN difractometria raze X, spectrometria de masă, electroforeza capilară, ș.a. [12]

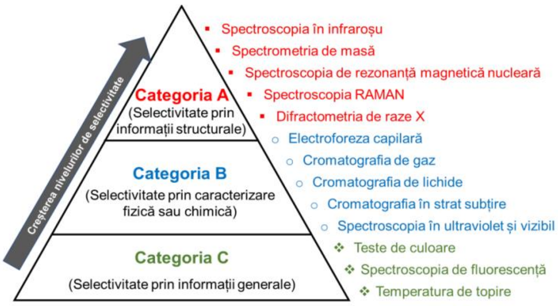


Figura 5. Nivelul de selectivitate al anumitor procedee chimice (https://swgdrug.org/)

De exemplu, testarea cu clorură ferică este utilizată pentru determinarea structurii substanțelor organice și a prezenței fenolilor, a enolilor, a acizilor hidroxamici, a oximelor sau a acizilor sulfinici. Proba se dizolvă în apă sau într-un amestec de apă și etanol și câteva picături de soluție neutră de clorură $FeCl_3$. Se adaugă NaOH la amestec până când se formează un precipitat maro permanent. Formarea unei colorații roșii, albastre, verzi sau violet indică prezența fenolilor. În criminalistică poate fi folosit pentru a detecta salicilații în organism, test de diagnosticare rapidă pentru supradozajul cu aspirină. [1]

În această lucrare vom evidenția aplicabilitatea chimiei în identificarea substanțelor de la o scenă a crimei, prin două procedee experimentale: cromatografie în strat subțire și testare cu clorură ferică, bicarbonat de sodiu și hidroxid de sodiu.

MATERIALE ŞI METODE

Avem o probă necunoscută X (comprimat și soluție), din 3 variante posibile: aspirină, paracetamol, ibuprofen. De asemenea, probelor A, P, I trebuie să le fie asociate câte o structură din cele trei analgezice (aspirină, paracetamol, ibuprofen), realizându-se apoi corespondența între substanța X și una dintre celelalte trei probe. Se vor efectua două experimente: testele de reactivitate cu $NaHCO_3$, cu NaOH și cu $FeCl_3$ și analiza cromatografică. [6]

Partea 1 - Realizarea şi interpretarea experimentelor de analiză cromatografică:

Substanțe necesare:

- Proba A, aspirină
- Proba P, paracetamol
- Proba I, ibuprofen
- Proba X, necunoscută
- Amestec de n-hexan și izopropanol cu constanta dielectrică 6,5

Echipamente necesare:

- Eprubete
- Pahar Berzelius
- Capilare
- Pensetă
- Creion și riglă
- Plăcuță cromatografică de silicagel
- Cilindri gradați pentru solvenți

- Lampă UV
- Hârtie de filtru
- Pâlnie de separare

Pentru identificarea substanței necunoscute, având la dispoziție paracetamol, ibuprofen și aspirină, am folosit cromatografia pe strat subțire.

Cromatografia pe strat subțire indică principalele caracteristici și proprietăți fizice ale substanțelor studiate. [5]. Această tehnică importantă din chimia organică poate evalua cursul unei reacții, pentru a observa puritatea unei probe și, de asemenea, pentru a identifica compușii necunoscuți în comparație cu standardele. Un strat subțire de fază staționară este reprezentat de o placă purtătoare de silicagel (conținând SiO_2 și Al_2O_3), cu scopul de a monitoriza modul în care reacțiile progresează. Faza lichidă sau mobilă se deplasează în sus pe placă prin acțiune capilară și substantele analizate sunt purtate împreună cu aceasta la viteze diferite, in functie de diferentele de proprietati chimice și fizice, puterea lor de atracție față de faza staționară și polaritatea fazei mobile. Poziția spotului analitic este definită de factorul său de retenție, R_f, este utilizat pentru a caracteriza și compara componentele diferitelor probe.

$$R_f = \frac{\text{distanța parcursă de substanta analizată}}{\text{distanța parcursă de frontul solventului}} \text{ [10].}$$

În prima etapă a experimentului am preparat eluentul, găsit prin testarea diferitelor combinații de solvent cu polartități diferite. Amestecul este ales pe baza constantei dielectrice, care este capacitatea unui material de a acumula liniile electrostatice ale unui flux electric, de a concentra energie electrică. Ea caracterizează starea de polaritate a materialului. [14].

Pentru ca experimentul să decurgă cât mai bine și pentru a se observa ușor diferențele de viteză, constanta dielectrica a eluentului trrebuie să fie cât mai mare, adică amestecul să fie cât mai polar. Ca să putem lucra mai ușor, am dublat cantitățile, folosind un amestec de 20 mL izopropanol și 7 mL n-hexan drept eluent.

Folosind pipete, extragem cantitățile de solvent necesare, pe care le măsurăm într-un cilindru gradat înainte de a le turna în vasul Berzelius. În acesta introducem și bucata de hârtie de filtru. Îl acoperim repede cu folie de aluminiu pentru a nu se evapora și pentru a nu se pierde din proprietățile sale.

Urmează să pregătim placa cromatografică. Pe plăcuța de silicagel trasăm cu ajutorul unui creion cu vârf moale și al unei rigle două linii la un centimetru de marginea superioară, respectiv de cea inferioară ale plăcuței. Pe dunga de la bază marcăm 4 spoturi, la distanțe egale, pentru paracetamol, ibuprofen, aspirină și proba necunoscută, notându-le P, I, A și X (fig. 1).

Pregătim faza mobilă. Cu ajutorul unui mojar cu pistil vom zdrobi pastilele, pe rând, în vederea obținerii unui praf (fig. 2). Pe acestea le dizolvăm în apă distilată, urmând să realizăm o filtrare, trecând amestecurile printr-o pâlnie de separare acoperită cu hârtie de filtru.

Figura 1. Plăcuță cromatografică de silicagel, marcată cu liniile fronturilor și eluentul în pahar Berzelius.

Figura 2. Sfărâmarea tabletei de paracetamol cu ajutorul mojarului și al pistilului.

Odată obținute cele patru substanțe, notăm eprubetele cu P (paracetamol), I (ibuprofen), A (aspirină), respectiv X (necunoscuta). Pentru aplicarea spoturilor, îmbibăm capilara de sticlă într-una din eprubetele cu substanțe. Lichidul va urca pe capilară. Atingem ușor și scurt capilara de placuță, în locul marcat cu litera corespunzătoare, pentru câteva secunde, astfel încat să se formeze un spot vizibil, dar nu prea mare. Solventul se va evapora rapid. Repetăm procedeul pentru fiecare substanță (fig. 3).

Figura 3. Eprubetele ce conțin soluțiile medicamentelor obținute prin filtrare, în stativ.

Plăcuța de silicagel se introduce cu ajutorul unei pensete în paharul cu eluent, în poziție dreaptă, verticală (fig. 4). În momentul introducerii, nivelul eluentului nu trebuie să depășească linia trasată în partea inferioară.

Se acoperă repede cu folie de aluminiu și se așteaptă pană ce eluentul crește pe placuța în sus, până la marcajul trasat la un centimentru de marginea superioară a placuței (fig. 5). Vasul nu trebuie mișcat, pentru ca urcarea eluentului să decurgă lin, la nivel constant. Când eluentul atinge frontul, se scoate rapid cu ajutorul pensetei și se lasă câteva secunde pentru a se usca.

Figura 4. Aplicarea spoturilor pe plăcuța de silicagel,
folosind capilare de sticlă.

Analizăm evoluția substanțelor, punând plăcuța sub lumina unei lampe UV (fig. 6). Astfel, se recunosc spoturile, care trebuie încercuite cu un creion cu vârf moale, pentru a nu deteriora placuța. Acum, putem calcula factorii de retenție, observând viteza și proprietățile substanțelor, reușim să facem analogii și să determinăm ce conține substanța necunoscută.

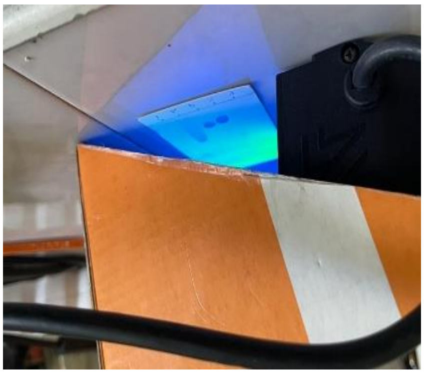


Figura 6. Vizualizarea spoturilor la lampa UV

Figura 5. Evoluția eluentului pe plăcuța cromatografică

Partea 2 - Teste de reactivitate:

Următoarea parte practică este una accesibilă, ușor de realizat. Aceasta cuprinde testarea reacției compușilor organici cu trei substanțe anorganice.

Echipamente necesare:

- Eprubete
- Stativ
- Spatulă
- Mojar cu pistil

Substanțe utilizate:

- Aspirină
- Paracetamol
- Ibuprofen
- Proba necunoscută
- Soluție NaOH
- Soluție saturată $NaHCO_3$

- Soluție $FeCl_3$

Înainte de a efectua testele cu cele trei soluții, am măcinat cele patru probe, apoi le-am dizolvat în apă și le-am turnat în eprubete. Am ales o probă necunoscută, a cărei eprubetă am marcat-o cu semnul întrebării. Restul eprubetelor le-am notat în concordanță cu substanța din ele: A (aspirină Richter), P (paracetamol), I (ibuprofen).

Primul test efectuat a fost cel cu soluția de hidroxid de sodiu. Din fiecare eprubetă, am turnat într-o alta aproximativ 2mL substanță, peste care am adăugat 1-2 picături de NaOH. Eprubetele cu amestecul le-am așezat sub cele corespondente substanței inițiale, pentru a putea observa eventualele diferențe (fig. 7).

Figura 7. Aspectul substanțelor (aspirină, paracetamol, ibuprofen, necunoscută) înainte și după reacția cu NaOH (jos)

Al doilea test a constat în observarea reacțiilor substanțelor cu bicarbonat de sodiu. Scopul acestui test este de a identifica probele care dau efervescență în reacție cu $NaHCO_3$. La fel ca anterior, am pus în eprubete separate aproximativ 2mL din fiecare probă organică, apoi am adăugat 1-2 picături de $NaHCO_3$ și am consemnat observațiile legate de reacțiile vizibile. Eprubetele ce conțin amestecul au fost așezate sub cele cu substanțele inițiale (fig. 8).

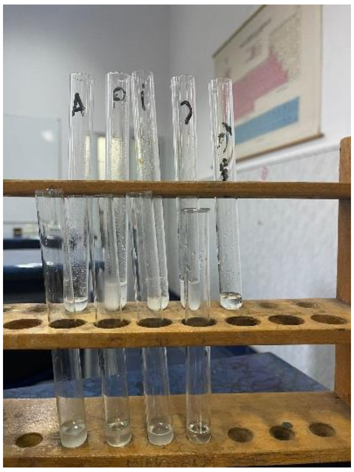


Figura 8. Aspectul substanțelor (aspirină, paracetamol, ibuprofen, necunoscută) înainte și după reacția cu $NaHCO_3$.

Al treilea test, cel cu clorura ferică, este unul mult mai relevant și des-utilizat decât celelalte două. În prezența unei grupări -OH legate de nucleul aromatic, $FeCl_3$ își schimbă culoarea din galben-portocaliu în diverse culori, depinzând de fenolul cu care interacționează. În timp ce paracetamolul dă o culoare verzuie în reacție cu $FeCl_3$, acidul salicilic, modifică galbenul-portocaliu în violet. Din nou, în realizarea experimentului, am pus în eprubete distincte aproximativ 2mL din fiecare probă organică, peste care apoi am adăugat 1-2 picături de $FeCl_3$, notând rezultatele procesului chimic. Noile eprubete le-am așezat în stativ cu un rând mai jos față de compușii inițiali (fig. 9).

Figura 9. Aspectul substanțelor (aspirină, paracetamol, ibuprofen, necunoscută) înainte și după reacția cu $FeCl_3$.

REZULTATE ŞI DISCUȚII

Prepararea eluentului, pentru un amestec de izopropanul (ε_1=19,92) și n-hexan (ε_2=1,88) trebuie să obținem un amestec cu constanta electrică maximă, adică ε=6,5. În continuare, pentru a stabili raportul substanțelor, alegem un volum V1=10 mL de izopropanol și un volum necunoscut V2 de n-hexan.

$$\sum(\varepsilon * \mathrm{V}) = \sum \varepsilon * \sum V$$
$$\varepsilon 1 * \mathrm{V1} + \varepsilon 2 * \mathrm{V2} = (\mathrm{V1} + \mathrm{V2}) * \varepsilon$$
$$19{,}92 * 10 + 1{,}88 * V2 = (10 + V2) * 21{,}8$$
$$V2 \approx 3{,}44 \Rightarrow V2 \approx 3{,}5$$

La 10 mL izopropanol corespund aproximativ 3,5 mL n-hexan pentru a avea ε=6,5.

La finalul testului cromatografic, calculăm factorul de retenție al fiecarei substanțe. Măsurăm distanța totală parcursă de substanțe, respectiv până la spoturi și facem raportul celor două.

$$R_{f-paracetamol} = \frac{21}{80} = 0{,}2625$$

$$R_{f-ibuprofen} = \frac{57}{80} = 0{,}7125$$

$$R_{f-aspirina} = \frac{37}{80} = 0{,}4625$$

$$R_{f-necunoscut} = \frac{21}{80} = 0{,}2625$$

Se observă ușor că proba necunoscută (X) este paracetamolul (P), prezentând aceleași proprietăți, respectiv aceeași viteză a deplasării spotului în eluentul folosit. Spre deosebire de celelalte analgezice, paracetamolul este cel mai lent, ceea ce denotă faptul ca paracetamolul are o afinitate mai scăzută față de faza mobilă, rămânând staționat mai repede.

Totodată, observăm eficiența amestecului de eluent. Polaritatea sa crescută a determinat o diferențiere clară între substanțe. Înălțimea scăzută a paracetamolului, evoluția lui mai lentă indică faptul că e cel mai puțin polar dintre medicamentele studiate, interacționând slab cu eluentul din cauza diferențelor mari de structură, forțe intermoleculare și polaritate.

În cazul testului cu NaOH, substanțele nu au suferit modificări vizibile, deci rezultatele nu ajută în distingerea acestora. În toate cazurile, am obținut o soluție limpede. Cu toate acestea, știm că în cazul aspirinei și al ibuprofenului, datorită acidității substanțelor, a avut loc o reacție de neutralizare, iar paracetamolul nu a reacționat cu hidroxidul de sodiu.

La proba cu bicarbonat de sodiu, aspirina și ibuprofenul au reacționat asemănător, degajând gaz (CO_2), apoi soluția tulburându-se și obținând cantități mici dintr-un precipitat alb. Paracetamolul și proba necunoscută nu au degajat gaz, dar precipitatul alb s-a depus și în cazul acestora. Asemănarea dintre proba de paracetamol și cea necunoscută indică faptul că proba necunoscută este paracetamolul.

Ultimul test realizat a fost cel cu clorura ferică. După cum ne așteptam, paracetamolul a schimbat culoarea din galben-portocaliu într-o nuanță de verde, la fel ca proba necunoscută. Aspirina Richter și ibuprofenul nu au dat modificări semnificative de culoare.

Tabelul 1. Rezultatele testelor efectuate

Reactivul / Proba	Soluție NaOH	Soluție $NaHCO_3$	Soluție $FeCl_3$
Aspirină Richter	Soluție limpede	Degajare de gaz/precipitat alb	Fără modificare semnificativă de culoare: colorație portocalie
Paracetamol	Soluție limpede	Tulburare/precipitat alb	Schimbare de culoare: colorație verde-pal
Ibuprofen	Soluție limpede	Degajare de gaz/precipitat alb	Fără modificare semnificativă de culoare: colorație gălbuie-portocalie
Probă necunoscută	Soluție limpede	Tulburare/precipitat alb	Schimbare de culoare: colorație verde-pal

Observăm că proba necunoscută și paracetamolul dau rezultate identice în urma tuturor testelor. Cum rezultatele necunoscutei nu coincid cu ale altei substanțe, putem afirma cu certitudine că proba necunoscută este paracetamol, putându-i atribui structura acestuia.

CONCLUZII

Studiind compoziția, structura, proprietățile și schimbarea materiei și ajutându-ne să înțelegem o multitudine de procese și schimbări din natură, chimia este prezentă în toate aspectele vieții.

Deși este considerată o știință modernă, aceasta are aplicabilitate în criminalistică din antichitate, de la tehnicile romanilor de depistare a arsenicului, și până în prezent, la tehnicile moderne, criminaliștii având mereu nevoie de chimiști, care depistează substanțele din corpul individului și analizează starea acestuia. [4]

În urma experimentelor realizate, putem afirma cu certitudine că printre disciplinele indispensabile atât în criminologie, cât și în criminalistică, se numără chimia. Datorită acestei discipline și a tehnologiei disponibile momentan, am putut identifica structurile unor substanțe active prezente în medicamente comune (paracetamol și aspirină) fără a întâmpina dificultăți sau a efectua un proces laborios.

Consumul iresponsabil al medicamentelor, în special de cătrei cei neinformați, poate dăuna grav organismului acestora. De aceea, este important consultul unui medic sau al unui farmacist, dar și al prospectului. Spre exemplu, paracetamolul poate fi toxic în doze mari, printre reacțiile adverse numărându-se diaree, vărsături, icter, convulsii, și, în cel mai nefericit caz, comă sau chiar moarte, dacă nu se intervine la timp. [13]

Menționăm că, în cazul majorității infracțiunilor, substanțele implicate sunt mult mai periculoase, dar metodele utilizate în identificarea lor sunt similare celor evidențiate anterior.

BIBLIOGRAFIE

[1]Barar, M. (2015).The Role of Chemistry in Processing Crime Scenes
[2]Chirilă, M. (2014). Note de curs. Criminalistică pp.2-4
[3]Giurgiu, N. (1992). Elemente de criminologie, pp.12
[4]Lăpăduși, V. (2015). Istoria Institutului Naţional de Criminalistică din Inspectoratul General al Poliţiei Române, în Criminologie, criminalistică și penologie, pp.112
[5]Lipsy, P. (2005).Thin Layer Chromatography Characterization of the Active Ingredients in Excedrin and Anacin
[6]Matache, M., Radu, D., Nechita, C., Doicin, L., Marioane, C.A. (2023). Analiza unei substanțe necunoscute, ingredient farmaceutic activ
[7]Miheș, C. (2008)Elemente de criminalistică
[8]Toutin, T., Fraj-Bouslimani,N. (2015). Dependenţa de crimă, în Criminologie, criminalistică și penologie, pp.21
[9]Tuca, C.E. (2012). Despre droguri de la A la Z: ghid practic de prevenire și informare în domeniul adicțiilor
[10]Ursa, V. (1999). Criminologie
[11]www1: https://scilearn.sydney.edu.au/fychemistry/SummerSchool/LabManual/E29.pdf, accesat la 7 iulie 2023
[12]www2: https://swgdrug.org/, Scientific Working Group for the Analysis of Seized Drugs, accesat la 7 iulie 2023
[13]www3: https://www.drmax.ro/articole/acetaminofenul-paracetamolul-si-riscul-de-supradoza-tot-ce-trebuie-sa-stii, accesat la 10 septembrie 2023
[14]www3: https://revicon.ro/materialele-dielectrice-ce-sunt/, accesat la 12 septembrie 2023

METODE UTILIZATE ÎN CONTROLUL POLUĂRII APELOR ŞI AERULUI. STUDII DE CAZ

Mirela-Lucia ARDELEAN[1], Raul-Cornel ŞTEFAN-PANTIŞ[2]

[1]Colegiul Național „Onisifor Ghibu”, profesor chimie, Oradea, România, onisifor_ghibu@yahoo.com
[2]Universitatea Babeş-Bolyai Cluj-Napoca, Facultatea de Chimie şi Inginerie Chimică, student specializarea CISOPC anul IV, raulstefan@yahoo.com

Rezumat: *În ultimele decenii, omenirea a devenit din ce în ce mai conștientă cu privire la modificările aduse mediului în urma poluării, s-au demarat numeroase acțiuni și s-au elaborat o multitudine de studii în acest sens, dar problema rămâne în continuare una de maximă importanță. În această lucrare se vor explora câteva surse de poluare, evidențiind impactul asupra sănătății oamenilor, câteva tehnici actuale de depoluare și metodele aferente de cuantificare ale poluanților.*

Cuvinte cheie: poluare, metale grele, dioxid de carbon, depoluare, alge, chitosan, silice, materiale compozite, absorbție, amine.

INTRODUCERE

Poluarea a devenit o problemă larg răspândită în zilele noastre, fie că este vorba despre poluarea cu plastic a oceanelor sau creşterea concentrației de dioxid de carbon în atmosferă, ambele situații sunt exemple semnificative ale poluării și ne arată cât de nefaste sunt consecințele modificărilor aduse de oameni naturii. Interdependența lumii vii face ca impactul poluării asupra ecosistemelor să fie foarte greu de prezis, o schimbare infinitezimal de mică poate provoca haos, fenomen ce poartă numele de efect fluture.

Conceptul de poluare este introdus odată cu apariția primelor fabrici în urma revoluției industriale (sfârșitul secolului al XVIII-lea) și se referă la prezența în mediu a unei substanțe sau amestecuri de substanțe ce manifestă efecte nocive asupra sănătății organismelor expuse, ducând la o degradare treptată sau bruscă a ecosistemului. La început, marile companii deversau direct în mediu reziduurile generate în urma proceselor industriale, urmând ca abia prin anii 1930 să se constate nevoia de epurare a fluxurilor de ape reziduale și de stocarea în condiții de siguranță a reziduurilor periculoase. Răspunsul companiilor la problema pusă de poluarea din ce în ce mai avansată a fost unul lent, motivul principal pentru care se întârzia cât mai mult posibil implementarea de strategii de depoluare este unul strict de natură economică. Mai târziu s-a realizat că o soluție practică pentru depoluare este captarea și reutilizarea deșeurilor sau transformarea lor în materii prime și produse finite pentru a putea fi valorificate, constituind astfel o sursă de venit suplimentar [1].

În scopul acestei lucrări s-au exemplificat două categorii de agenți poluanți, pentru mediul acvatic s-a ales poluarea cu metale grele, iar pentru aer a fost ales cel mai comun agent poluant, dioxidul de carbon. Pentru fiecare dintre cele două tipuri de poluare s-au evidențiat efectele asupra sănătății oamenilor, metode de cuantificare ale poluantului și metode de captare ale agentului poluant.

POLUAREA MEDIULUI ACVATIC CU METALE GRELE

Principalele cauze ale poluării apelor sunt urbanizarea crescândă și industrializarea, întrucât metalele și aliajele lor își găsesc o multitudine de aplicații în ambele cazuri, de la materiale de construcție la catalizatori folosiți în industrie. Impactul asupra mediului depinde de concentrația ionilor metalici în ape, de natura lor chimică, de rolul lor biologic și de perioada din viața în care au fost expuse viețuitoarele la poluare. Chiar și în concentrații mici, unii compuși ai metalelor tind să fie extrem de periculoși, deoarece au tendința de a se bioacumula în țesuturile adipoase ale viețuitoarelor (metilmercur), astfel putând urca spre vârful lanțului trofic, constituind un real pericol pentru oameni [2].

Efectele pe care metalele grele le pot avea asupra organismului uman sunt diverse, în funcție de natura elementului, dar în general interacționează cu materialul genetic și cu proteinele nucleare, cauzând modificări ale structurii ADN-ului, ce duc la apoptoză (moarte celulară) sau carcinogeneză.

Aceste interacțiuni pot fi directe sau indirecte, prin intermediul radicalilor liberi generați de metale prin reacții Fenton. Unele metale, precum Cadmiu și Nichel, inhibă mecanismele naturale de reparare ale ADN-ului, ducând la sciziune și depurinare [2]. Alte metale grele (Pb, Hg) produc degradări ale sistemului nervos central, având efecte neurotoxice. Boala dezvoltată în urma expunerii repetate la ioni de plumb se numește saturnism.

Modul de lucru

Cele mai comune modalități de cuantificare ale metale grele sunt cele bazate pe metode spectrale, fie spectrometrie de absorbție atomică, fie de emisie atomică. Aceste metode analitice s-au consacrat prin precizia, exactitatea și rapiditatea de care dau dovadă, însă au și unele dezavantaje, precum: pregătirea probelor este laborioasă, necesitând numeroase etape de prelucrare, costul aparaturii este ridicat, iar nivelul de pregătire al personalului care efectuează analiza trebuie să fie unul avansat. În ultimele două decenii, s-au dezvoltat noi metode analitice importante, ce folosesc senzori moleculari (chemosenzori), ce au capacitatea de a-și modifica o proprietate fizică măsurabilă în urma interacțiunii cu ionul metalic. Cei mai comuni chemosenzori se bazează pe modificarea proprietăților optice, fie modificarea culorii, în cazul chemosenzorilor colorimetrici, fie pe apariția emisiei de fluorescență, în cazul chemosenzorilor fluorimetrici. Analiza propriu-zisă necesită aparatură simplă, fie un fluorimetru sau un spectrofotometru, timpul de lucru fiind mult redus datorită faptului că probele nu necesită prelucrare adițională, iar un alt avantaj îl constituie posibilitatea realizării determinării direct pe teren [3].

Metodele de depoluare actuale includ: bioremedierea apelor contaminate cu ajutorul algelor [4] și adsorbția pe materiale compozite biomimetice de tipul SiO_2@chitosan [5].

Rezultate şi discuţii

În vederea bioremedierii apelor contaminate cu ajutorul algelor s-a determinat toleranța la condițiile experimentale atât pentru C. vulgaris, cât și pentru s. spinosus, folosind citometrie în flux, rezultatele fiind exprimate sub formă de procente. Pentru soluții având concentrația de 0,5 mg/L ioni de cupru, respectiv molibden, s-a reprezentat modificarea eficienței bioabsorbției în timp (fig.1). MTW se referă la ape de mină contaminate cu ioni metalici [4].

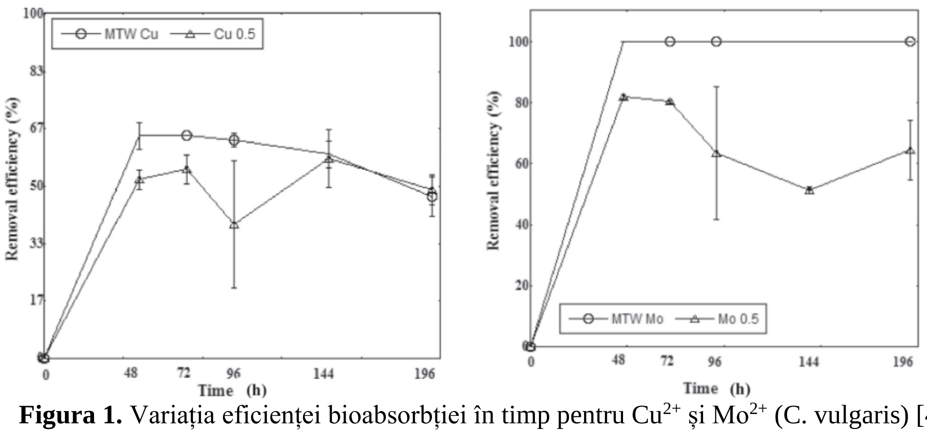


Figura 1. Variația eficienței bioabsorbției în timp pentru Cu^{2+} și Mo^{2+} (C. vulgaris) [4].

Rezultatele testelor arată o toleranță deosebită pentru o plajă largă de valori ale concentrației metalelor grele în cazul speciei C. vulgaris. Apele în care concentrația ionilor de cupru depășește 1 mg/L nu pot fi supuse acestui tratament, deoarece la aceste concentrații viabilitatea culturilor este scăzută, sub 30%.

În cazul adsorbției pe materiale compozite biomimetice de tipul SiO_2@chitosan (fig. 2) s-a constatat că acest tip de material compozit are capacitatea de a adsorbi ioni metalici chiar și din soluții foarte diluate și sunt alcătuiți dintr-o matriță de oxid de siliciu acoperită cu nanoparticule de chitosan, ce prezintă un număr mare de grupări funcționale (hidroxil și amino) ce constituie situsuri active care interacționează cu ionii metalici, cauzând adsorbția lor. Structura specială a silicei conferă o suprafață specifică mult crescută și previne aglomerarea chitosanului, ulterior pierderea sa, înlesnind fenomenul de adsorbție. Capacitatea de adsorbție pentru Hg(II) și As(V) este de aproximativ 200 mg/g material compozit. Adsorbantul are capacitatea de a elimina din soluție 60% din ionii metalici menționați anterior în 2 minute [5].

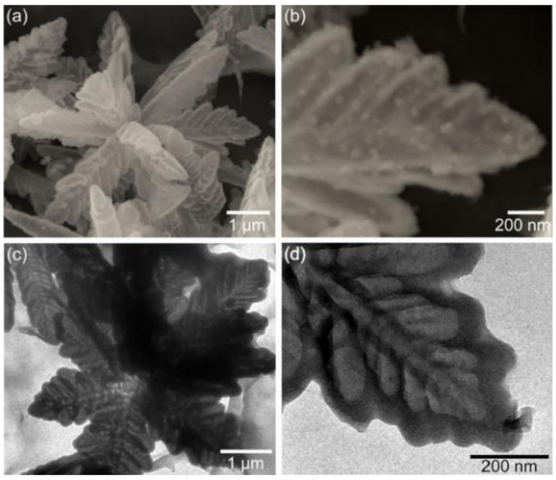


Figura 2. Imagini (a), (b) FESEM și (c), (d) TEM cu particulele de material compozit [5].

POLUAREA AERULUI CU DIOXID DE CARBON

Probabil cel mai răspândit tip de poluare cu efectele cele mai resimțite și de cea mai lungă durată, poluarea atmosferei cu dioxid de carbon reprezintă o problemă globală ce atrage un interes crescând pe măsură ce frecvența apariției fenomenelor meteorologice extreme se mărește. Principala sursă de emisii de carbon este activitatea umană, în 2019 omenirea a eliberat în atmosferă 43,1 miliarde de tone de CO_2, iar tendința este una crescătoare [6].

În concentrații mici, dioxidul de carbon nu este periculos pentru oameni, fiind un produs al metabolismului. La concentrații crescute, în jur de 4% în aerul inspirat, provoacă amețeli, senzație de respirație îngreunată, iar urcând spre 8% produce pierderea cunoștinței și poate duce la moarte, în funcție de timpul expunerii și de starea fizică a persoanei. Poluarea cu CO_2 afectează în mod indirect sănătatea populației, prin alterarea condițiilor de mediu.

Pentru a reduce concentrația dioxidului de carbon în atmosferă este necesară dezvoltarea unui sistem capabil să proceseze debite enorme de aer, din care să absoarbă selectiv dioxidul de carbon într-un mod cât mai eficient. În vederea rezolvării acestei probleme, trebuie găsită o soluție care să fie în același timp atât economic viabilă, cât și prietenoasă cu mediul. Factorul economic este, din păcate, singura variabilă de decizie, astfel că procesele care nu sunt avantajoase din punct de vedere economic vor avea șanse de aplicare mult reduse. În final, problema care trebuie rezolvată devine transformarea dioxidului de carbon capturat într-un produs care să genereze profit.

Modul de lucru

Măsurarea concentrației de CO_2 poate fi realizată utilizând metode chimice sau fizice, cel mai larg întrebuințate fiind metodele bazate pe fenomene fizice. În acest scop s-au elaborat o multitudine de senzori, dintre care se menționează: senzorul infraroșu nondispersiv (NDIR), senzorul fotoacustic și senzorul chimic. Acești senzori au avantajul realizării rapide a măsurătorii, fiind în același timp sensibili la modificări mici ale concentrației dioxidului de carbon. Metodele chimice implică o procedură de lucru laborioasă, iar valorile obținute pot diferi în funcție de pregătirea persoanei care realizează analiza, acest lucru fiind indezirabil.

Cele mai des utilizate procedee pentru captarea CO_2 din aer implică utilizarea soluțiilor alcaline de amine organice sau de baze anorganice.

Rezultate şi discuţii

Absorbția se realizează atât fizic, cât și chimic, dioxidul de carbon având caracter slab acid. Aminele organice reacționează cu dioxidul de carbon formând carbonați și bicarbonați de alchil amoniu, putând fi regenerate ulterior prin simpla încălzire (fig. 3).

În timp, aminele folosite în cadrul procesului suferă degradări (oxidare, condensare), ce duc la scăderea eficienței absorbției. Reziduul generat de proces trebuie stocat sau distrus, deoarece impactul acestor substanțe asupra sănătății oamenilor este necunoscut, iar poluarea cu reziduuri nu este de dorit; se estimează că o instalație cu o capacitate de captare de 1 milion de tone de CO_2 anual ar genera între 300 și 3000 de tone de reziduu aminic anual [7].

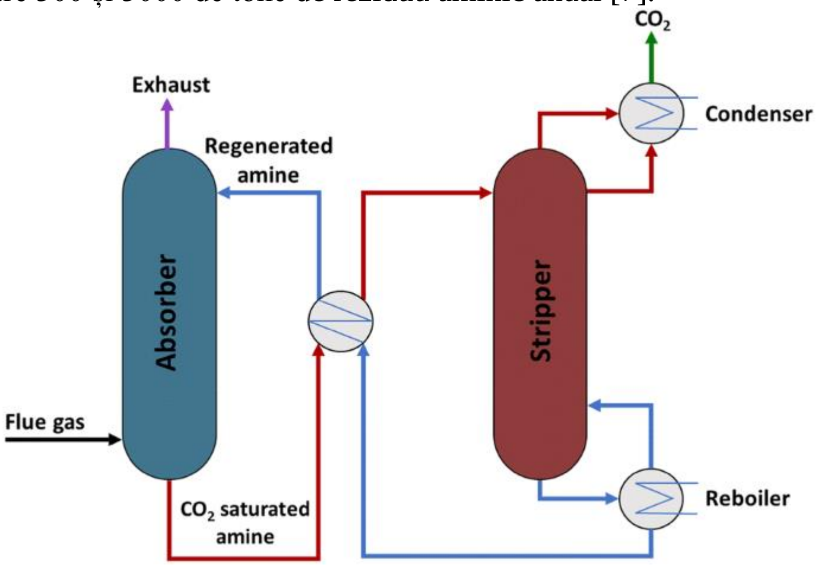


Figura 3. Reprezentare schematică simplificată a procesului de absorbție-desorbție a CO_2 [8].

CONCLUZII

În concluzie, menținerea calității mediului ar trebui să reprezinte o prioritate atât pentru marile corporații, cât și pentru populație. Lăsată nerezolvată, problema poluării va duce la o degradare accelerată a condițiilor de viață a tuturor viețuitoarelor, având ca rezultat final un posibil fenomen de extincție pentru speciile care se adaptează mai greu condițiilor mereu în schimbare. Lipsa de discernământ în utilizarea resurselor naturale a generat o situație fără precedent și din care nu vom reuși să ieșim fără a implementa schimbări majore în stilul nostru de viață. Trebuie să ținem cont că poluarea atmosferică nu este o chestiune locală și imediată, nivelul de dioxid de carbon din atmosferă nu a crescut peste noapte și nici nu va scădea brusc, astfel se poate spune că aceasta este moștenirea pe care o vom lăsa generațiilor viitoare. Prevenirea poluării este mult mai ușor de realizat decât remedierea efectelor sale prin reconstruirea artificială a ecosistemelor distruse de către efectele ei.

BIBLIOGRAFIE

[1] Nemerow, N. L. (2007). Industrial environmental history, Editura Butterworth-Heinemann.
[2] Briffa, J., Sinagra, E., Blundell, R. (2020). Heavy metal pollution in the environment and their toxicological effects on humans, Heliyon, Vol.6, pp. 1-26
[3] Shivamallu, S.P., Prasad, C., Veerapur, S.K., Patil, R., Cull, S.S., Coetzee, C.A., Amachawadi, J.F. (2021). Recent Advances on the Development of Chemosensors for the Detection of Mercury Toxicity: A Review, Separations, Vol.8, pp. 1-16.
[4] Urrutiaa, C., Yañez-Mansillac, E., Jeisond, D., (2019). Bioremoval of heavy metals from metal mine tailings water using microalgae biomass, Algal Research, Vol.43, pp. 1-9.
[5] Liu, J., Chen, Y. et all. (2019). A biomimetic SiO_2@chitosan composite as highly-efficient adsorbent for removing heavy metal ions in drinking water, Chemosphere, Vol. 214, pp. 738-742.
[6] https://www.theworldcounts.com/challenges/climate-change/global-warming/global-co2-emissions
[7] Gelles, T., Lawson, S., Rownaghi, A. A.et all. (2020). Recent advances in development of amine functionalized adsorbents for CO_2 capture, Adsorption, Vol.26, pp. 5–50.
[8] Veawab, A. (2006). Corrosion in CO_2 capture unit for coal-fired power plant flue gas, Greenhouse Gas Control Technooogies, Vol. 2, pp.1595-1598.

OPTIMIZAREA VITEZEI UNEI REACŢII DE ORDINUL DOI

Camelia Daniela ŢICĂRAT (IONAŞ)[1], Oana STĂNĂŞEL[2]

[2]studentă master Chimie structurală şi aplicativă, Universitatea din Oradea, Facultatea de Informatică şi Ştiinţe, ticaratdaniela@yahoo.com
[3]profesor coordonator, Universitatea din Oradea, Facultatea de Informatică şi Ştiinţe, Departamentul de Chimie

Rezumat: *În prezenta lucrare s-a luat în studiu hidroliza alcalină a acetatului de etil. Aplicând metoda conductometrică s-a determinat timpul de înjumătăţire al reacţiei, pornind de la diferite concentraţii de reactant şi urmărind reacţia la temperaturi diferite. S-au stabilit condiţiile optime de lucru pentru parametrii studiaţi.*
Cuvinte cheie: hidroliza alcalină, timpul de înjumătăţire, metoda conductometrică.

INTRODUCERE

Hidroliza esterilor se poate desfăşura în mediu acid sau în mediu bazic. Hidroliza acidă corespunde unei cinetici de pseudo-ordin 1 în raport cu esterul. Hidroliza alcalină a esterilor se încadrează la reacţiile ireversibile de ordinul 2 şi de ordine parţiale unitare în raport cu cei doi reactanţi. S-a luat în studiu reacţia de hidroliză a acetatului de etil cu hidroxid de sodiu. Procesul nu corespunde unei catalize în sensul strict al cuvântului, deoarece ionii hidroxil sunt consumaţi în reacţie. Echilibrul este total deplasat spre dreapta datorită stabilităţii ionului carboxilat rezultat:

$$H_3CCOOC_2H_5 + HO^- \rightarrow H_3CCOO^- + C_2H_5OH$$

Expresia vitezei unei reacţii de ordinul 2 este:

$$v = -\frac{dc_R}{dt} = kc_{R1}c_{R2} \qquad (1)$$

în care:

c_{R1}, c_{R2} – concentraţiile reactanţilor R_1 şi R_2 la un timp t;
k – constanta de viteză;
v - viteza de reacţie.

Dacă se lucrează pornind de la concentraţii iniţiale egale ale reactanţilor, relaţia (1) ia forma:

$$v = -\frac{dc_R}{dt} = kc_R^2 \qquad (2)$$

Legea vitezei pentru o reacţie de ordinul 2, în care se porneşte de la concentraţii iniţiale egale de reactant este:

$$\frac{1}{c_R} = \frac{1}{c_{0R}} + kt \qquad (3)$$

în care: c_{0R} – concentraţia reactantului (ester sau hidroxid) la momentul iniţial, t = 0.
c_R – concentraţia reactantului la timpul t.

Pe baza legii vitezei (3) se poate determina timpul de înjumătăţire, $t_{1/2}$, care corespunde timpului necesar pentru ca, concentraţia reactantului să devină jumătate din cea iniţială. Ca urmare, un timp de înjumătăţire redus indică o viteză de reacţie mai mare.

MODUL DE LUCRU

Se prepară, în baloane cotate, soluţii de hidroxid de sodiu, respectiv de acetat de etil de concentraţii egale: 0,015M, 0,03M şi 0,06M.

În pahare Berzelius de 100 ml se amestecă volume egale din soluţiile de aceeaşi concentraţie de hidroxid de sodiu şi de acetat de etil. Momentul amestecării corespunde momentului iniţial, faţă de care se fac determinările. Pentru fiecare din aceste soluţii se urmăreşte măsurarea conductanţei timp de 20 de minute. În reacţia de hidroliză alcalină are loc un schimb între ioni de mobilităţi diferite şi anume ionii hidroxil mai mobili sunt înlocuiţi de ionii acetat mai puţin mobili, având loc modificarea conductanţei amestecului reactant.

Se notează pentru fiecare set de determinări valoarea conductanţei la un timp t, notată G_t. Se efectuează măsurători pentru amestecul de reacţie menţinut la temperatura de 20°C, 24°C, respectiv 28°C.

Pentru a determina conductanţa finală, G_f, se pregăteşte un amestec identic cu cel iniţial, care se introduce într-un pahar Erlenmeyer cu dop rodat, care, pentru desăvârşirea reacţiei se menţine în baia de apă termostatată la 60°C, timp de 30 minute. Se scoate apoi paharul cu probă din baia de apă, se răceşte la temperatura la care s-au efectuat determinările experimentale şi se citeşte la conductometru conductanţa finală. Pentru toate probele se procedează la fel.

REZULTATE ŞI DISCUŢII

Datele experimentale se prelucrează în vederea obţinerii timpului de înjumătăţire. Rezultatele măsurătorilor conductanţelor pentru amestecurile reactante de diferite concentraţii la temperaturi diferite, timp de 20 de minute, sunt prezentate în tabelul 1.

Tabelul 1. Rezultate experimentale.

t, [min]	G_t [mS]								
	$c_{NaOH} = c_{ester}$ = 0,015M			$c_{NaOH} = c_{ester}$ = 0,03M			$c_{NaOH} = c_{ester}$ = 0,06M		
	t=20°C	t=24°C	t=28°C	t=20°C	t=24°C	t=28°C	t=20°C	t=24°C	t=28°C
1	2.50	2.40	2.20	4.20	4.00	3.82	7.4	6.95	6.45
2	2.37	2.22	2.02	4.03	3.82	3.53	6.84	6.38	5.92
3	2.29	2.08	1.98	3.86	3.64	3.35	6.32	5.83	5.49
4	2.23	2.01	1.81	3.74	3.40	3.15	6.03	5.47	5.12
5	2.17	1.98	1.74	3.6	3.28	3.01	5.75	5.12	4.89
6	2.14	1.90	1.65	3.46	3.15	2.92	5.40	4.85	4.59
7	2.09	1.80	1.56	3.39	3.05	2.84	5.29	4.52	4.29
8	2.05	1.77	1.48	3.27	2.92	2.76	5.17	4.22	4.15
10	1.98	1.68	1.40	3.17	2.83	2.70	5.08	4.02	3.95
12	1.93	1.63	1.35	3.01	2.78	2.66	5.01	3.89	3.75
14	1.88	1.59	1.29	3.03	2.75	2.62	4.96	3.75	3.48
17	1.81	1.56	1.26	2.93	2.72	2.58	4.88	3.66	3.38
20	1.77	1.55	1.24	2.89	2.70	2.55	4.82	3.60	3.32
final	1.34	1.30	1.12	1.90	1.68	1.52	3.10	2.80	2.45

Dependenţa de conductanţă a concentraţiei hidroxidului de sodiu din amestecul reactant este redată de relaţia:

$$c_R = K(G_t - G_f) \quad (4)$$

în care:

c_R – concentraţia (HO^-) la momentul t al hidrolizei;
K – constantă de proporţionalitate;
G_0 – conductanţa amestecului reactant în momentul iniţial;
G_f – conductanţa amestecului corespunzătoare hidrolizei totale a esterului;
G_t – conductanţa amestecului la timpul t.

($G_0 - G_f$) rezultă prin extrapolarea la t = 0 a curbei cinetice $G_t - G_f = f(t)$, care redă variaţia în timp a concentraţiei (HO^-). Din aceeaşi curbă se determină timpul de înjumătăţire $t_{1/2}$, care reprezintă abscisa punctului de ordonată ($G_0 - G_f$)/ 2. Ilustrarea grafică a obţinerii timpilor de înjumătăţire este prezentată în figurile 1-3 pentru soluţiile de concentraţii iniţiale 0,015 M, în figurile 4-5 pentru soluţiile de concentraţii iniţiale 0,03M, respectiv în figurile 6-9 pentru amestecurile de concentraţii iniţiale 0,06M.

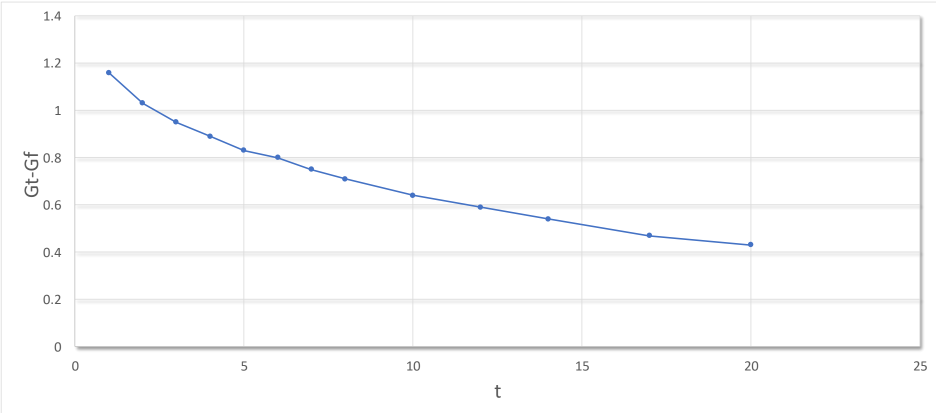


Figura 1. Variaţia concentraţiei reactantului în timp, c_{0R} = 0,015M, t = 20°C.

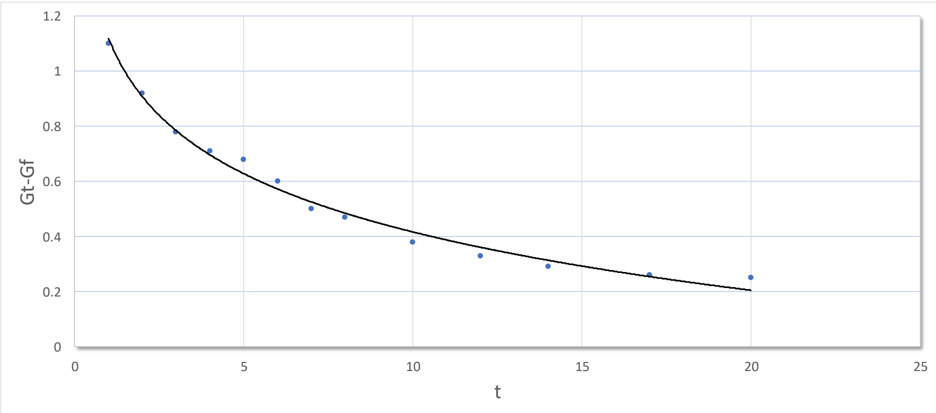


Figura 2. Variaţia concentraţiei reactantului în timp, c_{0R} = 0,015M, t = 24°C.

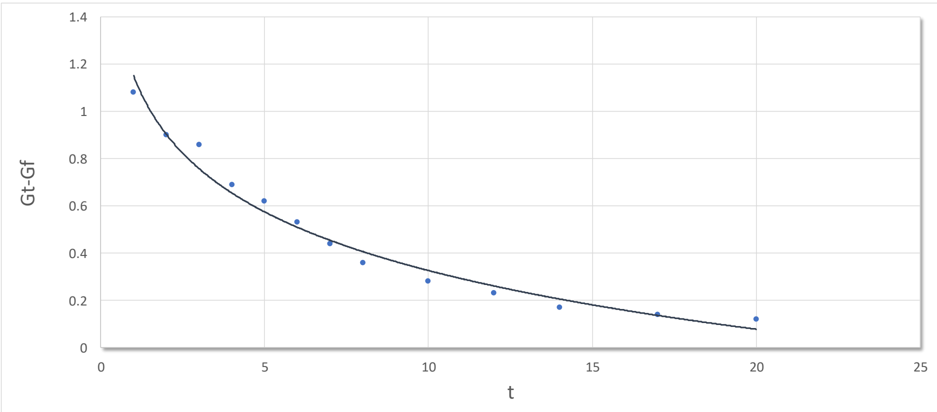


Figura 3. Variaţia concentraţiei reactantului în timp, c_{0R} = 0,015M, t = 28°C.

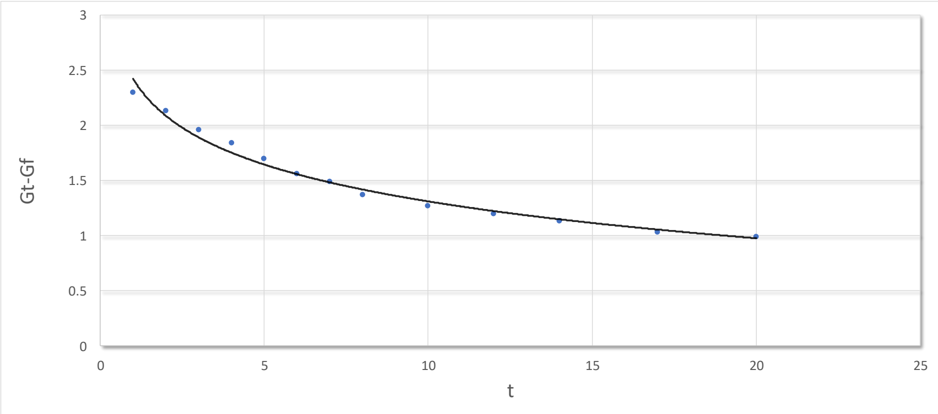


Figura 4. Variaţia concentraţiei reactantului în timp, c_{0R} = 0,03M, t = 20ºC.

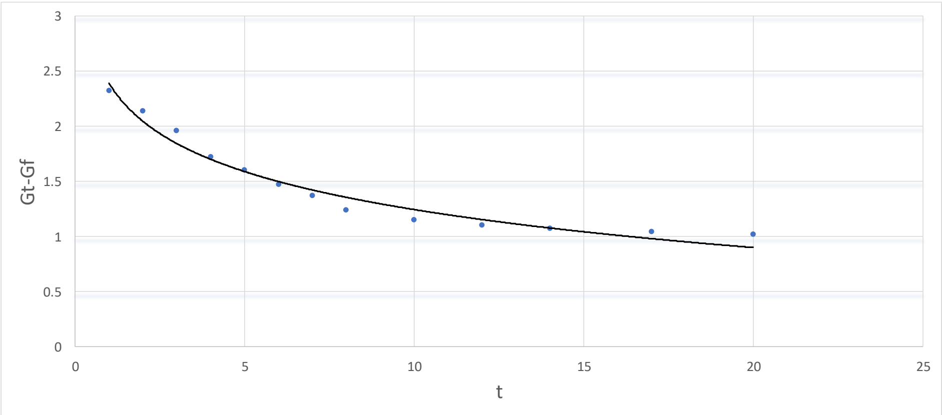


Figura 5. Variaţia concentraţiei reactantului în timp, c_{0R} = 0,03M, t = 24ºC.

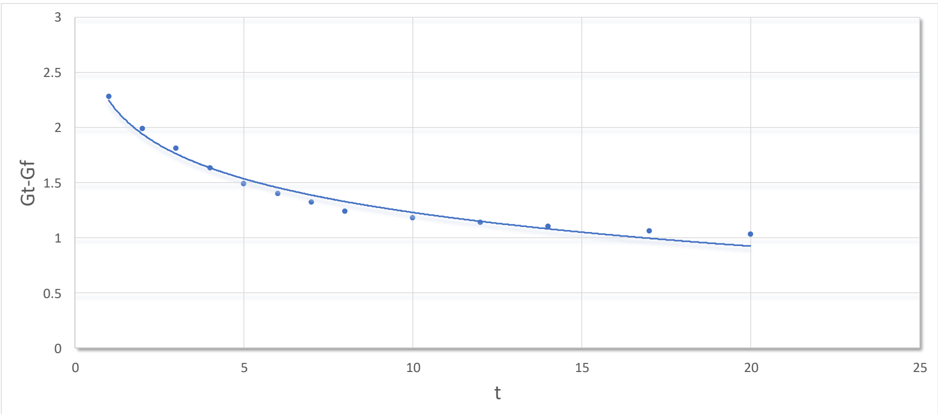


Figura 6. Variaţia concentraţiei reactantului în timp, c_{0R} = 0,03M, t = 28ºC.

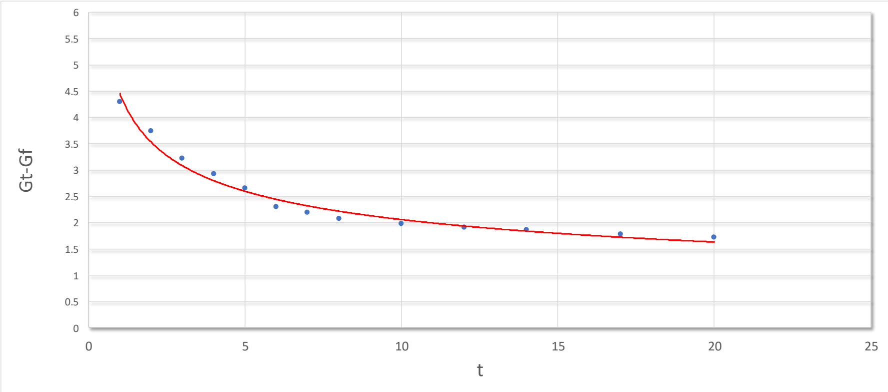


Figura 7. Variaţia concentraţiei reactantului în timp, c_{0R} = 0,06M, t = 20ºC.

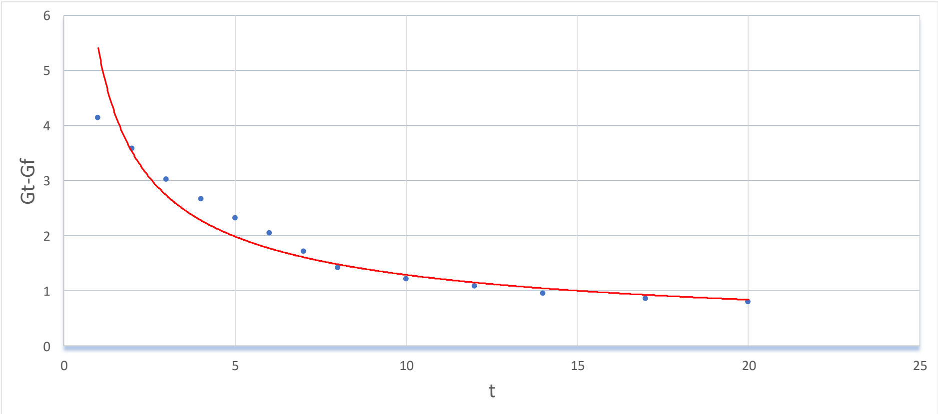


Figura 8. Variaţia concentraţiei reactantului în timp, c_{0R} = 0,06M, t = 24ºC.

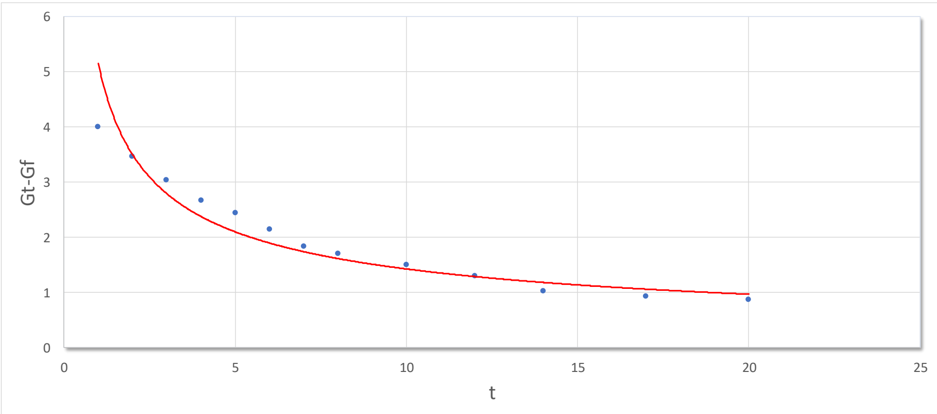
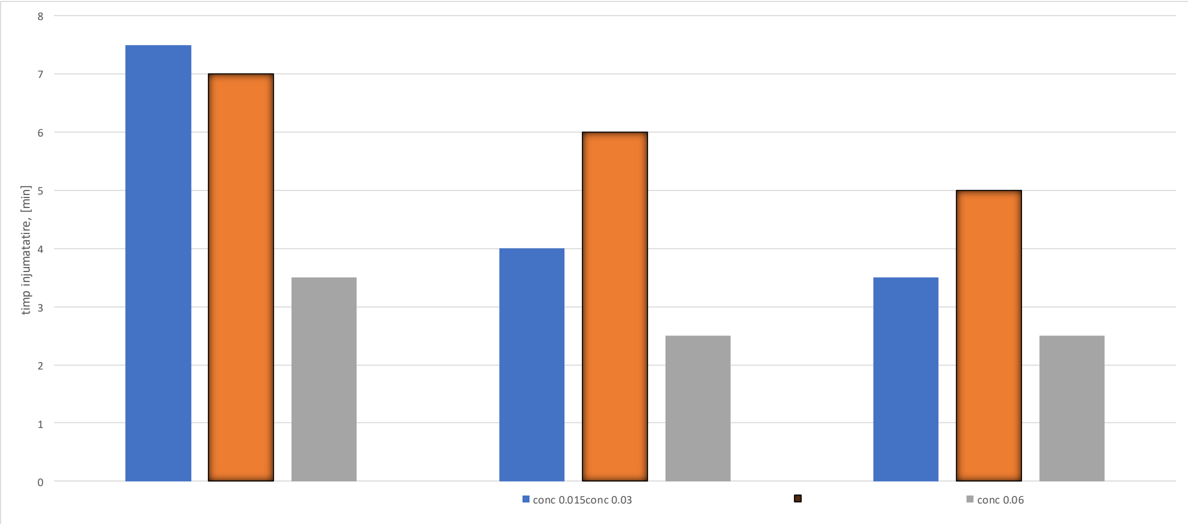


Figura 9. Variaţia concentraţiei reactantului în timp, c_{0R} = 0,06M, t = 28ºC.

Reunind rezultatele timpilor de înjumătăţire calculaţi pe cale grafică se poate observa (figura 10) că valorile scad odată cu creşterea temperaturii de hidroliză pentru amestecurile de reacţie din cele trei concentraţii iniţiale diferite. Acest lucru indică o creştere a vitezei de reacţie în acelaşi sens.



a) b) c)

Figura 10. Valorile timpilor de înjumătăţire pentru reacţiile de hidroliză luate în studiu la temperaturile: a) 20ºC; b) 24ºC şi c) 28ºC.

CONCLUZII

În practică e importantă cunoaşterea vitezei de desfăşurare a unei reacţii. În lucrare s-a luat în studiu reacţia de hidroliză alcalină a acetatului de etil, lucrându-se cu concentraţii diferite de reactanţi, la temperaturi diferite, cinetica reacţiilor urmărindu-se conductometric.

Dacă se menţine hidroliza la o temperatură de 20ºC s-a constatat experimental că viteza de reacţie creşte odată cu creşterea concentraţiilor iniţiale de reactanţi. La o concentraţie iniţială de 0,06M se înregistrează valorile cele mai mici pentru timpii de înjumătăţire la toate temperaturile de lucru, ceea ce denotă faptul că viteza de hidroliză creşte cu concentraţia. Pornind de la o anumită concentraţie iniţială a reactanţilor se observă o creştere a vitezei de reacţie cu temperatura, cea mai accentuată modificare înregistrându-se la concentraţia iniţială cea mai mică, însă pentru concentraţia iniţială cea mai ridicată valoarea timpului de înjumătăţire este cea mai redusă, respectiv viteza de hidroliză cea mai mare.

Studiul hidrolizei se poate extinde şi pentru alţi esteri, urmărind comparativ dacă se respectă aceleaşi reguli observate în cazul acetatului de etil.

BIBLIOGRAFIE

[1] Buliga, E., Unc, R. (1996). Chimie analitică şi analiză instrumentală, Lucrări practice, Editura Universității Politehnica din Timişoara

[2] Murgulescu, I.G., Segal, E., Onescu,T. (1981). Introducere în chimie fizică. Cinetică și cataliză, Vol.2, Editura Academiei București

[3] Stănăşel, O. (2003): Chimie fizică- cinetică chimică, Editura Universității din Oradea

[4] Turanyi, T., Tomli, A.S. (2014). Analysis of Kinetic Reactions Mechanisms, Springer Edition.

CHIMIA CASCADEI VADU CRIȘULUI

Ancuța DULUȘ

profesor Colegiul Național ”Onisifor Ghibu”, Oradea, p_a_anca@yahoo.com

Rezumat: *Cascada de la Vadu Crișului este cea mai cunoscută dintre cascadele* Pădurii Craiului. *Accesul la cascadă se face pe jos din localitățile Vadu Crișului (1,9 km, traseu punct roşu dublu) sau Şuncuiuş (2,6 km, traseu punct roşu dublu); sau cu trenul pe ruta Oradea – Cluj, stația Halta Peștera. Evaluarea stării ecologice și stării chimice a corpurilor de apă naturale monitorizate, cu detaliere pe fiecare corp de apă a fost efectuată de Administrația Bazinală de Apă Crișuri, secțiunea av. Şuncuiuş – Vadu Crişului, anul 2022.*

Cuvinte cheie: evaluarea stării ecologice, apă de suprafaţă

”Ne mai rămâne datoria de a respecta aceste meleaguri la orice pas, să le păstrăm curate și intacte pentru generațiile care vin și pentru noi cei de acum pentru că în Natură „Turistul vine să-și bucure ochii; gânditorul găsește o carte imensă unde fiecare stânca este o scrisoare, unde fiecare lac este o frază, unde fiecare sat este un accent și de unde iese un fum de amintiri de mii de ani vechime”. (Victor Hugo)

INTRODUCERE

Cea mai cunoscută și fotografiată dintre cascadele Pădurii Craiului, cascada de la Vadu Crișului poate fi văzută și de la ferestrele trenurilor care străbat defileul Crișului Repede. Puțini știu însă că această cădere de apă este de fapt una artificială. În trecut, apele care ies din peștera de la Vadu Crișului se vărsau în râu după ce coborau panta, destul de lină, aflată în partea dreaptă a ieșirii din subteran.

Probabil, în primii ani ai secolului XX, odată cu lucrările de amenajare a peșterii și cu construcția cabanei, cursul pârâului a fost deviat spre faleza înaltă de 10 metri. În perioadele mai secetoase, cea mai spectaculoasă și cea mai cunoscută cascadă din munții Pădurea Craiului, cascada de la Vadu Crișului, își ascunde șuvoiul înspumat în spatele unui baldachin natural de calcar.

La baza cascadei se află un bazin natural, săpat de ape în stâncă. Cel mai plăcut mod de a descoperi acest obiectiv turistic e ca, într-o zi de vară, să cobori la baza falezei, să asculți vuietul apei și să-i simți răcoarea.

Cascada este un punct obligatoriu de oprire pentru turele de rafting organizate de operatorii din zonă, locul fiind ideal pentru o bălăceală în toată regula.

Șase dintre traseele de drumeție din destinația Pădurea Craiului pornesc sau au printre obiectivele lor cascada Vadu Crișului:

Cabana Peștera Vadu Crișului – Peștera Bătrânului (bandă albastră), Circuitul galben al Defileului Crișului Repede (punct galben), Circuitul versantului drept al Defileului Crișului Repede (punct albastru), Circuitul versantului stâng al Defileului Crișului Repede (punct roșu), Cabana Peștera Vadu Crișului – Valea Mișidului – Peștera Moanei (triunghi albastru), Cabana Peștera Vadu Crișului – Șuncuiuș (triunghi roșu).

Accesul

Cu mașina:

Pe ruta Oradea – Cluj (E60)

Topa de Criș – Vadu Crișului

Pe ruta Oradea – Deva (E 79)

Beiuș – Delani – Petreasa – Remetea – Căbești – Roșia – Damiș – Bratca – Bălnaca – Șuncuiuș – Vadu Crișului

Atenție! Accesul auto la cascada Vadu Crișului nu este posibil.

Cu trenul:

Pe ruta Cluj – Oradea, prin stația Halta Peștera

Pe jos:
Accesul la cascada Vadu Crișului se face pe jos din localitățile Vadu Crișului (1,9 km, traseu punct roșu dublu) sau Șuncuiuș (2,6 km, traseu punct roșu dublu).

Evaluarea stării ecologice

Evaluarea stării ecologice și stării chimice a corpurilor de apă naturale monitorizate, cu detaliere pe fiecare corp de apă a fost efectuată de Administrația Bazinală de Apă Crișuri, secțiunea av. Șuncuiuș – Vadu Crișului, anul 2022:

Crișul Repede – Def.Crișul Repede – cnf. Iad – av. Def.Crișul Repede + Afluent are o lungime de 27.728 km și se încadrează în tipologia RO01. Secțiunea av. Suncuiuș a fost monitorizată după programele S, P. După elementele biologice se încadrează în stare moderată (și anume după indicatorul fitobentos), după elementele fizico – chimice se încadrează în stare bună, iar după poluanți specifici se încadrează în stare foarte bună. Starea ecologică este moderată datorită indicatorului fitobentos. Evaluarea stării chimice s-a efectuat pe baza datelor de monitorizare obţinute pentru substanţele prioritare/prioritar periculoase identificate în corpul de apă, în mediul de investigare apă. Corpul de apă se încadrează în stare chimică bună. Prin excluderea substanţelor PBT omniprezente, starea chimică a corpului de apă este bună.

EVALUARE STARE CHIMICĂ (2022)
DATE IDENTIFICARE:
ABA: ABAC (Administrația Bazinală de Apă Crișuri)
BAZIN HIDROGRAFIC: Crișuri
CURS DE APĂ: Crișul Repede
COD CA: RORW3-1-44_B3
CORP DE APĂ: Crișul Repede--Def.Crișul Repede - cnf. Iad - av. Def.Crișul Repede + Afluent
SISTEM DE MONITORIZARE: Râu
CARACTER CA: N
TIPOLOGIE: RO01
LUNGIME (KM): 27.728
ORDINE: 3
SECȚIUNI EVALUARE: av. Șuncuiuș
EVALUARE FINALA: moderată
ELEMENTE BIOLOGICE: moderată
FITOPLANCTON: -
FITOBENTOS: moderată
MACRONEVERTEBRATE: foarte bună
IHTIOFAUNA: -
MACROFITE, MACROALGE: foarte bună
ELEMENTE SUPORT: bună
FIZICO-CHIMICE GENERALE: bună
CONDITII TERMICE: foarte bună
Temperatura apei (°C): foarte bună
CONDITII DE OXIGENARE: bună
CBO_5 (mgO_2/l): bună
CCO-Cr (mgO_2/l): -
Oxigen dizolvat (concentratie) (mgO_2/l): bună
CONDIȚII DE SALINITATE: bună
Conductivitate (µS/cm): bună
STAREA ACIDIFIERII: foarte bună
pH (unit pH): foarte bună
NUTRIENTI: bună
N total (mg/l N): foarte bună
$N\text{-}NH_4$ (mg/l N): foarte bună
$N\text{-}NO_2$ (mg/l N): bună

$N\text{-}NO_3$ (mg/l N): bună
P total (mg/l P): foarte bună
$P\text{-}PO_4$ (mg/l P): foarte bună
POLUANTI SPECIFICI: foarte bună
ALTI POLUANȚI SPECIFICI: foarte bună
Cianuri totale (µg/l): foarte bună
Detergenți anionactivi (µg/l): foarte bună
Fenoli totali (indice fenolic) (µg/l): foarte bună
POLUANȚI SPECIFICI - METALE: foarte bună
Arsen dizolvat (µg/l): foarte bună
Crom dizolvat (Cr^{3+} + Cr^{6+}) (µg/l)
Cupru dizolvat (µg/l): foarte bună
Zinc dizolvat (µg/l): foarte bună
POLUANȚI SPECIFICI - MICROPOLUANȚI ORGANICI: foarte bună
Acenaften (µg/l): foarte bună
PCB-uri (suma de 7) (µg/l): foarte bună
Toluen (µg/l): foarte bună
Xileni (suma) (µg/l): foarte bună

Bibliografie

[1]Monografia ilustrată a județului Bihor – coordonator director MȚC Aurel Chiriac, colaboratori dr. Dumitru Sim și dr. Lia Dumiter, Editura Duran′s, 2018
[2]https://padureacraiului.ro/obiective/cascada-vadu-crisului/
[3]https://www.bihorinimagini.ro/de-vizitat/obiective-naturale/cascada-de-la-vadu-crisului/
[4]https://crisuri.rowater.ro/?page_id=5106

DETERMINAREA CONCENTRAȚIEI CALCIULUI DIN LAPTE SI PRODUSE LACTATE

Cristina CORNEA (BERINDAN)[1], Anda Ioana Grațiela PETREHELE[2], Claudia-Mona MORGOVAN[2]

[1]student anul III, specializarea Chimie, Facultatea de Informatică și Științe
[2]cadru coordonator, şef lucrări dr., Departamentul de Chimie, Facultatea de Informatică și Științe, Universitatea din Oradea

Rezumat: *În această lucrare ne-am propus să determinăm pH-ul, aciditatea și concentrația calciului în lapte și unele produse lactate considerate acide datorită procesului de fermentație controlată care a avut loc la obținerea lor. Produsele lactate selectate de noi au fost: lapte, iaurt, sana, kefir, frișcă, brânză și smântână de gătit. Astfel, au fost analizate un număr de zece probe, constând în lapte și produse lactate de diferite tipuri, ambalate, provenite din comerț. Singura probă care nu provine din comerț este proba de lapte de casă, integral, care provine dintr-o gospodărie țărănească din zona rurală a județului Bihor. Probelor li s-a determinat pH-ul cu hârtia indicatoare de pH și cu ajutorul pH-metrului. În urma analizelor efectuate pentru conținutul de calciu în produsele lactate, se observă că poate varia în funcție de tipul de produs, procesul de producție, marca produsului, regiunea de proveniență a laptelui și alți factori.*

Cuvinte cheie: concentraţie ca, produse lactate, titrarea complexometrică

INTRODUCERE

Calciul este cel mai abundent mineral din organismul nostru, reprezentând până la 2% din masa corporală. Cu toții știm, încă din copilărie, că un consum adecvat de calciu ne ajută să avem oase puternice și sănătoase. Pe lângă acest rol important, calciul mai are și alte funcții în organism, ceea ce face indispensabilă prezența lui zilnică în alimentația noastră.

În lapte există patru tipuri de componente importante: lipide, componente esențiale ale grăsimilor obișnuite (trigliceride); proteine (cazeine, albumine și globuline); glucide, în special lactoza; săruri. În cantități mici, laptele mai conţine lecitine, vitamine, enzime, nucleotide şi gaze dizolvate, printre altele. Laptele este compus din 88% apă, 61% din energie, 3,4% din lipide, 3,2% proteine, 4,7% lactoză și 0,72% minerale [1].

Calciul este un mineral esențial pentru organismul uman, având un rol vital în menținerea sănătății oaselor, a dinților și a sistemului muscular. Dintre sursele alimentare bogate în calciu, produsele lactate dețin o poziție deosebit de importantă, fiind recunoscute pentru conținutul lor crescut de calciu și biodisponibilitatea acestuia [2].

Calciul este cel mai abundent mineral din organismul nostru, reprezentând până la 2% din masa corporală. Cu toții știm, încă din copilărie, că un consum adecvat de calciu ne ajută să avem oase puternice și sănătoase. Pe lângă acest rol important, calciul mai are și alte funcții în organism, ceea ce face indispensabilă prezența lui zilnică în alimentația noastră.

Din cantitatea totală de calciu care se află în organism, 99% este depozitat în oase și restul de 1% se află în sânge, în mușchi și în limfă. Calciul este necesar pentru contracția și vasodilatația vasculară, pentru funcția musculară, pentru semnalizarea intracelulară și secreția hormonală, deși mai puțin de 1% din calciul total din organism este necesar pentru a susține aceste funcții metabolice critice. Calciul seric este foarte bine reglat și nu fluctuează odată cu modificările cauzate de alimentație; organismul folosește țesutul osos ca rezervor și sursă de calciu, pentru a menține concentrații constante de calciu în sânge, mușchi și fluide intercelulare [3].

Iată câteva valori aproximative ale concentrației de calciu în sursele menționate: parmezan (per 100 g): 1184 mg de calciu, lapte (per 100 ml): 120 - 130 mg de calciu, iaurt (per 100 ml):110 - 140 mg de calciu, brânză (variază în funcție de tip): între 600 și 1.000 mg de calciu pe 100 de grame, pește (sardine conservă, per 100 g): 382 mg de calciu, fructe de mare (creveți, per 100 g): 40 mg de calciu, spanac (crud, per 100 g): 99 mg de calciu, varză kale (crudă, per 100 g): 150 mg de calciu, fasole (uscată, fiartă, per 100 g): 80 mg de calciu. portocale (per 100 g): 40 mg de calciu, migdale (prăjite, per 100 g): 264 mg de calciu [4].

O dieta sănătoasă trebuie sa conțină 1200 mg de calciu pe zi. Trei porții de alimente lactate pe zi oferă celor mai multe persoane cantitatea de calciu necesara. El este cel mai bine absorbit de organism in prezența lactozei, zaharul natural al laptelui.

În concluzie, calciul este un mineral esențial pentru sănătatea oaselor, a dinților și a sistemului muscular. Consumul unei diete echilibrate care să includă surse variate de calciu, atât animale, cât și vegetale, reprezintă o abordare importantă pentru menținerea unei sănătăți optime și prevenirea deficiențelor de calciu. Cu toate acestea, este recomandat să consultam un specialist în nutriție sau medicul pentru a primi sfaturi personalizate privind necesarul de calciu și alimentația potrivită pentru propriile nevoi. [5]

PARTEA EXPERIMENTALĂ

În această lucrare ne-am propus să determinăm pH-ul, aciditatea și concentrația calciului în lapte și unele produse lactate considerate acide datorită procesului de fermentație controlată care a avut loc la obținerea lor. Produsele lactate selectate de noi au fost: lapte, iaurt, sana, kefir, frișcă, brânză și smântână de gătit și sunt prezentate în Figura 1.

Figura 1 Produsele lactate alese pentru determinări

1. Determinarea pH-ului și acidității

Inițial s-a încercat determinarea pH-ului cu ajutorul hârtiei indicatoare de pH. Hârtia indicatoare de pH este impregnată cu substanțe chimice care își schimbă culoarea în funcție de valoare pH-ului. Pentru fiecare probă s-a pregătit câte o hârtia indicatoare de pH pe o sticlă de ceas. S-a introdus câte o baghetă în fiecare probă și după aceea s-a trecut peste suprafața hârtiei de pH, astfel încât sa fie bine impregnate zonele de culoare. S-a așteptat un minut să se modifice culoarea, apoi a fost comparată cu scala marcată pe prospectul cutiei și s-a citit valoarea de pH corespunzătoare culorilor obținute. Datele obținute au fost înregistrate în Tabelul 1.

Măsurarea exactă a pH-ului se face cu ajutorul aparatului numit pH-metru, care în esenţă este o pilă electrică a cărei forţă electromotoare depinde de concentrația protonilor (H+) în soluţie. Celula galvanică este alcătuită dintr-un electrod de referinţă (de argint sau calomel) şi un electrod senzor de pH (electrod de sticlă).

$$pH = - lg [H^+]$$

În acest caz s-a utilizat un pH-metru InoLab WTW, iar valorile de pH obținute au fost înregistrate în Tabelul 2. În Fig. 4 se poate observa că determinarea valorii de pH s-a realizat cu o precizie mult mai mare decât în cazul utilizării hârtiei de pH [6-8].

Figura 2 Determinarea valorii pH-ului laptelui cu ajutorul pH-metrului

Aciditatea laptelui poate fi apreciată rapid prin anumite reacţii calitative (proba fierberii, proba cu alcool), iar cantitativ prin metoda titrării (metodă standardizată Standard STAS 6353-75). Aciditatea laptelui se exprimă în grade Thörner (ºT) care reprezintă numărul de mililitri de soluţie hidroxid de sodiu 0,1N necesar pentru neutralizarea a 100 ml de lapte în prezenţa fenolftaleinei ca indicator [7].

Aciditatea produselor lactate se determină în grade Thorner (°T) și reprezintă cantitatea de NaOH 0,1 N consumat de 100 ml de probă de lapte sau produs lactat.

Aciditatea a fost calculată cu formula:

$$Aciditate\ (°T) = \frac{V_{NaOH} \cdot F_{NaOH} \cdot 100}{V_{probă}} \quad (1)$$

Unde

- V_{NaOH} este volumul de NaOH 0,1 N utilizat la titrarea probelor, exprimat în ml;
- F_{NaOH} este factorul soluției de NaOH utilizate la titrare, care în cazul soluției noastre a fost 0,910
- $V_{probă}$ este volumul de probă folosit pentru fiecare produs lactat, exprimat în ml

În cazul determinărilor noastre, calculele de aciditate au fost efectuate cu formula:

$$Aciditate\ (°T) = \frac{V_{NaOH} \cdot 0{,}91 \cdot 100}{10} = 9{,}1 \cdot V_{NaOH} \quad (2)$$

Dacă diferența dintre rezultatele obținute la cele două determinări este mai mare de 5°T, este necesar să se efectueze și o a treia determinare. Între cele două valori ale acidității obținute se va face media aritmetică:

$$Aciditate\ (°T) = \frac{Aciditate_1 + Aciditate_2}{2} \quad (3)$$

În Tabelul 2 și Fig. 6 au fost înregistrate valorile obținute pentru aciditățile tuturor produselor lactate analizate, s-a calculat aciditatea cu ajutorul formulei (2) și apoi s-a aflat valoarea medie a acestora folosind formula (3) [7,8].

Tabelul 1. Valorile pH-ului și acidității pentru probele de lactate studiate

Nr. Crt.	**Produs**	**Valori pH**		**Aciditate medie (°T)**
		Hârtie pH	**pH-metru**	
1	Lapte 3,7% grăsime	4,5	5,42	46,86
2	Lapte de casă, integral	6,5	6,92	44,59
3	Lapte bătut Bio 2% grăsime	4,5	4,73	109,2
4	Iaurt Bio 3,5% grăsime	4,0	4,54	138,8
5	Iaurt Bio de băut 2,5% grăsime	4,5	4,81	100,1
6	Sana fără lactoză	4,5	4,78	102,8
7	Kefir Bio 3,5% grăsime	4,5	4,76	86,0
8	Smântână 32% grăsime	6,5	6,71	91,0
9	Frișcă neîndulcită 32% grăsime	6,5	6,87	43,68
10	Brânzică Bio 5,5% grăsime	4,5	4,88	54,6

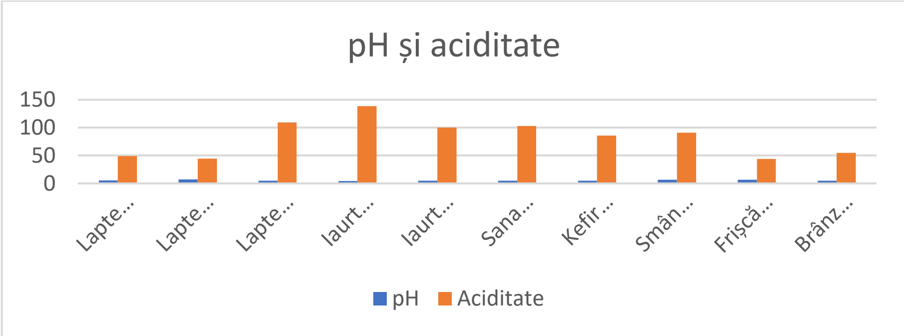


Figura 3 Valorile pH-ului și acidității pentru probele de lactate studiate

2 Determinarea calciului din lapte și produse lactate

Calciul este un mineral esențial pentru sănătatea oaselor și dinților, dar și pentru funcționarea corespunzătoare a sistemului nervos, a mușchilor și a inimii. Consumul adecvat de calciu este deosebit de important în dezvoltarea și menținerea sănătății organismului uman.

Conținutului de calciu din lapte se poate determina prin următoarele metode:

1. Titrarea complexometrică: Această metodă implică utilizarea unui agent complexant, cum ar fi EDTA (acid etilendiaminotetraacetic), pentru a forma un complex stabil cu calciul din probă. Titrarea ulterioară cu o soluție standard de EDTA permite calcularea conținutului de calciu.
2. Spectroscopia de absorbție atomică: Această metodă se bazează pe absorbția radiației electromagnetice de către atomii de calciu în stare gazoasă, după vaporizarea mostrei. Intensitatea absorbției este proporțională cu concentrația de calciu.
   Principiul spectrometriei de absorbție atomică constă in excitarea atomilor substanței de cercetat prin energie unei surse de radiație ce are o frecventa egala cu frecventa liniei de rezonanta a atomilor cercetați.
   Aparatul trebuie sa conțină o sursa de linii (lămpi catodice), arzător cu flacăra, dispozitiv de pulverizare, monocromator si un sistem de fotodetecție.
   Proba este introdusă lateral cu ajutorul unei microseringi. Indiferent de tipul atomizatorului (flacără sau cuptor) el trebuie sa realizeze uscarea, arderea si atomizarea substanței. Pentru dozarea calciului proba se pulverizează dintr-o soluție de clorura de lantan.
3. Metoda colorimetrică cu ortofenantrolină: Această metodă se bazează pe schimbarea de culoare a indicatorului ortofenantrolină în funcție de concentrația de calciu din probă. Intensitatea culorii este măsurată cu un spectrofotometru și este folosită pentru calcularea conținutului de calciu.
4. Metoda complexului cu alizarină: Această metodă implică formarea unui complex de calciu cu alizarina, care are o culoare roz-portocalie intensă. Intensitatea culorii este măsurată și folosită pentru determinarea concentrației de calciu.

Concluzie: Determinarea conținutului de calciu în lapte și produse lactate este esențială pentru monitorizarea aportului de calciu în dieta umană. Diverse metode analitice pot fi utilizate pentru a obține rezultate precise și fiabile. Asigurarea unei cantități adecvate de calciu în dietă este esențială pentru menținerea sănătății oaselor și a organismului în ansamblu. [7,8].

REZULTATE ȘI DISCUȚII

În această lucrare s-a determinat conținutul în calciu al probelor de lapte și produse lactate folosind metoda complexometrică de dozare a calciului (metoda Elliot, metoda titrimetrică).

Principiu. Titrarea directa a ionilor de calciu, in mediu intens alcalin cu sarea disodică a acidului etilendiamintetraacetic (EDTA) in prezența murexidului ca indicator. Ionii de calciu sunt fixați apoi cantitativ prin titrare cu EDTA eliberând indicatorul, astfel că acesta colorează soluția in violet.

Reactivi.

1. hidroxid de sodiu 2N. Se dizolva 90 g substanță in apa distilata, iar după răcire se aduce volumul la 1000 ml.
2. indicator murexid (purpurat de amoniu). Se folosește un amestec fin pulverizat de murexid si azotit de potasiu in proporție de 1/800.
3. soluție EDTA 0,01 M. Într-un balon cotat de 1.000 ml se dizolvă 2,92 g substanță uscată in 200 ml apa distilată, alcalinizând cu hidroxid de sodiu 10%, pana ce soluția devine perfect clară, apoi se completează la semn cu apa distilată. 1ml conține 0,4008 mg calciu.

Tehnica. Se dilueaza 20 ml probă până la 100 ml cu apă distilata, se adaugă 1 ml tampoon hidroxid de sodiu 2 N și un vârf de cuțit (câteva centigrame) indicator murexid. Se titrează cu soluție EDTA 0,01M până ce culoarea amestecului virează de la roz la violet. Paralel se titrează si o probă martor, folosind apa distilată.

$$Calcul.\ \ Calciu\frac{mg}{ml\ (dm3)} = \frac{V\cdot F\cdot 0{,}4008}{V_{probă}}\cdot 1000\ \ (4),\ \text{unde:}$$

V, F reprezintă volumul folosit la titrare, respectiv factorul soluției de complexon. [8].

Valorile obținute pentru determinarea calciului în probele studiate sunt prezentate în Tabelul 2 și Fig. 4:

Tabelul 2. Conținutul de calciu în probele de lactate studiate

Nr. Crt.	**Produs**	**Calciu (mg/l)**
1	Lapte 3,7% grăsime	360,72
2	Lapte de casă, integral	400,8
3	Lapte bătut Bio 2% grăsime	681,36
4	Iaurt Bio 3,5% grăsime	601,2
5	Iaurt Bio de băut 2,5% grăsime	541,08
6	Sana fără lactoză	621,24
7	Kefir Bio 3,5% grăsime	601,2
8	Smântână 32% grăsime	701,4
9	Frișcă neîndulcită 32% grăsime	741,48
10	Brânzică Bio 5,5% grăsime	180,36

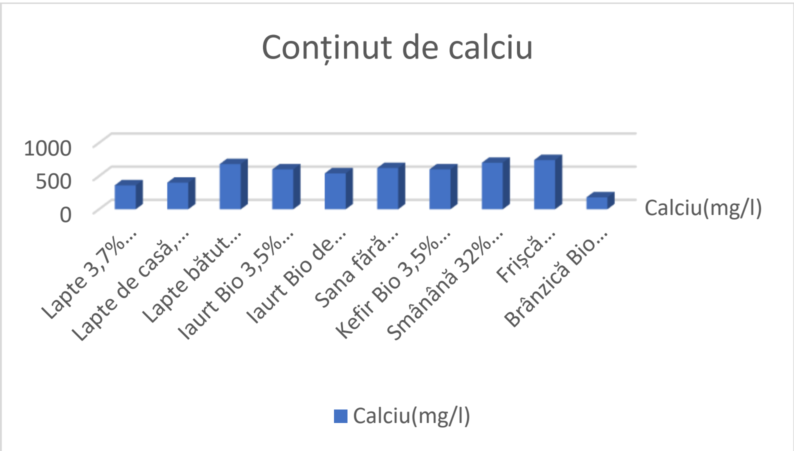


Figura 4. Conținutul de calciu în probele de lactate studiate

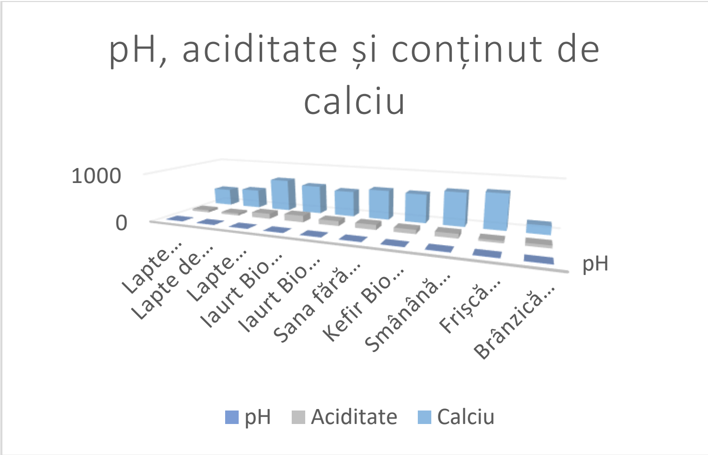


Figura 5. pH-ul, aciditatea și conținutul de calciu al probelor de lactate studiate

Au fost analizate un număr de zece probe, constând în lapte și produse lactate de diferite tipuri, ambalate, provenite din comerț. Singura probă care nu provine din comerț este proba de lapte de casă, integral, care provine dintr-o gospodărie țărănească din zona rurală a județului Bihor. Cele zece probe analizate sunt următoarele: lapte 3,7% grăsime; lapte de casă, integral; lapte bătut Bio 2% grăsime; iaurt Bio 3,5% grăsime; iaurt Bio de băut 2,5% grăsime; sana fără lactoză; kefir Bio 3,5% grăsime; smântână 32% grăsime; frișcă neîndulcită 32% grăsime și brânzică Bio 5,5% grăsime.

Probelor li s-a determinat pH-ul cu hârtia indicatoare de pH și cu ajutorul pH-metrului.

În Tabelul 1 se poate observa că valorile de pH obținute cu ajutorul hârtiei indicatoare în cazul produselor lactate sunt doar orientative, precizia valorii fiind destul de scăzută. Rezultate mult mai bune au fost înregistrate la utilizarea pH-metrului. pH-ul tuturor produselor lactate a fost cuprins în intervalul 4.54 – 6,87, cel mai acid produs fiind iaurtul Bio cu 3,5% grăsime, iar cel mai puțin acid a fost frișca neîndulcită. În urma determinării pH-ului, cât și a acidității prin titrare cu o bază s-a observat că aciditatea în cazul produselor lactate analizate a crescut în ordinea: lapte, frișcă, ,smâtână, brânzică, kefir, sana, lapte bătut și iaurt, așa cum rezultă din Tabelul 1 și Fig. 3. Cu trei excepții: smântână, frișcă și lapte integral, toate celelalte prosuse studiate au valorile pH-ului cuprinse între 4-5,5, ceea ce ne arată că toate aceste produse sunt de fapt slab acide și de aceea sunt bine tolerate de către organism.

Consumul adecvat de calciu este deosebit de important în dezvoltarea și menținerea sănătății organismului uman. Deoarece laptele și produsele lactate sunt cunoscute pentru conținutul lor bogat în calciu, determinarea precisă a acestui conținut devine esențială pentru a asigura o dietă echilibrată și sănătoasă. Pentru probele studiate, așa cum se observă în Tabelul 2 și Fig.4, s-au obținut valori ale conținutului de calciu cuprinse între 180,36 mg/l și 741,48 mg/l. După cum se observă în Fig. 4, conținutul de calciu al produselor studiate crește în ordinea: brânzică, lapte, iaurt, kefir, sana, lapte bătut, smântână, frișcă, iar pentru diferitele tipuri de lapte și iaurt valorile au fost apropiate.

În urma analizelor efectuate pentru conținutul de calciu în produsele lactate, se observă că poate varia în funcție de tipul de produs, procesul de producție, marca produsului, regiunea de proveniență a laptelui și alți factori.

BIBLIOGRAFIE

[1] Alais, C. (1995). Biochimia alimentelor (Seria Ellis Horwood în Știința și Tehnologia Alimentației). Editura: End of Line Clearance Book

[2]Weaver, C.M., Heaney, R.P. (2006). Calcium in Human Health. Humana Press

[3]Berridge, M. J, Bootman, M.D., Roderick, H.L. (2003). Calcium signalling: dynamics, homeostasis and remodelling. Nat Rev Mol Cell Biol., Vol.4(7), pp.517-529

[4]Bonjour, J. P. (2005). Dietary protein: an essential nutrient for bone health. The Journal of the American College of Nutrition, 24(6 Suppl), pp. 526-536
[5]Brown, E. M. (2013). Role of the calcium-sensing receptor in extracellular calcium homeostasis. Best Practice & Research Clinical Endocrinology & Metabolism, Vol. 27(3), pp. 333-343
[6]Carafoli, E., Krebs, J. (2007). Calcium Homeostasis. New York: Springer Science & Business Media
[7]Zemel, M. B. (2001). Role of calcium and dairy products in energy partitioning and weight management. The American Journal of Clinical Nutrition, Vol. 73(2), pp. 457-465
[8]Jäntschi, L. (2004). Chimie fizică. Analize chimice şi instrumentale., Editura Academic Direct

INFLUENȚA FACTORILOR DE MEDIU ASUPRA GRADULUI DE HIDRATARE AL TEGUMENTULUI

Andrei CONSTANTINESCU[1], Anița LUNCAN[2]

[1]Colegiul Național ”Emanuil Gojdu” Oradea, România – elev în clasa a X – a F, – Strada Spiru Haret, nr. 3-5, Oradea, andrei.constantinescu24@gmail.com
[2]Colegiul Național ”Emanuil Gojdu” Oradea, România – profesor de Chimie

Rezumat: *Apa este cea mai importantă moleculă anorganică din corpul uman, datorită proprietăților sale și implicit rolurilor sale indispensabile vieții. Cantitatea de apă din organism este meținută la un nivel constant printr-un mecanism de reglare. În lucrarea prezentă am încercat să observăm cum conținutul de apă din organism este influențată de condițiile de mediu (temperatură și umiditate).*
Cuvinte cheie: hidratare tegument, factori de mediu

INTRODUCERE

Apa este indispensabilă vieții, fiind principalul constituent al tuturor organismelor vii.
Rolurile apei în organismul uman sunt multiple și variate și sunt datorate proprietăților fizico-chimice ale acesteia. Aceste proprietăți (punctul de topire și fierbere; capacitatea termică mare; polaritatea moleculei cu formarea legăturilor de hidrogen și fenomenul de capilaritate) explică funcțiile ei:

1. rol structural: apa este repartizată în celule, spații intercelulare și extracelulare, vase sanguine și limfatice;
2. mediul intern în care se distribuie toate substanțele solubile, organice și anorganice, favorizând astfel desfășurarea proceselor biochimice și de transport a substanțelor nutritive (proteine, vitamine, minerale) și a produșilor de excreție (ducând la eliminarea toxinelor din organism);
3. metabolit universal: apa este atât reactant cât și produs de reacție în procesele biochimice fundamentale (digestia și absorbția substanțelor nutritive, reacții de oxido-reducere în urma cărora se eliberează energie);
4. menținerea constantă a temperaturii organismului: apa înmagazinează o cantitate mare de căldură fără să-și schimbe temperatura.

Datorită acestor funcții, menținerea constantă a conținutului de apă în organism (gradul de hidratare) este foarte importantă. Cantitatea de apă din corpul uman variază în funcție de sex, vârstă, greutate și conținutul de grăsime. Gradul de hidratare a organismului se reflectă direct în gradul de hidratare al tegumentului; aproximativ 72% din greutatea tegumentului este reprezentată de apă.
Lucrarea de față urmărește corelația dintre factorii de mediu (temperatură și umiditate) și gradul de hidratare a tegumentului.

MATERIAL ȘI METODĂ

Studiul nostru constă în determinarea gradului de hidratare a tegumentului, în condiții diferite de mediu, la 10 persoane, cu vârsta de 20 ani, clinic sănătoase, normopoderale.
Examinările s-au efectuat cu un „Dispozitiv pentru măsurarea gradului de hidratare a pielii”. Acest aparat are la bază principiul măsurării impedanței bioelectrice, o metodă neinvazivă, care determină rezistența organismului față de un flux de curent electric slab, ce străbate țesuturile sale. Folosirea analizatorului de impedanță bioelectrică reprezintă metoda actuală de determinare a apei din organism, inclusiv a celei din țesuturi și grăsimi.
Parametrii legați de condițiile de mediu au fost preluați cu un dispozitiv Android, de la The Weather Channel.

Figura 1. Dispozitiv pentru măsurarea gradului de hidratare a tegumentului (analizator de impedanță bioelectrică)

REZULTATE

Primul set de măsurători a fost efectuat într-o zi ploioasă, de primăvară, cu temperatura de 15 grade Celsius și umiditate de 91%.
Al doilea set de măsurători a fost efectuat într-o zi toridă, de vară, cu temperatura de 35 grade Celsius și umiditate de 41%.
Înaintea determinărilor subiecții nu au făcut efort fizic și nu s-au hidratat timp de 2 ore.
Măsurătorile s-au făcut pe tegumentul anterior al antebrațului, uscat și curat.
La fiecare subiect am efectuat câte trei măsurători consecutive, în cele două condiții de mediu. Datele din tabelul nr. 1 reprezintă media aritmetică a celor trei măsurători.

Tabelul nr.1

Condiții de mediu	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
15^0 C, 91%	36%	38%	32%	42%	41%	38%	35%	38%	42%	45%
35^0 C, 41%	32%	35%	30%	38%	40%	36%	35%	32%	36%	37%

Interpretarea rezultatelor:

- Sub 30% - piele foarte uscată;
- Între 30% și 35% - piele uscată;
- Între 36% și 45% - piele normal hidratată;
- Peste 46% - piele umedă.

CONCLUZII ȘI DISCUȚII

În acest studiu nu a fost luat în calcul variația gradului de hidratare în funcție de sex, vârstă și conținutul de țesut adipos. Din acest motiv toți subiecții au fost tineri, în vârstă de 20 ani, iar măsurătorile s-au efectuat pe fața anterioară a antebrațului, unde cantitatea de grăsime este minimă.

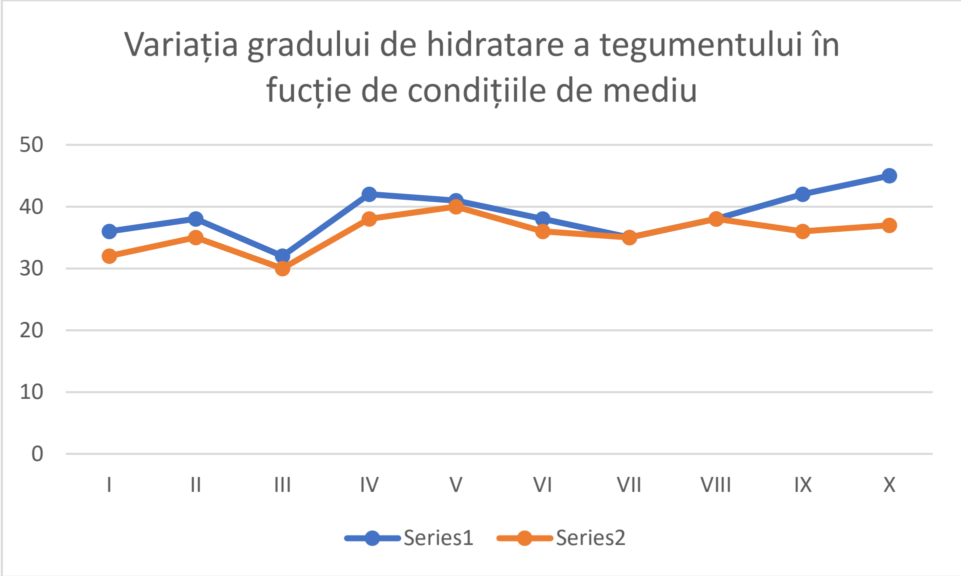


Figura 2. Variația gradului de hidratare a tegumentului la cei 10 subiecți în funcție de condițiile de mediu (seria 1: temperatura de 15^0 C și umiditate de 91%; seria 2: temperatura de 35^0 C și umiditate de 41%).

Datele din tabelul nr. 1 arată o uşoară creştere generală a gradului de hidratare a tegumentului direct proporțională cu umiditatea și invers proporțională cu temperatura mediului. La doi subiecți condițiile de mediu nu au influențat gradul de hidratare a tegumentului.

Variațiile mici ale gradului de hidratare a tegumentului în funcție de condițiile de mediu dovedesc că în organism există un echilibru permanent între apa ingerată și cea excretată. Acest echilibru se menține datorită unei bune funcționări a sistemului reglator din corpul uman format din hipotalamus, hipofiza posterioară și rinichi. În condiții de mediu extreme, acest sistem poate fi depășit de aceea este necesară creșterea aportului de lichide. Datele noastre susțin această cocluzie.

BIBLIOGRAFIE

[1] Bryson, B. (2015). Despre toate pe scurt, De la Big Bang la ADN; Ed. Polirom
[2]Barbara Krumhardt, B., I. Edward Alcamo, I. (2022). Anatomie și fiziologie umană; Ed. University Press
[3] Nenițescu, C.D. (1972). Chimie generală; Ed. Didactică și Pedagogică
[4]Ryan, L., Norris, R. (2020). Chemistry; Cambridge University Press
[5]Shriver, D., Atkins, F., Langford, P.W. (1998). Chimie anorganică; Ed. Tehnică

DETERMINAREA VITAMINEI C DIN CRUCIFERE

Anamaria-Ioana ALBU[1], Alexandrina FODOR[2]

[1]Student Chimie, anul III, Universitatea din Oradea, Facultatea de Informatică şi Ştiinţe
[2]Coordonator lucrare, Departamentul de Chimie Universitatea din Oradea, Facultatea de Informatică şi Ştiinţe

Rezumat: *Cruciferele, conțin foarte multe substanțe nutritive, benefice organismului, de la vitamine, minerale, proteine, la carbohidrați și grăsimi. Sunt bogate în vitamina A, vitamina C, acid folic și fibre, cu un conținut caloric scăzut. Astfel este foarte important să se cunoască conţinutul în vitamina C a cruciferelor pentru o mai bună apreciere a cantităţilor care trebuiesc consumate pentru a asigura aportul optim zilnic în dietă. În prezenta lucrare s-a analizat conţinutul de vitamina C în frunzele de: varză, varză roşie, varză de Bruxelles şi căpăţâna de: conopidă, broccoli, gulie, în stare crudă. Metoda aleasă pentru determinarea vitaminei C a fost cea cu 2,4 dinitrofenilhidrazină. Comparând datele obţinute experimental cu cele extrase din literature de specialitate s-a putut concluziona că metoda spectrofotometrică utilizată este o metodă de încredere. Din valorile conţinutului de vitamina C din cruciferele investigate se poate concluziona faptul că pentru a se asigura doza de vitamina C recomandată zilnic pentru un adult sănătos este suficient să se consume în stare crudă circa: 300 g varză, 100 g varză roşie, 100 g varză de Bruxel, 100 g căpăţână de Bocolli, 150 g căpăţână de Gulie, potrivit National Institutes of Health*

Cuvinte cheie: crucifere, metoda spectrofotometrică, 2,4 dinitrofenilhidrazină

INTRODUCERE

Vitamina C sau acidul ascorbic este unul dintre obiectivele principale ale controlului chimic al alimentelor. Acest fapt se datorează pe de o parte importanței sale biologice, pe de altă parte instabilităţii sale, fiind uşor degradată nu numai de procesele tehnologice, dar și de maniera de pregătire culinară, depozitare sau unele impurități care ajung în alimente.

Legumele numite crucifere, denumire dată după familia botanică din care fac parte, și anume *Cruciferae* sau *Brassicaceae (* numele vine de la forma florilor, mai exact în formă de cruce) sunt cultivate de secole în principal în Europa și Asia.

Cruciferele conțin foarte multe substanțe nutritive, benefice organismului, de la vitamine, minerale, proteine, la carbohidrați și grăsimi. Sunt bogate în vitamina A, vitamina C, acid folic și fibre, cu un conținut caloric scăzut. Se spune că ideal ar fi să se mănânce cel puțin trei porții de legume crucifere pe săptămână, iar pentru a reține o cantitate cât mai mare din nutrienții benefici ai acestor legume, ar trebui să le consumi cât mai proaspete.

Doza zilnică recomandată pentru vitamina C, potrivit National Institutes of Health este:

- 75 mg pentru femei;
- 90 mg pentru barbați;
- 85 mg pentru femeile însărcinate;
- 115-120 mg pentru femeile care alapteaza.

Astfel este foarte important să se cunoască conţinutul în vitamina C a cruciferelor pentru o mai bună apreciere a cantităţilor care trebuiesc consumate pentru a asigura aportul optim zilnic în dietă.

Vitamina C datorită instabilității sale și importanței sale biologice este unul dintre obiectivele principale ale controlului chimic al alimentelor. Fiind uşor oxidabilă datorită prezenței dienolului, intervine în metabolism în anumite procese redox, însă în același timp prezintă o sensibilitate față de acțiunea oxigenului sau a altor elemente care pot cataliza oxidarea ei. Factorii care favorizează oxidarea sunt pH-ul ridicat, oxigenul, oxigenul, temperatura, urmele de metale grele.

În prezenta lucrare s-a analizat conţinutul de vitamina C în frunzele de: varză, varză roşie, varză de Bruxelles şi căpăţâna de: conopidă, broccoli, gulie, în stare crudă.

DETERMINAREA VITAMINEI C PRIN METODA SPECTROFOTOMETRICĂ CU 2,4-DINITROFENILHIDRAZINĂ

Probele analizate:

Au fost investigate frunzele de: varză, varză roşie, varză de Bruxelles şi căpăţâna de: conopidă, broccoli, gulie, în stare crudă.

Figura 1. probele investigate (frunzele de: varză, varză roşie, varză de Bruxelles şi căpăţâna de: conopidă, broccoli, gulie)

Principiul metodei de analiză

Există numeroase metode de determinare a vitaminei C cum ar fi metodele titrimetrice, metodele spectrofotometrice şi HPLC. Cele mai de încredere sunt cele HPLC, care au avantajul unei specificităţi avansate, însă acestea necesită aparatură şi reactivi speciali şi implică operaţii relativ laborioase. Metodele spectrofotometrice prezintă avantajul unei execuţii simple, directe şi extrem de sensibile. Metoda aleasă pentru determinarea vitaminei C a fost cea cu 2,4 dinitrofenilhidrazină.

Metoda de determinare spectofotometrică a conținutului total de vitamina C (acid ascorbic + acid dehidroascorbic) utilizând 2,4 dinitrofenilhidrazina se bazează pe o reacție de cuplare. Se utilizează apă de brom, în prezența acidului acetic, pentru a oxida acidul ascorbic în acid dehidroascorbic.

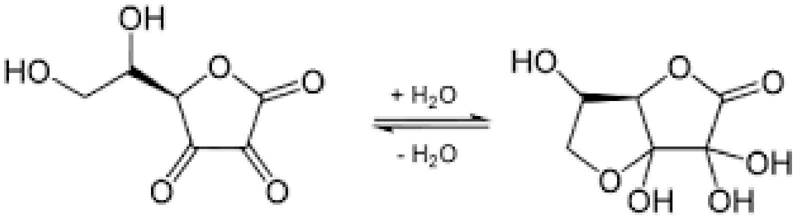


Figura 2. Acidul ascorbic/Acidul dehydroascorbic
https://en.wikipedia.org/wiki/Dehydroascorbic_acid

După oxidare se adaugă o cantitate cunoscută de 2,4 dinitrofenilhidrazină pentru a avea loc reacția de cuplare în urma căreia se formează o osazonă care în prezența acidului sulfuric 85% se colorează în roşu.

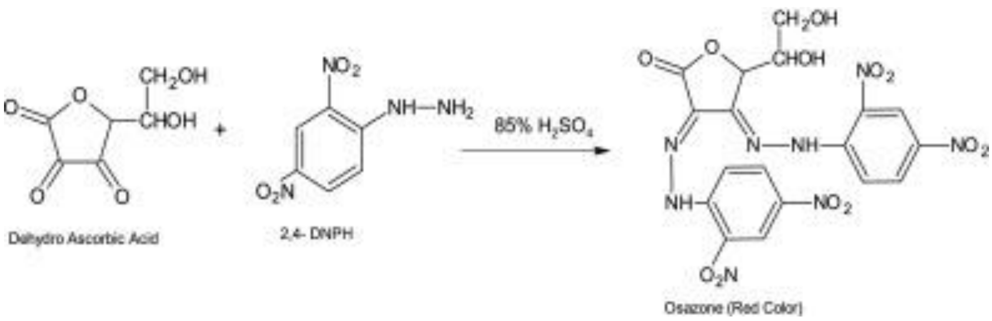


Figura 3. reacţia de formare a osazonei
https://ars.els-cdn.com/content/image/1-s2.0-S0026265X18301656-fx1.jpg

Absorbanțele se măsoară spectrofotometric la 450 nm, lungimea de undă la care osozona prezintă absorbanța maximă.

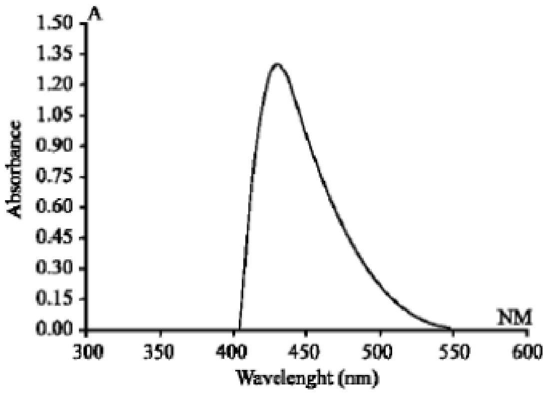


Figura 4. Spectrul de absorbţie a osazonei acidului dehidroascorbic
[https://scialert.net/fulltext/?doi=jbs.2006.388.392]

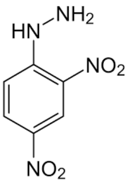
Prelucrarea probelor:

Probele au fost aduse sub formă de puree cu ajutorul unu mixer vertical.

Figura 5. Prelucrarea probelor sub formă de puree (frunzele de: varză, varză roşie, varză de Bruxelles şi căpăţâna de: conopidă, broccoli, gulie)

Reactivi necesari:

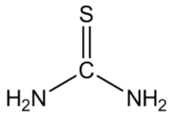
-soluție de 2,4 dinitrofenilhidrazină, 2 g dizolvată în 100 ml acid sulfuric 85%



2,4dinitrofenilhidrazina

-soluție acid sulfuric 85%

-Tiouree soluție 2%



Tiouree

-Apă de brom

-Soluție acid metafosforic HPO_3 5%

-Soluție acid acetic 10%

-Soluție standard de acid ascorbic: 50 mg acid ascorbic se dizolvă în 100 ml apă distilată (500 µg/ml).

Trasarea curbei de etalonare

Curba de etalonare s-a trasat pentru soluții cu concentrația acidului ascorbic de 5, 10, 15, 20, 25 µg/ml la care se adaugă 1 ml de 2,4 dinitrofenilhidrazină și se mențin soluțiile la 37^0 C timp de 3 ore (pentru a avea loc reacția de cuplare) la întuneric. După 3 ore soluțiile se răcesc pe o baie de gheață și li se adaugă 5 ml acid sulfuric 85%. Absorbanțele soluțiilor obținute sunt măsurate cu ajutorul spectrofotometrului la 530 nm.

Figura 6. Soluţiile preparate pentru curba de etalonare

Tabelul 1. Curba de etalonare

Nr	Concentraţie Vitamina C µg/ml	Absorbanţa măsurată la 530 nm
1	80	0,07
2	120	0,12
3	160	0,16
4	200	0,2
5	240	0,23

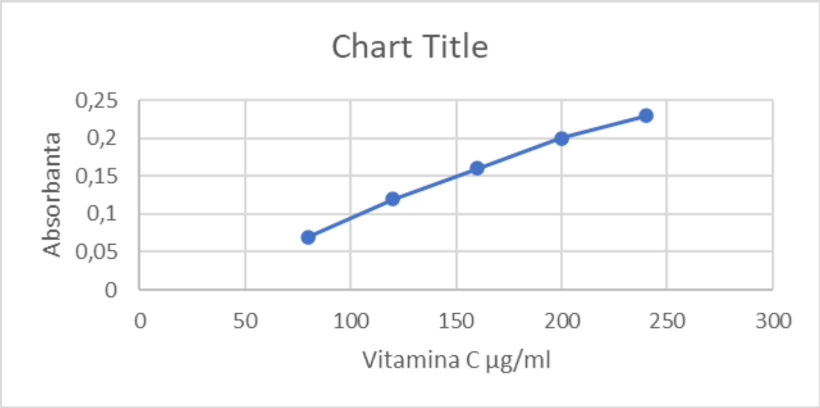


Figura 7.Curba de etalonare (Y=0,00067x+0,0549)

Prepararea soluţiilor de analizat

S-au luat 10 g din pasta probelor de analizat și li s-a adăugat 50 ml acid metafosforic 5%. Soluția astfel obținută s-a transferat în balon cotat de 250 ml și se aduce la semn cu acid metafosforic 5%. Se agită bine balonul, se lasă în repaus pentru 10 minute și apoi se filtrează utilizând hârtie de filtru Whatman.

Mod de lucru

Soluțiilor filtrate li se adaugă câteva picături de apă de brom și se agită pentru omogenizare. Se adaugă câteva picături de soluție de tiouree 2% pentru a neutraliza excesul de brom.

Se adaugă 1 ml de 2,4 dinitrofenilhidrazină și se mențin soluțiile la 37^0 C timp de 3 ore (pentru a avea loc reacția de cuplare) la întuneric. După 3 ore soluțiile se răcesc pe o baie de gheață și li se adaugă 5 ml acid sulfuric 85%.

Absorbanțele soluțiilor obținute sunt măsurate cu ajutorul spectrofotometrului la 450 nm.
S-a utilizat un spectrofotometru UV-Vis T60 de la PG Instruments.

REZULTATE

În urma măsurării absorbanţei probelor şi a curbei de elatonare s-au determinat concentraţiile de vitamina C. Rezultatele obţinute sunt prezentate în tabelul 2.

Tabelul 2. Conţinutul de vitamina C din probele analizate

Nr.	Proba	Absorbanţa Măsurată la 450 nm	Concentraţia µg/ml determinată experimental	Cantitatea de vitamina C mg/100 mg probă analizată*
1	Varză -frunze	0,093	92	35,79
2	Varză roşie - frunze	0,146	145	56,42
3	Varză de Bruxelles - căpăţână	0,213	212	82,50
4	Conopidă - căpăţână	0,124	123	47,85
5	Broccoli -căpăţână	0,223	224	87,15
6	Gulie -căpăţână	0,159	158	61,47

*Factorul de corecţie la transformarea concentraţiei determinate experimental utilizănd curba de etalonare şi concentraţia exprimată în mg/100 mg probă analizată a fost: 2,570, factor calculate ţinând cont de faptul că s-au luat în lucru 10 g progă, s-au adus la 257 ml în urmă diluării şi adausului de reactive şi transformarea µg în 0,001 mg)

Comparând datele obţinute experimental cu cele extrase din literature de specialitate (figura 8) se poate concluziona că metoda spectrofotometrică utilizată este o metodă de încredere.

Tabelul 3. Compararea rezultatelor obţinute cu datele din litertura de specialitate

Nr.	Proba	Denumirea în limba latină	Cantitatea de vitamina C Literatură* mg/100 mg	Cantitatea de vitamina C Determinată experimental mg/100 mg
1	Varză -frunze	*Brassica oleracea*	36,60	35,79
2	Varză roşie - frunze	*Brassica oleracea L. convar. capitata*	57,00	56,42
3	Varză de Bruxellesc-păţânăc	*Brassica oleracea gemmifera*	85,00	82,50
4	Conopidă - căpăţână	*Brassica oleracea convar.botrytis var. botrytis*	48,20	47,85
5	Broccoli -căpăţână	*Brassica oleracea var. italica*	89,20	87,15
6	Gulie -căpăţână	*Brassica oleracea var. gongyloides*	62,00	61,47

* USDA Food Composition Databases https://ndb.nal.usda.gov/ndb/

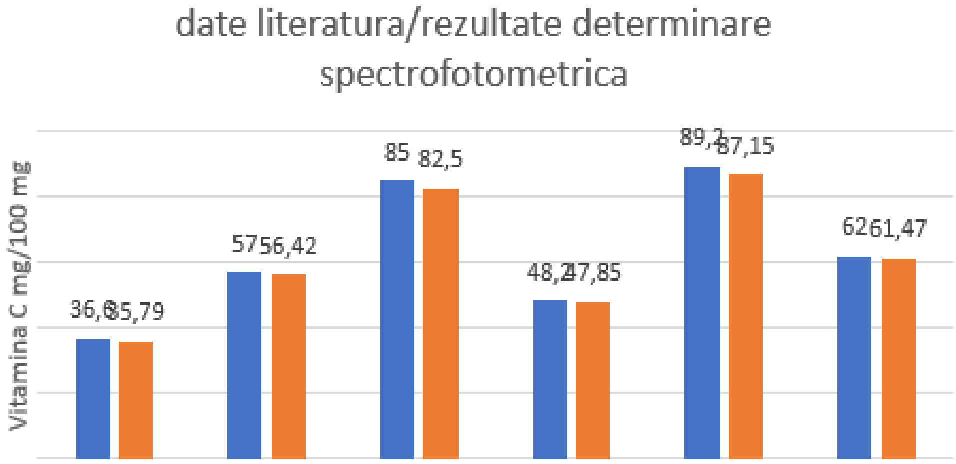


Figura 8. Conţinutul de vitamina C din probele analizate comparate cu cele din literature de specialitate

CONCLUZII

După cum se poate observa datele obţinute sunt în foarte bună concordanţă cu cele din literatura de specialitate. Metoda spectrofotometrică utilizănd 2,4 dinitrofenilhidrazină ca reactiv de culoare s-a dovedit a fi o bună metodă de determinare a vitaminei C din legumele crude.

Din valorile conţinutului de vitamina c din cruciferele investigate se poate concluziona faptul că pentru a se asigura doza de vitamina C recomandată zilnic pentru un adult sănătos este suficient să se consume în stare crudă circa: 300 g varză, 100 g varză roşie, 100 g varză de Bruxel, 100 g căpăţână de Bocolli, 150 g căpăţână de Gulie, potrivit National Institutes of Health.

BIBLIOGRAFIE

[1]https://dieta.romedic.ro/aliment/varza, 15.04.2023
[2] https://dieta.romedic.ro/aliment/varza-rosie, 15.04.2023
[3] https://dieta.romedic.ro/aliment/varza-de-bruxelles, 15.04.2023
[4] https://dieta.romedic.ro/aliment/conopida, 15.04.2023
[5]https://dieta.romedic.ro/aliment/brocoli, 15.04.2023
[6] https://dieta.romedic.ro/aliment/gulie, 15.04.2023
[7] https://www.academia.edu/36590059/Determinarea_vitaminei_C
[8] https://ods.od.nih.gov/factsheets/VitaminC-HealthProfessional
[9] Desai, A. P., Desai, S. (2019) UV Spectroscopic Method for Determination of Vitamin C (Ascorbic Acid) Content in Different Fruits in South Gujarat Region, Int J Environ Sci Nat Res 21(2), pp. 41-44
[10] USDA Food Composition Databases https://ndb.nal.usda.gov/ndb/

ANALIZE SPECTROFOTOMETRICE PENTRU TREI ULEIURI VEGETALE

Lorena- Raisa MORAR[1], Mioara SEBEŞAN[2], Horea-RaduSEBEŞAN[3]

[2] Universitatea din Oradea, Facultatea de Informatică şi Ştiinţe, Departamentul de Chimie, Str.Universitatii nr.1
[2]Coordonator lucrare, Departamentul de Chimie Universitatea din Oradea, Facultatea de Informatică şi Ştiinţe
[3] Universitatea din Oradea, Facultatea de Informatică şi Ştiinţe, Departamentul de Matematică şi Informatică, Str.Universitatii 1, România

Rezumat: *În lucrare se va analiza din punct de vedere cantitativ conţinutul de β-caroten, din trei uleiuri vegetale: ulei de cătină, ulei de grâu şi ulei de dovleac prin metoda spectrofotometrică UV-VIS. Uleiurile extrase din plante sunt utilizate pe larg în domeniul alimentar, dar şi în alte domenii precum cosmetică şi industria farmaceutică. Acestea prezintă o deosebită valoare datorită numeroaselor principii active benefice care intră în componența lor.*

Cuvinte cheie: analiza spectrofotometrică UV-VIS a β-carotenului, ulei de cătină, ulei de grâu şi ulei de dovleac

INTRODUCERE

Uleiurile vegetale fac parte din categoria cu cel mai mare conținut în vitamine liposolubile, în principal vitaminele A și E [1, 2]. Din punct de vedere al acțiunii lor, vitaminele liposolubile participă mai ales la procesele anabolice, acţionând oarecum asemănător hormonilor. Din acest motiv copiii, adolescenţii și femeile în perioada maternităţii au necesităţi mai mari și sunt mai sensibili la carenţe decît alte grupuri de populaţie [2].

Vitamina A este termenul dat unui grup de compuși organici lipofili și nesaturați, care include: retinolul, retinalul, și câteva carotenoide care acționează ca provitamine A (cel mai important fiind **beta-carotenu**l).

Vitaminele A prezintă mai multe funcții în organism, fiind importante pentru creștere, dezvoltare, pentru menținerea sistemului imunitar și pentru vederea bună. Vitaminele A sunt necesare pentru retina ochiului, mai ales sub formă de retinal; acesta se combină cu proteina denumită opsină formând rodopsină, molecula responsabilă de absorbția luminii atât în vederea scotopică, cât și în cea color. Sub formă de acid retinoic (forma oxidată ireversibil a retinolului), vitamina A este un factor de creștere pentru țesuturi epiteliale și alte tipuri de celule.

β-carotenul este un important antioxidant care, ajuns în organism, se tranformă în vitamina A, fiind și principalul mijloc de a obține această vitamină din alimentație.

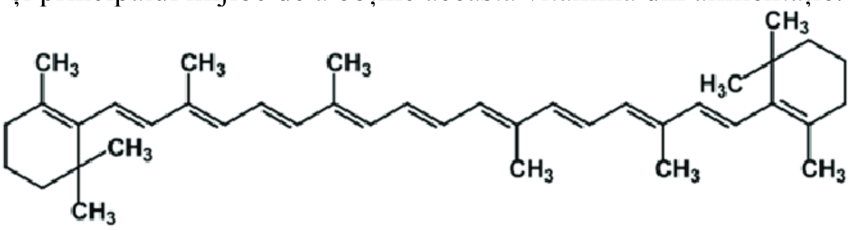


Figura 1. Structura chimică a beta-carotenului

MATERIALE ŞI METODE

Pentru a separa beta-carotenul din diferite tipuri de uleiuri vegetale, sunt necesari 0,2 ml ulei vegetal care se vor completa cu heptan la 4 ml. Absorbanța acestui amestec se va citi la spectofotometru la o lungime de undă de 449 nm. Conținutul beta-carotenului în probele de analizat se determină prin raportarea absorbanţelor probelor de analizat la o dreaptă de calibrare, care se va realiza cu ajutorul unor soluții standard de beta-caroten, cu concentraţii cuprinse între 2 şi 10 µg/ml, preparate prin diluarea unor volume diferite de soluţie standard de beta-caroten cu concentraţia de 20 µg/mL. Se citesc absorbanțele soluțiilor astfel obținute la 449 nm şi se trasează dreapta de calibrare. Conținutul de beta-caroten se exprimă în mg, se raportează la 100 g de produs vegetal şi se determină folosind formula:

$$\text{mg caroten } \% = \frac{Cx \times fd \times Vex}{m} \times 10^{-10}, \text{ unde:}$$

C_x = concentraţia în beta-caroten a probelor de analizat, extrasă din curba etalon (g/ml);
f_d = factorul de diluţie aplicat probelor de analizat, în vederea încadrării absorbanţei lor în domeniul curbei etalon;
V_{ex} = volumul de extract obţinut (mL);

REZULTATE ŞI DISCUŢII

Dozarea beta-carotenului din uleiurile vegetale

Analiza a fost efectuată cu un spectrofotometru SPECORD PLUS 210, în cuve de cuarț de 1 cm. Dreapta de calibrare se va realiza cu ajutorul unor soluții standard de beta-caroten, cu concentraţii cuprinse între 2 şi 10 µg/ml, preparate prin diluarea unor volume diferite de soluţie standard de beta-caroten cu concentraţia de 20 µg/mL. Se citesc absorbanțele soluțiilor astfel obținute la 449 nm şi se trasează dreapta de calibrare.

Probe	Soluția II	Soluția III	Soluția IV	Soluția V
Valoarea absorbanței determinată la 449 nm	0,0434	0,0170	0,0035	0,0010
Concentrația beta-carotenului (µg/ml)	10	5	2,5	2

Tabelul 1. Absorbanțele și concentrațiile soluțiilor de beta-caroten folosite la trasarea dreptei de calibrare.

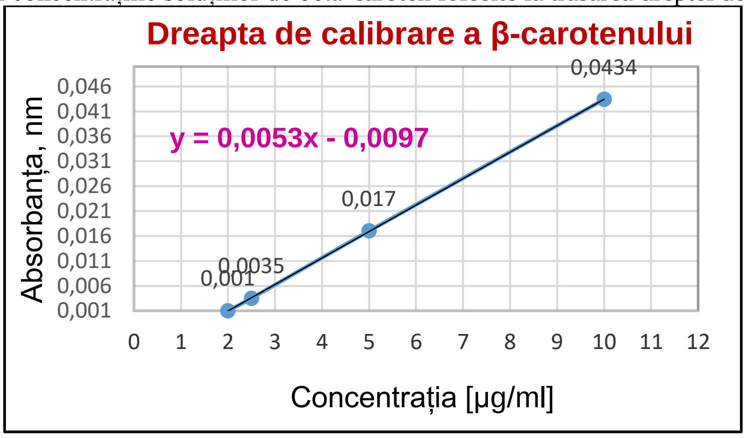


Figura 2. Dreapta de calibrare a beta-carotenului

În studiu s-au folosit uleiuri vegetale de dovleac, de cătină, și de germeni de grâu. S-au preparat soluții din cele trei uleiuri și heptan, astfel: 0,2 ml din fiecare ulei s-au completat cu heptan la 4 ml și s-au diluat astfel:

- Ulei de cătină - 10 µg/ml - diluție 100 ori
- Ulei de dovleac -10 µg/ml - diluție 25 ori
- Ulei de germeni de grâu - 10 µg/ml - diluție 25 ori

Ulterior, la aceeași lungime de undă de 449 nm s-au citit absorbanțele celor 3 soluții și cu ajutorul dreptei de calibrare s-au determinat concentrațiile lor în beta-caroten.

No. of cycle: 2	0.0460
No. of cycle: 3	0.0189
No. of cycle: 4	0.0240

Figura 3. Absorbanțele celor 3 uleiuri:
Cătină - diluție 100 ori (ciclu 2)
Dovleac - diluție 25 ori (ciclu 3)
Germeni de grâu - diluție 25 ori (ciclu 4)
la 449 nm

Tabelul 2. Absorbanțele și concentrațiile soluțiilor uleiurilor analizate, determinate cu ajutorul dreptei de calibrare

Probe	Ulei de cătină Diluție 100x	Ulei de dovleac Diluție 25x	Ulei de germeni de grâu Diluție 25x
Valoarea absorbanței determinate la 449 nm	0,0460	0,0189	0,0240
Concentrația (µg/ml)	10,4	5,2	6,4

Calcularea indicelui de aciditate pentru uleiurile vegetale, [3]

Indicele de aciditate al unui ulei creşte de obicei cu perioada de stocare, în special în condiţii improprii de depozitare; au loc procese de oxidare a aldehidelor şi de hidroliză a esterilor. Determinarea indicelui de aciditate pentru uleiurile vegetale analizate s-a facut prin titrare cu KOH 0,1N în prezenţă de soluţie alcoolică de fenolftaleină 1%, [5].

Titrarea acizilor liberi s-a considerat terminată în momentul apariţiei unei coloraţii slab roz, imaginea B., care se menţine mai mult de 10 secunde, moment în care se obţine punctul final al titrării.

Indicele de aciditate este calculat cu formula: $IA = \frac{5.61 \cdot V_{0.1N}}{m}$ (mg KOH/g)

unde: $V_{0.1N}$ – volumul soluţiei de hidroxid de potasiu 0.1N utilizat la titrare (ml);
m – masa de ulei volatil luată în lucru (g).

Calcule:

- ***Pentru uleiul de dovleac:***

$V_{0,1N}$ = 2,7 ml
I.A=5,61•2,7/m=15,147/m=15,147/0,190=79,7210

- ***Pentru uleiul de germeni de grâu:***

$V_{0,1N}$ = 10,7 ml
I.A=5,61•10,7/m=60,027/m=60,027/0,186=322,7258

- ***Pentru uleiul de cătină:***

$V_{0,1N}$ = 1,8 ml
I.A=5,61•1,8/m=10,098/m=10,098/0,184=54,8804

Tabel 3. Indicele de aciditate pentru cele 3 uleiuri vegetale

Proba	Uleiul de dovleac	Uleiul de germeni de grâu	Uleiul de cătină
I.A (mg KOH/g)	79,7210	322,7258	54,8804

Aciditatea liberă este procentul de acizi graşi liberi aflaţi în uleiul de analizat şi se exprimă convenţional în acidul gras cel mai reprezentativ, [4]. Pentru uleiurile obişnuite de soia, floarea soarelui, arahide, dovleac, nucă se exprimă în acid oleic. Modul de lucru constă în titrarea unei probe de ulei pentru analizat cu soluţie de hidroxid de sodiu sau de potasiu, în prezenţa indicatorului fenoftaleină. Apariţia coloraţiei roz indică faptul că toţi acizii graşi liberi au fost neutralizaţi.În figura 3 este prezentat nivelul acidităţii din uleiurile vegetale de dovleac, germeni

degrâu şi cătină.

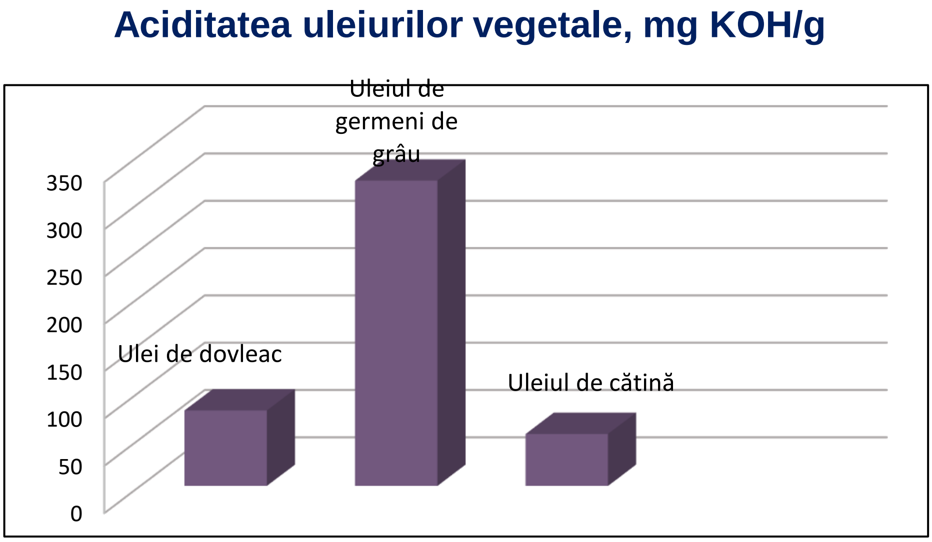


Figura 3. Nivelul acidităţii din cele trei uleiuri vegetale.

Uleiurile studiate au o aciditate liberă corespunzătoare cu standardele în vigoare, valorile fiind cuprinse între 0,22-0,67 % acid oleic.

Calcularea indicelui de iod pentru cele 3 uleiuri vegetale, [5]

Indicele de iod al uleiurilor vegetale reprezintă numărul de grame de iod reacţionate la 100 g probă, în condiţii stabilite. Această valoare indică în special gradul de nesaturare al resturilor de acizi graşi din gliceride.Utilizarea indicelui de iod în evaluarea uleiurilor nu este de prea mare importanţă, dar în unele cazuri acesta poate da informaţii privind calitatea produsului.

Indicele de iod se calculează cu formula:

$$I.I. = \frac{1.269 \cdot (V^0 - V)}{m} \quad \text{(g } I_2\text{/g probă)}$$

unde: V^0 – volumul de soluţie de tiosulfat de sodiu utilizat la titrarea probei martor (ml);

V – volumul de soluţie de tiosulfat de sodiu utilizat la titrarea probei cu ulei (ml);

m – masa de ulei luată pentru analiză (g).

<u>Calcule:</u>

Indicele de iod = 1,269 • (V^0 – V) / m, unde:

0,01269 = cantitatea de iod (g), corespunzătoare la 1ml tiosulfat de sodiu soluţie 0,1N

V^0 = volumul soluţiei de tiosulfat de sodiu folosit la titrarea martor (ml) =35,5 ml

V = volumul soluţiei de tiosulfat de sodiu folosit la titrarea probei cu ulei (ml)

m = cantitatea de ulei luată pentru analiză(g).

- ***Pentru uleiul de dovleac:***

V_1 =10,4 ml $Na_2S_2O_3$ folosiţi la titrare

m= 0,190 g

I.I=1,269 • (35,5-10,4) /m=31,8519/m=31,8519/0,190=167,6415

- ***Pentru uleiul de germeni de grâu:***

V_1 =11,9 ml $Na_2S_2O_3$ folosiți la titrare
m= 0,186 g

I.I=1,269 • (35,5-11,9) /m=29,9484/m=29,9484/0,186=161,0129

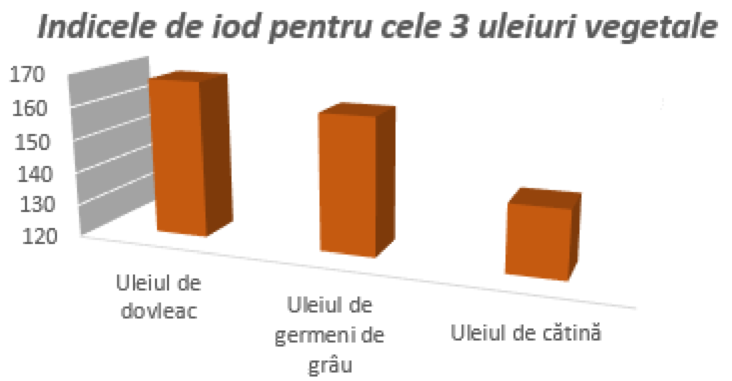
- ***Pentru uleiul de cătină:***

V_1 =15,2 ml $Na_2S_2O_3$ folosiți la titrare ; m= 0,184 g

I.I=1,269 • (35,5-15,2) /m=25,7607/m=25,7607/0,184=140,0038

Tabel 4. Indicele de iod pentru cele 3 uleiuri vegetale

Proba	Uleiul de dovleac	Uleiul de germeni de grâu	Uleiul de cătină
Indicele de iod (g I_2/ g probă)	167,6415	161,01290	140,0038



Uleiul de dovleac	Uleiul de germeni de grâu	Uleiul de cătină
167,64	161,01	140

Figura 4. Nivelul indicelui de iod din cele trei uleiuri vegetale.

CONCLUZII

Cunoașterea conținutului cantitativ de principii active din uleiurile vegetale comercializate determină aprecierea valorii acestora în funcție de domeniul de utilizare.

Importanța studiului efectuat în această lucrare este dată de necesitatea estimării impactului alimentației sănătoase asupra stării de sănătate şi de oportunitatea elaborării unor studii, ca mecanism de perfecționare şi armonizare a impactului dietei bazate pe alimente funcționale cu componente bioactive asupra calității vieții şi în prevenirea apariției bolilor degenerative.

BIBLIOGRAFIE

[1] Irwandi J., Dedi N., Reno F.H., Fitri O. (2011). Carotenoids: Sources, medicinal properties and their application in food and nutraceutical industry. *Journal of Medicinal Plants Research*, 5(33): 7119-7131.

[2] Ross A.C., Stephensen C.B.(1996). Vitamin A and retinoids in antiviral responses. *The FASEB Journal* 10(9): 979-985.

[3] Chiriac V, Balea G, Chiriac V. (1995). *Analiza chimică calitativă.* Ed. Mirton Timişoara.
[4] Purcărea Cornelia, (2015). *Îndrumător de laborator -Biochimie*, Editura Universităţii Oradea, Oradea.
[5] D. Hădărugă, N.Hădărugă, (2002).*Compuşi odoranţi şi aromatizanţi,* Editura Politehnica Timişoara, Timişoara.
[6] Dorobanţu, P., Beceanu, D. (2007).*Importanţa alimentară şi dietetică a uleiurilor vegetale,* Lucr. Ştiinţifice U.Ş.A.M.V., Seria Agricultură, vol.50, Iaşi.
[7] Gunstone, Frank, D. (2002). *Vegetable Oils in Food Technology,* Blackwell Publishing.
[8] Mageed, M.A.A.E., Mansour, A.F., Massry, K.F.E., Ramadan, M.M., Shaheen, M.S.(2011). J. Essent. Oil-Bearing Plants 14, 214–223.
[9] Ciobanu Domnica, (2002). *Chimia produselor alimentare-investigaţii analitice*. Editura Tehnica-Info, Chişinău.

DISCUȚII SPECTRALE ȘI STRUCTURALE ÎN CHIMIA COMPLECȘILOR IONULUI DE COBALT (II)

Ioana-Anca MOLNAR[1], Mihai MOLNAR[1], Anda Ioana Grațiela PETREHELE[2]

[1]studenți licență Chimie anul III, Facultatea de Informatică și Științe, Universitatea din Oradea
[2]profesor coordonatori Departamentul de Chimie, Facultatea de Informatică și Științe, Universitatea din Oradea

Rezumat: *Studiul s-a oprit asupra reacției de deshidratare la cald a cristalohidratului de clorură de cobalt, $CoCl_2{\cdot}6H_2O$. În realitate acest compus este un acvacomplex, care la deshidratare suferă reacții de înlocuire a moleculelor de apă cu anioni clorură în sfera de coordinare a ionului de Co(II). În forma anhidră moleculele de apă sunt complet substituite cu anioni clorură și se observă ca se modifică numărul de coordinare și implicit și geometria de coordinare. S-au dezbătut probleme legate de stabilitate și de posibilitatea de deplasare a echilibrului de la o formă la alta la variația condițiilor de mediu. Modificările structurale, schimbarea de culoare sunt toate discutate din punct de vedere al teoriilor moderne, al spectrelor de caracterizare ridicate în UV-VIS cu tranziții electronice permise tratate conform diagramelor Orgel și Tanabe-Sugano pentru un cation cu configurație d^7 cu înconjurare octaedrică.*
Cuvinte cheie: Complecși ioni cobalt II, interpretare spectre

INTRODUCERE

În această lucrare ne-am propus să studiem două reacții chimice de sinteză și transformare a unor combinații complexe și să explicăm cu ajutorul teoriilor moderne, Teoria legăturii de valență, Teoria câmpului cristalin și Teoria orbitalilor moleculari, proprietățile fizice și chimice ale acestora [1].

Clorura de cobalt se prezintă sub forma unui cristalohidrat de culoare roșie cu formula chimică $CoCl_2{\cdot}6H_2O$. Este unul dintre cei mai comuni compuși ai cobaltului folosiți în laborator. Culoarea clorurii de cobalt diferă de la forma hidratată sau la forma anhidră; Forma hidratată, sau clorura de cobalt hexahidratată ($CoCl_2{\cdot}6H_2O$), are culoarea roșu închis, vișinie. În schimb, forma anhidră, fără niciun pic de apă în compoziția sa, este de culoare albastru deschis. Datorită ușurinței reacției de hidratare/deshidratare și a schimbării rezultate a culorii, clorura de cobalt este utilizată ca indicator al apei din desecanți. Compusul formează mai mulți hidrați $CoCl_2{\cdot}nH_2O$, dar pentru noi cei mai atractivi în această lucrare sunt cei de forma, $CoCl_2{\cdot}2H_2O$. Sarea anhidră este higroscopică, iar hexahidratul este delicvescent [2].

Interesul nostru pentru acest compus este legat de faptul că cele șase molecule de apă considerate apă de cristalizare sunt în realitate molecule de apă aflate în sfera de coordinare a cationului de Co(II), care apare ca fiind hexacoordinat, de tipul $[Co(H_2O)_6]Cl_2$. Cei șase atomi donori de perechi de electroni ai oxigenului din moleculele de apă imprimă soluției o culoare roșie.

Altfel se vede că stau lucrurile în cazul în care clorura de cobalt cristalohidrat este solidă, când culorile pot să fie de tip fucsia sau vișinii. Acest lucru este posibil datorită faptului că în sfera de coordinare a ionului de cobalt pot să intre și cei doi anioni clorură din formula chimică. Cel mai probabil acestor compuși li se atribuie o structură asemănătoare cu cea a unui izomer trans în care cei doi anioni Cl^- sunt un poziții opuse în sfera de coordinare a ionului de Co(II). Colorațiile cu tentă violet sunt asociate cu formele complexe de tip cis-$[Co(H_2O)_4Cl_2]$ și trans-$[Co(H_2O)_4Cl_2]$. Unele studii structurale propun posibilitatea de formare de lanțuri tridimensionale în care cei doi anioni clorură, Cl^-, sunt legați în punte între cationii de Co(II) [3].

Figura 1. Clorură de cobalt anhidră (albastră) și hidratată (roșu-violet)

Acest model tridimensional de lanțuri lungi cu anioni clorură în punte între doi cationi de Co(II) fac posibilă o interpretare a structurii clorurii de cobalt anhidre de culoare albastră în termenii unei înconjurări tetraedrice a fiecărui atom de Co(II), în care anionii clorură sunt atașați parțial coordinativ de acesta și face posibilă scrierea unui dimer de tipul $(CoCl_2)_2$ sub forma $Co[CoCl_4]$. În forma aceasta se poate lua în considerare un anion de tipul $[CoCl_4]^{-2}$ ca cel care se obține la tratarea unei soluții de clorură de cobalt cu o soluție de HCl concentrat așa cum se poate observa în reacția următoare [4]:

$$[Co(H_2O)_6]Cl_2 + 2HCl\ cc. \rightleftharpoons H_2[CoCl_4] + 6H_2O \qquad (1)$$

Și în cadrul acestei reacții chimice efectuate în eprubetă soluția roz de clorură de cobalt devine albastră, ca și $CoCl_2$ anhidră, datorită formării anionului complex $[CoCl_4]^{-2}$. Se mai poate observa în reacția de echilibru de mai sus că forma anionică $[CoCl_4]^{-2}$ este stabilă în mediu acid, iar adăugarea de apă, deci scăderea tăriei acide și implicit creșterea pH-ului deplasează echilibrul spre refacerea acvacomplexului roz, $[Co(H_2O)_6]^{+2}$. În schimb o readăugare de HCl concentrat poate conduce la refacerea anionului albastru tetracoordinat, $[CoCl_4]^{-2}$, conform principiului lui Le Chatelier pentru reacții de echilibru în soluție [5].

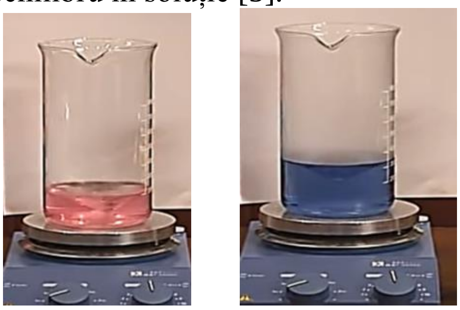
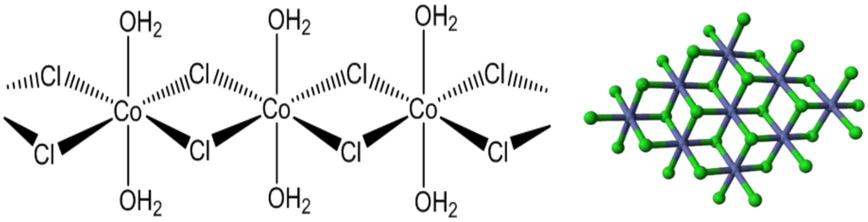


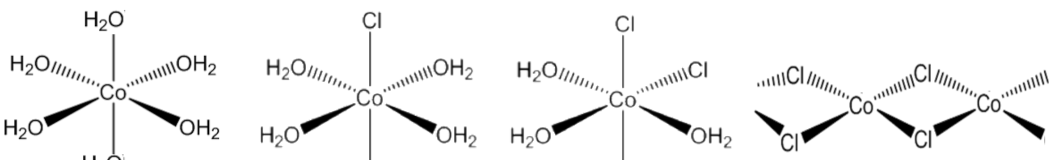
Figura 2. Obținerea anionului $[CoCl_4]^{-2}$ din $[Co(H_2O)_6]^{+2}$

Structurile formelor complexe discutate pentru clorura de cobalt anhidră și hidratata sunt prezentate în imaginile de mai jos:



https://www.chm.bris.ac.uk/motm/cobalt-chloride/cobalt-chlorideh.htm

Figura 3. Structuri tridimensionale pentru $[Co(H_2O)_4Cl_2]$ violet și $CoCl_2$ anhidru



$[Co(H_2O)_6]Cl_2$ roșu | *trans*-$[CoCl_2(H_2O)_4]$ fucsia | *cis*-$[CoCl_2(H_2O)_4]$ violet | $CoCl_2$ albastru

Figura 4. Geometrii structurale pentru $CoCl_2 \cdot 6H_2O$ și $CoCl_2 \cdot 4H_2O$

Prin experimentul următor încercăm să argumentăm discuțiile purtate mai sus cu privire la comportarea $CoCl_2 \cdot 6H_2O$ și a produșilor săi deshidratați și să arătăm că este vorba de combinații complexe.

PARTE EXPERIMENTALĂ

Se cântărește pe balanță o probă de aproximativ 5 g de clorura de cobalt (m_i) fin mojarată, se trece într-o capsulă de porțelan și se deshidratează la cald pe reșoul electric. Se va observa virarea culorii de la roșu, la nuanțe de violet și apoi în final, la albastru. Se va recântări varianta albastră deshidratata (m_f). Din diferența de masă se va determina cantitatea de apă pierdută prin deshidratare, așa numitele molecule de apă de cristalizare. Se poate vedea că la răcire proba de clorură de cobalt începe să se hidrateze cu vaporii de apă din aer, trecând din nou de la albastru, la violet și în final la roșu, ceea ce înseamnă că clorura de cobalt anhidră este o substanță higroscopică.

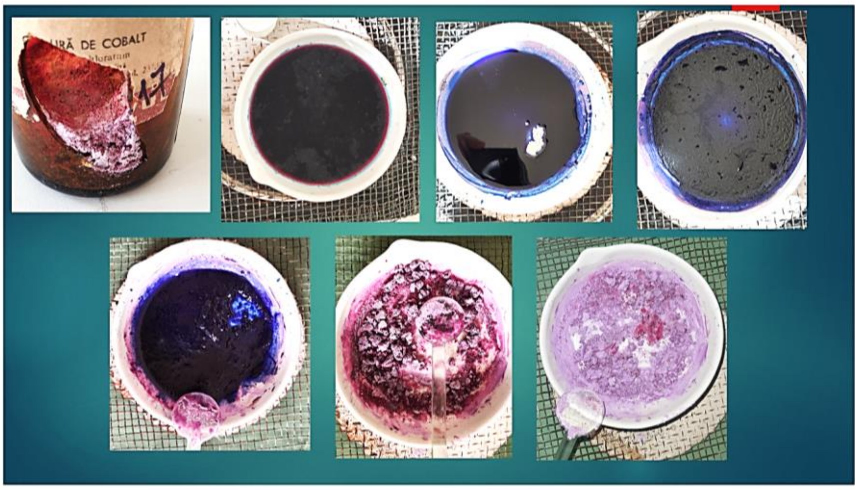


Figura 5. Etape ale deshidratării clorurii de cobalt cristalizate

Când se obține clorura de cobalt anhidră de culoare albastră, reacția chimică asociată acestui proces este :

$$CoCl_2 \cdot 6H_2O \overset{t\,^\circ C}{\Leftrightarrow} CoCl_2 + 6H_2O \quad (2)$$

În cazul unei deshidratări parțiale se obține un compus de culoare violet pentru care reacția de deshidratare este:

$$CoCl_2 \cdot 6H_2O \overset{t\,^\circ C}{\Leftrightarrow} CoCl_2 \cdot 2H_2O + 4H_2O \quad (3)$$

Clorura de cobalt este folosită pentru colorarea granulelor de silicagel utilizate la uscare, cu rol sicativ în exsicatoare, ca marcator a gradului de hidratare a acestora. Când silicagelul este uscat și eficient, granulele sunt albastre, iar când silicagelul e plin de apă absorbită din atmosferă, granulele sunt roz și trebuie uscate pentru eficientizare. Uscarea granulelor de silicagel se realizează în etuvă la 105-110 °C [6].

REZULTATE ȘI DISCUȚII

1. *Determinarea numărului de molecule de apă pierdute prin deshidratare*

Pentru a determina numărul de molecule de apă de cristalizare pierdute la încălzire s-a procedat astfel:

- s-a determinat numărul de moli de cristalohidrat din proba inițială

$$n_i = \frac{m_i}{M_{cristalohidrat}} \quad (4)$$

- s-a calculat pierderea de masă, considerând că provine doar de la apa care a părăsit sistemul:

$$m_{H_2O} = m_f - m_i \quad (5)$$

- s-a calculat numărul de moli de apă pierduți şi asociați cele două rezultate pentru a obține formula corectă a cristalohidratului.

$$n_{H_2O} = \frac{m_{H_2O}}{M_{H_2O}} = \frac{m_{H_2O}}{18} \quad (6)$$

- se determină numărul de molecule de apă pierdute prin deshidratare sunt:

$$Molecule\ de\ apă\ pierdute\ \ n = \frac{n_{H_2O}}{n_i} \quad (7)$$

Rezultatele obținute în urma calculelor sunt trecute în tabelul de mai jos

Tabel 1. Determinarea numărului de molecule de apă pierdute prin deshidratare de $CoCl_2 \cdot 6H_2O$

Sare	$CoCl_2 \cdot 6H_2O$ ($M_{CoCl_2 \cdot 6H_2O=238\ g/mol}$)
Experiment	2
$m_{capsulă}$ (g)	73,76
m_i (g)	5
$m_{capsulă}+ m_f$ (g)	76,48
m_f (g)	2,72
$m_{apă}$ (g) = mf -mi	2,28
n_{H_2O} $(moli)$ =m apă/18	0,127
n_i (moli) =mi/M	0,021
n_f (moli)=ni	0,021
n (molecule de apă pierdute)=n apă/ni	6
N molecule apă rămase	0
Formulă moleculară produs	$CoCl_2$

Atât calculele, cât și experimentul desfășurat au dovedit existența a 6 molecule de apă în forma de tip cristalohidrat de culoare roșie, $CoCl_2 \cdot 6H_2O$, în care există cationul complex de tip $[Co(H_2O)_6]^{+2}$, și o formă anhidră $CoCl_2$ fără molecule de apă care poate conține asocieri de tipul unui anion tetracoordinat albastru, $[CoCl_4]^{-2}$. Pe parcursul transformărilor a fost semnalizată și prezența unui compus de culoare violet pe care l-am atribuit unui complex de tipul $[Co(H_2O)_4Cl_2]$.

2. Analiza structurilor complecșilor $CoCl_2$ conform teoriilor moderne

În această parte ne-am propus să lansăm o discuție cu privire la structura compușilor , la modul de realizare a legăturilor coordinative pe baza Teoriilor legăturii de valență (TLV), Teoriei câmpului cristalin (TCC) și Teoriei orbitalilor moleculari (TOM) [7].

Conform Teoriei legăturii de valență ionul de Co(II) din clorura de cobalt este un ion cu o configurație electronică de tip d^7, în care distribuția electronilor în orbitalii de tip d s-ar face în modul următor, atât în cationul $[Co(H_2O)_6]^{+2}$, cât și în complexul $[Co(H_2O)_4Cl_2]$:

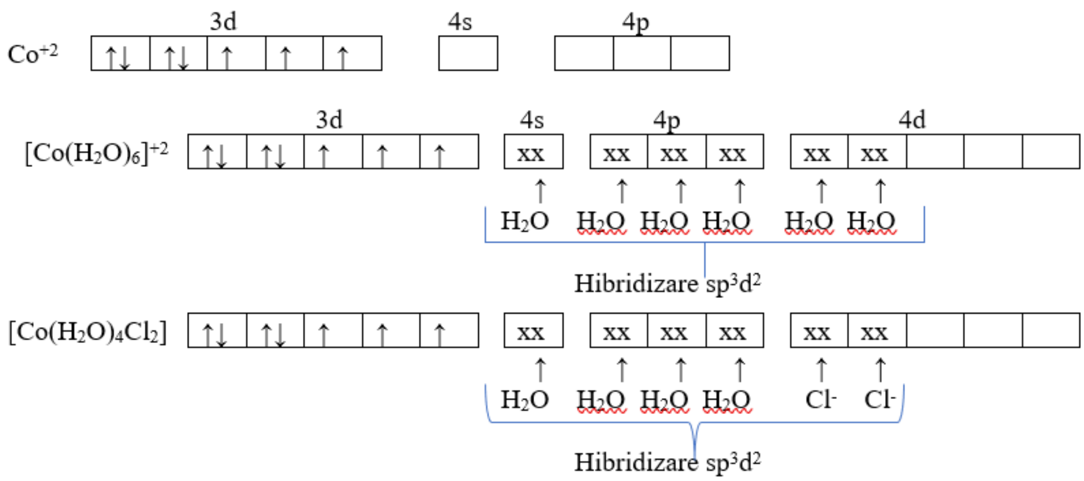


Figura 6. Configurațiile electronice realizate pentru complecșii $[Co(H_2O)_6]^{+2}$ și $[Co(H_2O)_4Cl_2]$ conform TLV

Conform teoriei TLV cei doi complecși sunt hibridizați d^2sp^3, ceea ce înseamnă că geometria de coordinare este una de tip octaedric în jurul ionului de Co(II), fiecare moleculă de apă donează câte o pereche de electroni. Prezența a trei electroni desperecheați arată că acești complecşi sunt paramagnetici, cu un moment magnetic diferit de zero. Prezența paramagnetismului explică și culoarea acestor doi complecși.

Totuşi cei doi complecşi au culori diferite. Cationul $[Co(H_2O)_6]^{+2}$ este roşu ceea ce înseamnă că absoarbe lumina în jur de 490 nm, în timp ce complexul $[Co(H_2O)_4Cl_2]$ este violet şi absoarbe lumina la 570 nm, la lungimi de undă mai mari, deci la frecvențe mai mici. Tranzițiile electronice cele mai probabile sunt de tip d→d între orbitalii d ocupați cu electroni ai cationului de Co(II). Aceasta arată că orbitalii d ai ionului de Co(II) în cei doi complecşi nu sunt echivalenți din punct de vedere energetic și că există o scindare datorată câmpului cristalin octaedric creat de cei şase liganzi orientați de-a lungul axelor de coordonate. Cu cât distanța dintre cele două nivele de orbitali d este mai mare, cu atât cantitatea de energie necesară saltului electronic din orbitalii t_{2g} de energie mai joasă în orbitalii e_g de energie mai înaltă se face mai greu, și complexul absoarbe lumina la lungimi de undă mai mici [8].

Pentru ambii complecşi, câmpul creat de liganzi este unul slab şi sunt două situații de spin înalt, cu un număr minim de electroni împerecheați. Diferențele de Do între cei doi complecşi sunt sugerate în schemele de mai jos:

$[Co(H_2O)_6]^{+2}$ (roşu) - 490 nm $[Co(H_2O)_4Cl_2]$ (violet) – 570 nm

Figura 7. Scindarea orbitalilor d în câmp octaedric de liganzi pentru $[Co(H_2O)_6]^{+2}$ şi $[Co(H_2O)_4Cl_2]$

Energia de scindare în câmp cristalin octaedric pentru ionul de Co(II) cu 5 electroni în T_{2g} şi 2 electroni în E_g are valoarea:

$$\textbf{ESCC} = (-0{,}4\cdot 5 + 0{,}6\cdot 2)\cdot D_o = (-2{,}0+1{,}2)\cdot Do = -0{,}8Do \quad (8)$$

Acest rezultat ne arată că electronii în urma complexării vor ocupa o poziție energetică mai joasă, mai stabilă comparativ cu ionul de Co(II) liber, iar cu cât valoarea parametrului de scindare Do este mai mare, cu atât stabilitatea complexului este mai ridicată. În acest caz echilibrul este favorabil acvacomplexului, aşa cum s-a putut observa şi din experimentul efectuat.

Conform schemei Teoriei orbitalilor moleculari (TOM) aplicată pentru cei doi complecşi situația va părea din nou asemănătoare, dar se va putea observa din nou prezența a două nivele energetice rezultate în cadrul orbitalilor d ocupați cu electroni ai ionului de Co(II). Avantajul acestei teorii este că face interpretabile salturile de electroni permise conform studiilor efectuate în spectroscopia UV-VIS şi permite de asemenea să se afle factorul de scindare în câmp cristalin octaedric pe baza poziției maximelor de absorbție obținute în aceste spectre [9].

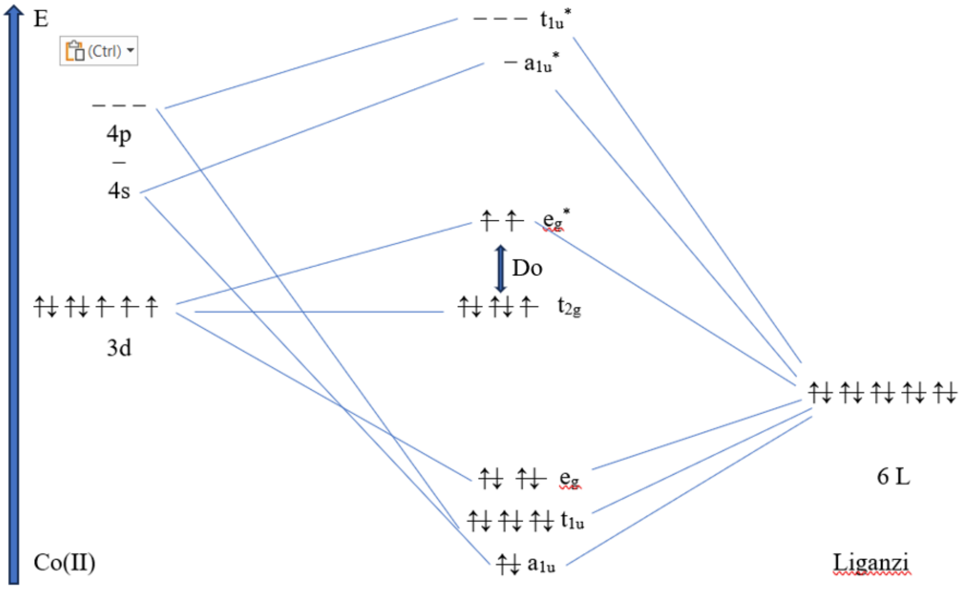


Figura 8. Distribuția electronilor pe orbitalii moleculari conform TOM pentru complecșii $[Co(H_2O)_6]^{+2}$ și $[Co(H_2O)_4Cl_2]$

În cazul anionului complex $[CoCl_4]^{-2}$, ionul de Co(II) este tetracoodinat de un ligand Cl^- caracterizat atât în TLV, cât și în TCC d proprietatea sa de a realiza un câmp slab de liganzi, adică un câmp în care scindarea orbitalilor d este foarte redusă, păstrându-se aranjarea electronilor din cationul inițial Co(II) de configurație electronică d^7.

Așa cum se poate observa în figura de mai jos, conform configurației electronice în TLV pentru anionul $[CoCl_4]^{-2}$, acceptarea perechilor de electroni provenite de la liganzii Cl^- se face în orbitalii hibrizi vacanți cu energia cea mai joasă și se ajunge la o stare de hibridizare sp^3 caracteristică unui complex tetracoordinat (N.C.=4).

În cazul unor liganzi orientați tetraedric în jurul cationului central de Co(II), aceștia creează un câmp repulsiv mai puternic între axele de coordonate, astfel că orbitalii d cu energie mai joasă vor fi orbitalii d orientați de-a lungul axelor de coordonate, $d_{x^2-y^2}$ și d_{z^2}. Acești doi orbitali formează nivelul de energie mai joasă E, iar ceilalți trei orbitali cu lobii aflați între axe, d_{xy}, d_{xz} și d_{yz} constituie nivelul energetic T_2 de energie mai înaltă.

Acest tip de scindare a orbitalilor d este specific înconjurării tetraedrice și este 4/9 din scindarea caracteristică unei înconjurări octaedrice cu 6 liganzi. Această diferență este datorată unei poziții mai îndepărtate ca orientare în spațiu a celor 4 liganzi față de de orbitalii d ai cationului metalic central și datorită faptului că un câmp repulsiv creat de 6 perechi de electroni este mult mai puternic decât unul realizat doar de 4 perechi de electroni.

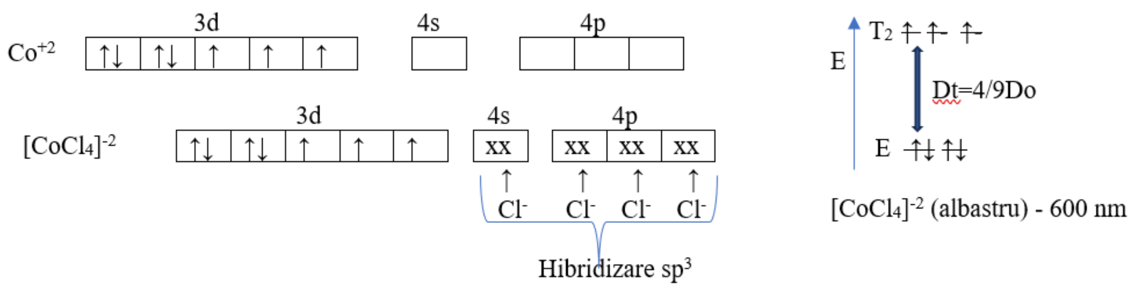


Figura 9. Configurația electronică conform TLV și scindarea orbitalilor d conform TCC pentru anionul complex $[CoCl_4]^{-2}$

Din configurația TLV a ionului $[CoCl_4]^{-2}$ rezultă că ionul prezintă paramagnetism și este colorat, dar culoarea albastră poate fi explicată doar de tranzițiile d→d care apar datorită despicării energetice a orbitalilor 3d ai Co(II) datorită câmpului cristalin creat de cei 4 liganzi, anionii clorură. Acest complex prezintă un maxim de absorbție, deci o tranziție electronică la o lungime de undă mai mare, ceea ce înseamnă că această tranziție necesită o energie mai mică decât în cazul celorlalți doi complecși ai Co(II) discutați deja. Această diferență este datorată pe de o parte câmpului cristalin mai slab în câmp tetraedric decât în câmp octaedric, iar pe de altă parte datorită tăriei mai slabe în crearea de câmp cristalin a anionilor clorură decât a moleculelor de apă.

Energia de scindare în câmp cristalin tetraedric pentru ionul de Co(II) cu 4 electroni în E și 3 electroni în T_2 are valoarea:

ESCC = (-0,6·4 + 0,4·3)·Dt = (-2,4+1,2) ·Dt = -1,2Dt (9)

Din nou se obțin nivele cu energie mai joasă în urma complexării cationului de Co(II) comparativ cu cationul de Co(II) liber, stabilizarea e mai mare decât în cazul câmpului octaedric pentru același ion, dar să nu uităm că valoarea parametrului de scindare Dt este 4/9Do, altfel zis mai puțin de jumătate din valoarea parametrului de scindare în câmp octaedric.

3. Analiza spectrală a complecșilor de Co(II)

Spectrul UV-VIS al unei soluții apoase de culoare roz de $CoCl_2·6H_2O$ este de fapt un spectru al ionului complex hexaacvacobalt (II), $[Co(H_2O)_6]^{+2}$, în care maximele de absorbție corespunzătoare tranzițiilor electronice permise se pot observa în imaginea de mai jos [10]:

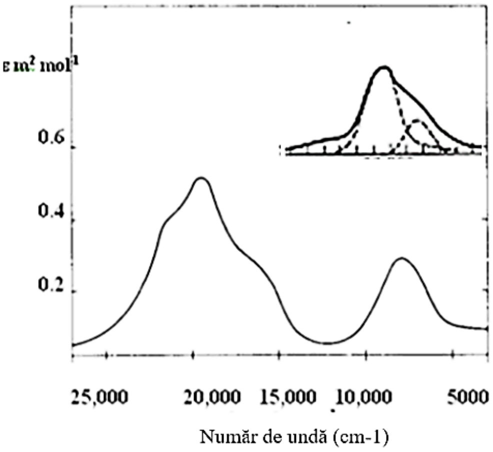


Figura 10. Spectrul UV-VIS al ionului acvacomplex de Co(II), $[Co(H_2O)_6]^{+2}$

În imaginea din dreapta sus din Fig. 10 se poate vedea că umerii semnalului intens de la 19400 cm^{-1} prezintă un umăr la 16000 cm^{-1}, în care se ascunde un maxim de absorbție mascat de semnalul mai intens. Acestora li se vor atribui două tranziții diferite ca intensitate, așa cum se va observa în discuțiile următoare.

Conform diagramei Orgel tranzițiile electronice permise în câmp octaedric de liganzi pentru ionii de Co(II) cu configurația d^7 pe stratul de valență sunt prezentate în figura următoare:

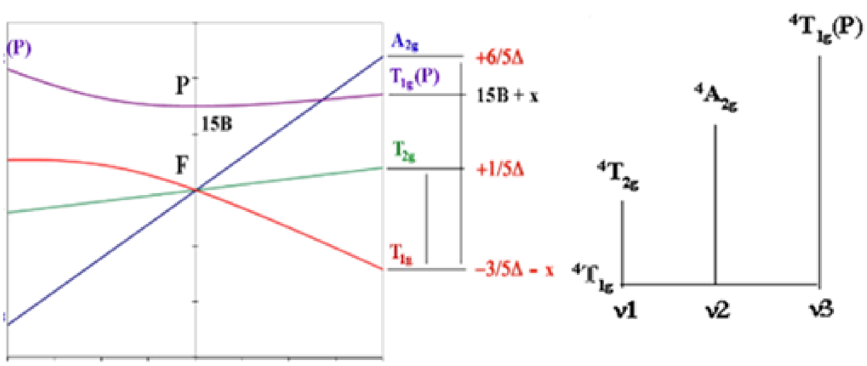


Figura 11. Diagrama Orgel cu tranzițiile electronice permise pentru cationul de Co(II) cu configurație electronică d^7

Așa cum se poate observa în partea dreaptă a figurii de mai sus, pentru ionul de Co(II) s-au înregistrat următoarele tranziții permise, care sunt însoțite de următoarele observații [11]:
ν_1 $^4T_{2g}$ (F) ←$^4T_{1g}$ (F) (8100 cm^{-1}) corespunde la 8Dq
ν_2 $^4A_{2g}$ (F) ←$^4T_{1g}$ (F) (16000 cm^{-1}) –
ν_3 $^4T_{1g}$ (P) ←$^4T_{1g}$ (F) (19400 cm^{-1}) – are tendință de scindare datorită unui nivel energetic apropiat lui $^4T_{1g}$ (P) sau datorită efectului Jahn-Teller în cadrul termenului $^4T_{1g}$ (P).

În ionul octaedric $[Co(H_2O)_6]^{2+}$ se observă o bandă în jurul valorii de 8000 cm^{-1} și o bandă largă cu centrul maxim în jur de 20000 cm^{-1} (ε al acestei benzi este sub 1 m^2 mol^{-1}).

Banda de cea mai joasă energie corespunde tranziției $^4T_{2g}$ ← $^4T_{1g}$, căreia i se atribuie benzile de la 16000, 19400 și 21600 cm^{-1}. O altă variantă din literatură susține că tranziția $^4T_{1g}$(P) ← $^4T_{1g}$ are loc la 19400 cm^{-1} și de ea ar fi agățată tranziția $^4A_{2g}$ ← $^4T_{1g}$, care are loc la 16000 cm^{-1}. Banda de la 21600 cm^{-1} este datorată efectelor spin-orbită.

Δ (Dq) ~ 16000 cm^{-1} și B ~ 900 cm^{-1}.

Δ/B=9000/900=10

Tărie câmp complecși în funcție de raportul Δ/B

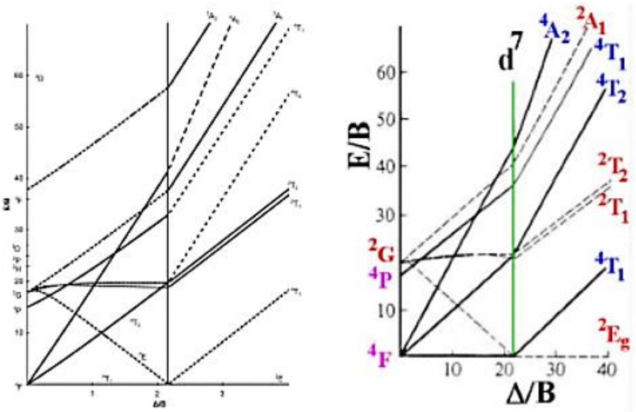


Figura 12. Diagrama Tanabe-Sugano pentru cation d^7 de Co(II) din acvacomplex, înconjurat octaedric

S-a încercat să se determine parametrii E/B, Dq/B (Δ/B) și B știind că Dq =900 cm^{-1} (iar Do=10Dq=9000 cm^{-1}) și valorile energiilor benzilor de tranziție E_1, E_2, E_3 pentru $[Co(H_2O)_6]^{2+}$. Atunci:

E_1/B=8100/900=9 pentru tranziția ν_1 $^4T_{2g}$ (F) ←$^4T_{1g}$ (F) (8100 cm^{-1})
E_2/B=16000/900=17,8 pentru tranziția ν_2 $^4A_{2g}$ (F) ←$^4T_{1g}$ (F) (16000 cm^{-1})
E_3/B=19400/900=194/9=21,5 pentru tranziția ν_3 $^4T_{1g}$ (P) ←$^4T_{1g}$ (F) (19400 cm^{-1})

În diagrama de mai jos pe baza valorilor rapoartelor E/B a rezultat că cea mai bună valoare pentru Dq/B este 0,9, astfel că pentru B=900 cm^{-1} se obține Dq=900*0,9=810 cm^{-1}, adică iese Do=10Dq=810 cm^{-1}=E_1, o situație ideală. (În lucrare s-a propus Dq/B=900/900=1,0)

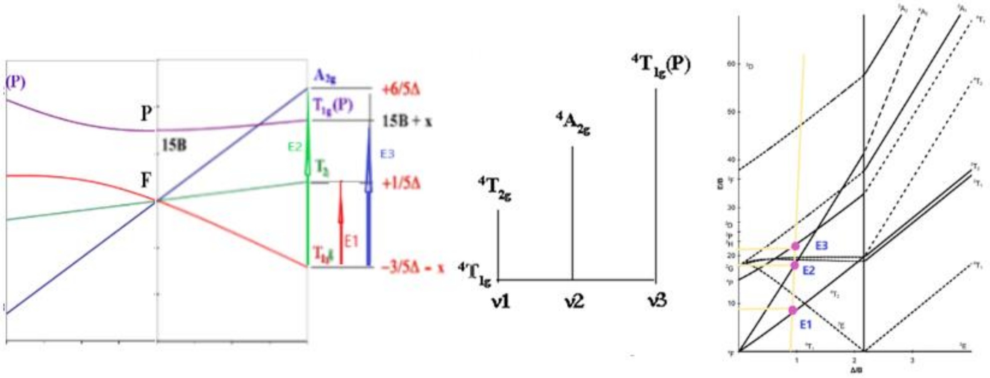


Figura 13. Determinarea factorului de scindare în câmp octaedric Do pe baza diagramelor reunite Orgel și Tanabe-Sugano pentru cation d^7 de Co(II) din acvacomplex, înconjurat octaedric

CONCLUZII

Clorura de cobalt se prezintă ca un ion complex atât în soluție apoasă. Cât și în stare solidă, diferențele de culoare fiind datorate modificării tipului de liganzi din sfera de coordinare. Aceste schimbări de culoare pot fi observate cu ochiul liber și pot fi confirmate teoretic cu ajutorul Orgel și Tanabe-Sugano se poate calcula factorul de scindare în câmp octaedric de liganzi.

BIBLIOGRAFIE

[1]Fodor, A. (2005). Introducere în chimia combinaţiilor complexe, Ed. Univ. Din Oradea

[2]Cotton, F.A., Wilkinson, G.,Gaus, P.L (1995). Basic Inorganic Chemistry, IIIrd Edition, John Wiley and Sons, Inc. New York

[3]Stoian, C. (2018). Chimia elementelor metalice. Lucrări practice, ed. a III-a revizuită şi adăugită, Editura PIM, Iaşi,

[4]https://rucore.libraries.rutgers.edu/rutgers-lib/55296/PDF/1/play/

[5]Fox, T., Berke, H. (2014). The Color of Complexes and UV-Vis Spectroscopy as an Analytical Tool of Alfred Werner's Group at the University of Zurich, Chimia, Vol. 68 (5), pp. 307-311

[6]https://www.sciencedirect.com/topics/chemistry/coordination-chemistry

[7]Cotton, F.A., Wilkinson, G.,Gaus, P.L. (1995). Basic Inorganic Chemistry, , 3rd edition, John Wiley and Sons, Inc. New York

[8]https://uomustansiriyah.edu.iq/media/lectures/6/6_2021_09_15!08_19_16_PM.pdf

[9]Lever, A.B.P. (1984). Inorganic Electronic Spectroscopy, , 2nd Edition, Elsevier Publishing Co., Amsterdam

[10]https://people.bath.ac.uk/gp304/uv/UV-Vis_-_D._Ferri.pdf

[11]Figgis, B.N., Hitchman, M.A. (2000). Ligand Field Theory and its applications, Wiley-VCH, New Yor

[12]Reber, C. (2008). Absorption and luminescence spectroscopy of transition metal compounds: from coordination geometries to excited-state properties, Canadian Journal of Analytical Sciences and Spectroscopy, Vol. 53(3), pp. 91-101

DISCUȚII SPECTRALE ȘI STRUCTURALE ÎN CHIMIA COMPLECȘILOR IONULUI DE NICHEL (II)

Ioana-Anca MOLNAR[1], Mihai MOLNAR[1], Anda Ioana Grațiela PETREHELE[2], Claudia-Mona MORGOVAN[2]

[1]studenți licență Chimie anul III, Facultatea de Informatică și Științe, Universitatea din Oradea
[2]profesori coordonatori, Departamentul de Chimie, Facultatea de Informatică și Științe, Universitatea din Oradea

Rezumat: *În această lucrare s-au analizat modificările care apar din punct de vedere structural și spectral la substituirea moleculelor de apă din sfera de coordinare a acvacomplexului clorurii de nichel cu molecule de amoniac. Ambii complecşi, $[Ni(H_2O)_6]^{2+}$ și $[Ni(NH_3)_6]^{2+}$ sunt hexacoordinați și au o geometrie octaedrică, dar schimbările de culoare arată că ionii de nichel au un comportament diferit în funcție de natura ligandului coordinat. Au fost analizate comparativ configurațiile electronice a celor doi ioni abordate din punct de vedere al teoriilor moderne a legăturii coordinative. S-a determinat factorul de scindare a orbitalilor d în câmp cristalin și s-au anlaizat spectrele lor UV-VIS si s-au atribuit maximele de absorbție tranzițiilor electronice permise.*

Cuvinte cheie: Complecşi de nichel II, interpretari spectre

INTRODUCERE

Compușii coordinativi conțin un atom sau un ion central, de obicei un metal, înconjurat de mai mulți ioni sau molecule. Complexul tinde să își păstreze identitatea chiar și în soluție, deși poate apărea disocierea parțială. Acest complex poate fi un cation, un anion sau neionic, în funcție de suma sarcinilor atomului central cu cele ale ionilor sau moleculelor din sfera de coordinare [1].

Compușii coordinativi joacă un rol esențial în industria chimică și în viața însăși. Importanța complecșilor metalici devine clară atunci când ne dăm seama că acea clorofilă, care este vitală pentru fotosinteza plantelor, este un complex de magneziu și că hemoglobina, care transportă oxigenul către celulele animale, este un complex al fierului. Natura și proprietățile complecșilor metalelor sunt un obiectul de studiu și cercetare de mulți ani deja, dar continuă să ridice semne de întrebare și să incite curiozitatea cercetătorilor chimiști din întreaga lume. Unul dintre primele premii Nobel care au fost acordate, a fost cel primit de Alfred Werner în 1913 pentru dezvoltarea conceptelor de bază ale chimiei coordinative [2].

În această lucrare atenția este îndreptată asupra studiului structural a cristalohidratului de clorură de nichel, cu formula moleculară, $NiCl_2{\cdot}6H_2O$. În soluție apoasă și în acest caz avem un acvacomplex hexacoordinat de Ni(II), de forma $[Ni(H_2O)_6]^{2+}$. Se urmărește de asemenea comportarea acestuia în urma reacției cu amoniacul în mediu acid , când moleculele de apă din sfera de coordinare a Ni(II) sunt înlocuite cu molecule de amoniac [3].

Ecuaţia reacţiei chimice care are loc este:

$$[Ni(H_2O)_6]Cl_2 + 6NH_4OH \rightleftharpoons [Ni(NH_3)_6]Cl_2 + 6H_2O \quad (10)$$

Reacția decurge uşor, iar la adăugarea în picături a unei soluții diluate de amoniac într-o soluție apoasă de cationi de Ni(II) se observă migrarea culorii de la verde, caracteristic acvacomplexului $[Ni(H_2O)_6]^{2+}$ la albastru specific ionului hexaaminocomplex $[Ni(NH_3)_6]^{2+}$.

Figura 1. Obținerea complexului $[Ni(NH_3)_6]Cl_2$

Vor fi discutate probleme structurale abordate cu ajutorul teoriilor moderne ale legăturii coordinative, ca Teoria legăturii de valență (TLV), Teoria câmpului cristalin (TCC) și Teoria orbitalilor moleculari (TOM) și vor fi analizate diferențele dintre cei doi ioni complecși și din punct de vedere spectral prin analiza tranzițiilor electronice din UV-VIS, determinându-se factorul de scindare dintre orbitalii d prin interpretarea datelor din diagramele Orgel și Tanabe-Sugano pentru un cation cu configurație d^8 în câmp octaedric [4].

PARTE EXPERIMENTALĂ

Se cântăresc 6 g de clorură de nichel ($NiCl_2{\cdot}6H_2O$) (de fapt $[Ni(H_2O)_6]Cl_2$) la balanţa farmaceutică. Sarea se dizolvă într-un pahar Berzelius de 50 ml în 10 ml apă distilată, la cald, sub agitare. Dacă soluţia nu este limpede se acidulează cu câteva picături de acid clorhidric (HCl) diluat. Soluţia se lasă să se răcească la temperatura camerei, se aşează pe baie de gheaţă şi se adaugă în picături sub agitare 12 ml soluţie de hidroxid de amoniu (NH_4OH) concentrat, răcit în prealabil pe baie de gheaţă sau ţinut la frigider. Amestecul de reacţie se lasă să se răcească pe baie de gheaţă. Cristalele obţinute se filtrează la instalaţia de filtrare la vid, se spală cu câţiva mililitri de soluţie amoniacală răcită pe baie de gheaţă, apoi cu o soluţie apoasă concentrată de amoniac, cu o soluţie alcoolică de amoniac şi în final cu alcool pur. Produsul se usucă la instalaţia de filtrare la vid (cristalele se tasează pe hârtia de filtru cu partea plană a unui dop de sticlă, până ce nu se mai scurge nici o picătură de filtrat, sub acţiunea vidului). Cristalele de complex obţinute se trec pe o sticlă de ceas şi se cântăresc. Compusul coordinativ $[Ni(NH_3)_6]Cl_2$ se descompune la încălzire, de aceea el trebuie să fie uscat cu precauţie la o temperatură de cel mult 40°C. La aer, sarea se descompune treptat, pierzând amoniac, de aceea ea trebuie păstrată într-un borcan bine închis [5].

Figura 2. Etapele ale sintezei $[Ni(NH_3)_6]Cl_2$

REZULTATE ȘI DISCUȚII

1. Analiza structurilor complecșilor $[Ni(H_2O)_6]Cl_2$ și $[Ni(NH_3)_6]Cl_2$

Ionul de Ni(II) are o configurație pe stratul de valență de tip d^8, iar configurațiile electronice obținute conform TLV în urma legării a șase liganzi în cei doi cationi complecși $[Ni(H_2O)_6]^{+2}$ și $[Ni(NH_3)_6]^{+2}$ sunt prezentate în Fig. 3. Situația celor doi complecși este similară, perechile de electroni donate de cei 6 liganzi ocupă în ambele situații orbitalii hibrizi vacanți 4s, 4p și 4d conducând la o situație de hibridizare sp^3d^2, specifică geometriilor octaedrice. La ionii complecși ai Ni(II) există electroni liberi necuplați în configurația finală (doi electroni) ceea ce indică prezența paramagnetismului și explică culoarea intensă a acestor compuși [6].

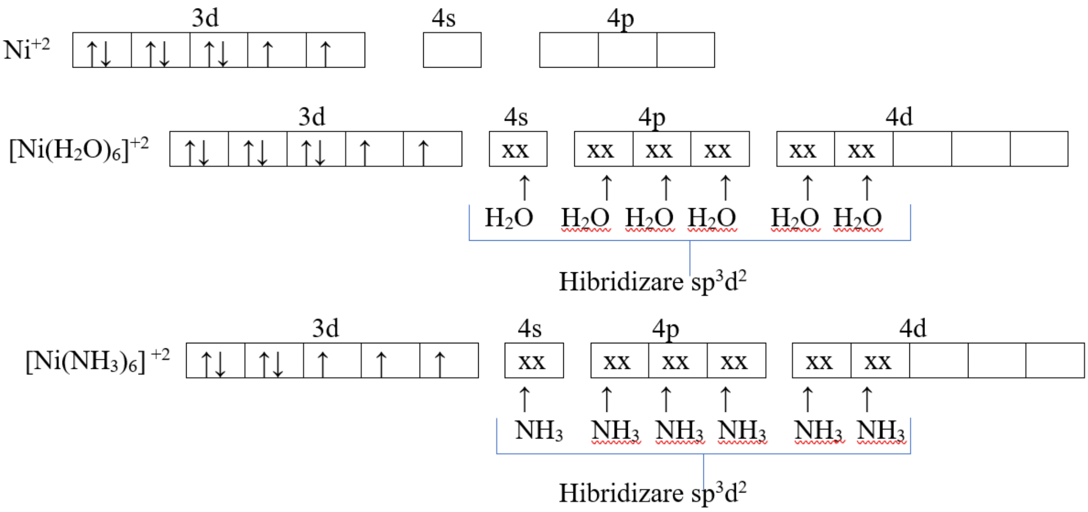


Figura 3. Configurațiile electronice realizate pentru complecșii $[Ni(H_2O)_6]^{+2}$ și $[Ni(NH_3)_6]^{+2}$ conform TLV

Așa cum se poate observa, electronii ionului de Ni(II) și-au păstrat poziția inițială ca în ionul simplu, fără să aibă loc împerecherea lor în ciuda faptului că moleculele de amoniac acționează ca un ligand puternic. Acest comportament poate fi explicat numai cu ajutorul TCC care ne arată cum se realizează ocuparea cu electroni a celor două nivele de orbitali d scindate în câmp octaedric.

Din nou avem de-a face cu doi complecși de culori diferite, $[Ni(H_2O)_6]^{+2}$ verde ceea ce arată că trebuie să prezinte un maxim de absorbție la 720 nm, în timp ce soluția albastră de $[Ni(NH_3)_6]^{+2}$ absoarbe la 570 nm. Știind că lungimile de undă variază invers proporțional cu numărul de undă și cu energia necesară tranziției electronice de pe nivelul inferior pe cel superior, rezultă că parametrul de scindare Do pentru complexul amoniacal va fi mai mare decât cel pentru acvacomplex, dar așezarea electronilor pe cele două nivele ale orbitalilor d, T_{2g} și Eg, va rămâne identică pentru ambii complecși [7].

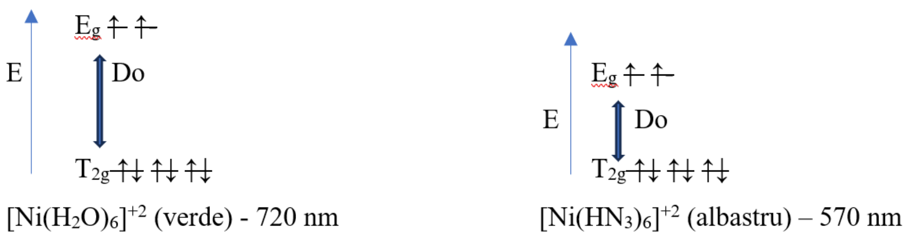


Figura 4. Scindarea orbitalilor d în câmp octaedric de liganzi pentru $[Ni(H_2O)_6]^{+2}$ și $[Ni(NH_3)_6]^{+2}$ conform TCC

Energia de scindare în câmp cristalin octaedric pentru ionul de Ni(II) cu 6 electroni în T_{2g} și 2 electroni în E_g are valoarea:

$$\mathbf{ESCC} = (-0{,}4\cdot 6 + 0{,}6\cdot 2)\cdot D_o = (-2{,}4+1{,}2)\cdot Do = -1{,}2Do \quad (8)$$

Această energie de scindare este foarte mare pentru ambii compuși și arată o stabilizare energetică a ionilor de Ni(II) în urma coordinării liganzilor. Energia de scindare depinde și de valoarea parametrului de scindare Do, care va fi mai mare în cazul coordinării moleculelor de amoniac, liganzi care creează un câmp mai puternic decât moleculele de apă.

Structurile octaedrice propuse pentru cei doi compuși arată în felul următor. O geometrie octaedrică este o bipiramidă cu bază pătrată și este forma geometrică cea mai ordonată și cea mai des întâlnită pentru compuși cu șase poziții de coordinare. În acești doi complecși fiecare ligand donează o singură pereche de electroni ionului central de Ni(II), iar numărul de coordinare (NC=6) coincide cu numărul de liganzi [8].

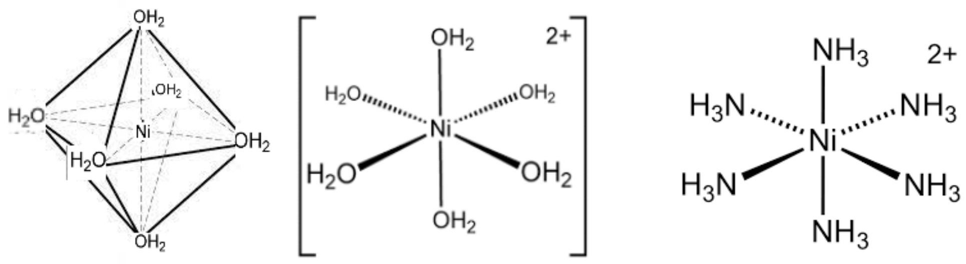


Figura 5. Structurile octaedrice ale complecșilor $[Ni(H_2O)_6]^{+2}$ și $[Ni(NH_3)_6]^{+2}$

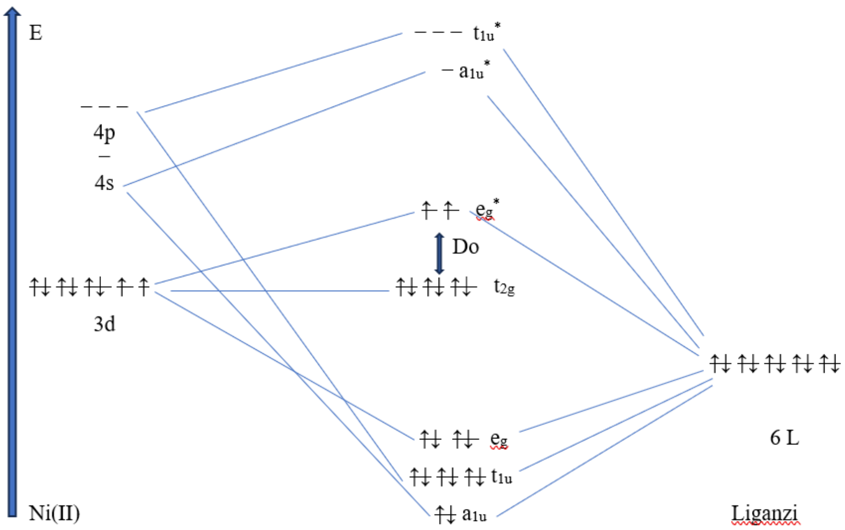


Figura 6. *Distribuția electronilor pe orbitalii moleculari conform TOM pentru complecșii* $[Ni(H_2O)_6]^{+2}$ *și* $[Ni(NH_3)_6]^{+2}$

Distribuția electronilor pe orbitalii moleculari rezultați în urma suprapunerii orbitalilor atomici ai cationului metalic Ni(II) (3d, 4s și 4p) cu orbitalii cu perechi de electroni ai celor șase liganzi conduc la situații similare pentru cei doi complecși, $[Ni(H_2O)_6]^{+2}$ și $[Ni(NH_3)_6]^{+2}$, cu deosebirea că nivelul energetic eg* este la o energie mai înaltă în complexul $[Ni(NH_3)_6]^{+2}$ decât în $[Ni(H_2O)_6]^{+2}$, ceea ce corespunde unui parametru de scindare în câmp octaedric Do mai mare pentru hexaaminocomplex [8].

2. Analiza spectrelor complecșilor $[Ni(H_2O)_6]Cl_2$ și $[Ni(NH_3)_6]Cl_2$

Spectrele cationilor complecși ai Ni(II), $[Ni(H_2O)_6]^{+2}$ și $[Ni(NH_3)_6]^{+2}$, obținute în domeniu UV-VIS sunt prezentate în figura de mai jos.

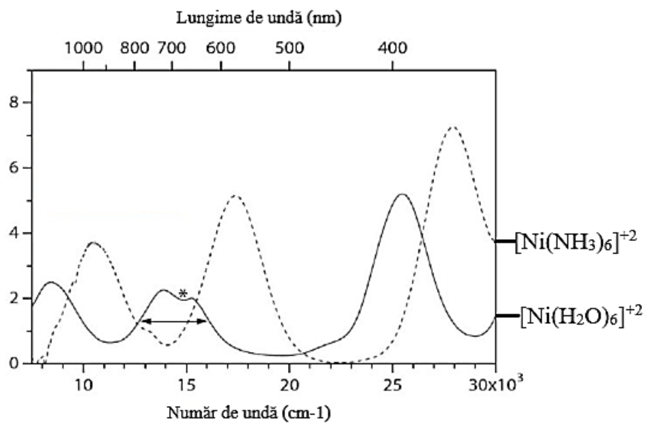


Figura 7. Spectrele UV-VIS ale $[Ni(H_2O)_6]^{+2}$ și $[Ni(NH_3)_6]^{+2}$

Complexul hexacoordinat $[Ni(NH_3)_6]^{2+}$are două absorbanțe cu valori ale lui ε în jur de 10, ceea ce indică tranziții permise de spin, dar Laporte interzise, caracteristice unui complex centrosimetric așa cum este unul de simetrie Oh. Pentru acest complex de Ni(II) sunt posibile trei tranziții [9]:
ν_1 $^3T_{2g}$ (F) ⟵$^3A_{2g}$ (F) corespunde la ~10Dq
ν_2 $^3T_{1g}$ (F) ⟵$^3A_{2g}$ (F) (17241 cm^{-1}) – dublet bine definit
ν_3 $^3T_{1g}$ (P) ⟵$^3A_{2g}$ (P) (27624 cm^{-1})

Parametrul **B** pentru Ni(II) în complexul $[Ni(NH_3)_6]^{2+}$ se poate calcula și se obține valoarea de 857 cm^{-1}. Utilizând valorile energiilor de absorbție obținute din spectru complexului se obțin valori de E/B de 32,2 și 20,1. Aceste rezultate în diagramele Tanabe-Sugano pentru d^8 arată că există două absorbanțe care corespund la ν_2 și ν_3. Din diagrama T-S arată că ν_1 corespunde la un raport E/B de 12,4 și la o valoare a absorbanței de 10627 cm^{-1} (941 nm) în IR apropiat rezultă că raportul Δ/B (Dq/B) este 1,22, din care Dq este 1046 cm^{-1} [10].

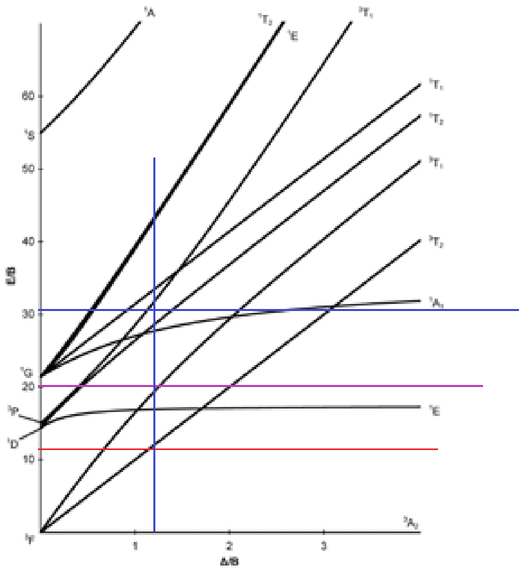


Figura 8. Diagrama Tanabe-Sugano pentru cation d^8 înconjurat octaedric

Tabel 1. Benzi de tranziție electronică permise în spectrele UV-VIS ale $[Ni(H_2O)_6]^{+2}$ și $[Ni(NH_3)_6]^{+2}$

$[Ni(NH_3)_6]^{2+}$	$[Ni(H_2O)_6]^{2+}$
ν_1 $^3T_{2g}$ (F) ⟵$^3A_{2g}$ (F) corespunde la ~10Dq (~10627 cm^{-1})	ν_1 $^3T_{2g}$ (F) ⟵$^3A_{2g}$ (F) (8700 cm^{-1}) corespunde la 10Dq
ν_2 $^3T_{1g}$ (F) ⟵$^3A_{2g}$ (F) (17241 cm^{-1}) – dublet bine definit	ν_2 $^3T_{1g}$ (F) ⟵$^3A_{2g}$ (F) (14500 cm^{-1}) – dublet bine definit
ν_3 $^3T_{1g}$ (P) ⟵$^3A_{2g}$ (P) (27624 cm^{-1})	ν_3 $^3T_{1g}$ (P) ⟵$^3A_{2g}$ (F) (25300 cm^{-1})
	^1E_g (D) ⟵$^3A_{2g}$ (F) (13800 cm^{-1}). Energia acesteia crește prin ”furt de intensitate” de la banda permisă din apropiere.

Benzile complexului cu ligand de NH_3 sunt deplasate spre frecvențe mai mari decât cele din câmpul de liganzi al moleculelor de apă. Dq se poate afla pentru ambele situații din valoare energiei primei benzi, care este egală cu 10Dq. Pentru complexul $[Ni(NH_3)_6]^{2+}$ avem Dq=10627/10=1062,7

cm^{-1}, în timp ce pentru complexul $[Ni(H_2O)_6]^{2+}$avem Dq=8700/10=870 cm^{-1}, deci o valoare mult mai mică decât cea a celuilalt complex [11].

În spectre se observă prezența unui umăr, de energie scăzută, atribuit benzii de tranziție $^1E_g \leftarrow {}^3A_{2g}$, care corespunde tranzițiilor electronice d→d în interiorul ionului de Ni^{2+} în câmpul cristalin creat de liganzi. Energia acestea este mai mare în complexul cu molecule de H_2O, deoarece această bandă este mai apropiată de banda de tranziție $^3T_{1g}(F) \leftarrow {}^3A_{2g}$ (F) decât în complexul cu molecule de NH_3, iar „furtul de energie" este mai evident.

Din distribuția electronilor în orbitalii d reprezentată mai sus, fiecare nivel energetic T_2g și Eg sunt ocupate în așa mod cu electroni încât nu se pune problema unui efect Jahn-Teller, în schimb compușii prezintă moment magnetic permanent paramagnetism.

Intensitatea benzii de transfer de sarcină ν_3 este mai mare decât a celorlalte două benzi în spectrul complexului $[Ni(H_2O)_6]^{2+}$, poate datorită caracterului mai polarizant și mai puternic electronegativ, posibil o bandă de transfer de sarcină de tip O→Ni(II) [12].

CONCLUZII

Teoriile moderne ale legăturii coordinative asociate cu datele rezultate din analiza spectrală UV-Vis pot să explice modificările care apar la înlocuirea liganzilor în sfera de coordinare a ionului de Ni(II). Câmpul creat de liganzi, chiar și pentru o configurație electronică foarte stabilă de tip d^8 poate să conducă la deplasări ale benzilor de absorbție electronice permise, asociate cu un grad mai mare sau mai mic de scindare a orbitalilor de tip d și cu ajutorul diagramelor Tanabe-Sugano se poate calcula valoarea parametrului de scindare. Acest parametru este mai mare în câmpul creat de moleculele de amoniac, care sunt liganzi generatori de câmp puternic, decât în cazul acvacomplexului de Ni(II) cu molecule de apă în sfera de coordinare, răspunzătoare pentru un câmp de liganzi mai slab.

BIBLIOGRAFIE

[1]Marcu, G. (1984). Chimia compușilor coordinativi, Ed. Academiei Române Bucureşti

[2]Fodor, A. (2005). Introducere în chimia combinaţiilor complexe, Ed. Univ. Din Oradea,

[3]Housecroft, C. E., Sharpe, A. G. (2005). Inorganic Chemistry, Ed. Pearson Education Limited, Harlow, England

[4]Cotton, F.A., Wilkinson, G.,Gaus, P.L. (1995). Basic Inorganic Chemistry, III^rd Edition, John Wiley and Sons, Inc. New York

[5]Petrehele, A.I.G., Fodor, A. (2008). Combinaţii complexe : Aspecte teoretice şi practice, Ed. Univ. Oradea

[6]Fox, T., Berke, H. (2014). The Color of Complexes and UV-Vis Spectroscopy as an Analytical Tool of Alfred Werner's Group at the University of Zurich, Chimia, Vol. 68 (5), pp 307-311

[7]Curtui, M. (1990). Chimie anorganică. Combinaţii complexe, Ed. Univ Babeş-Bolyai, Facultatea de Chimie şi Chimie Industrială, Cluj-Napoca,.

[8]Davies, J.A., Hockensmith, C.H., Kukushkin, V. Y., Kukushkin, Y.N. (1996). Synthetic Coordination Chemistry: Theory and Practice, World Scientific Publishers

[9]Cotton, F.A., Wilkinson, G., Gaus P.L. (1995). Basic Inorganic Chemistry, 3rd edition, John Wiley and Sons, Inc. New York

[10]Lever, A.B.P. (1984). Inorganic Electronic Spectroscopy, , 2nd Edition, Elsevier Publishing Co., Amsterdam

[11]Figgis, B.N. , Hitchman, M.A. (2000). Ligand Field Theory and its applications, Wiley-VCH, New York

[12]Reber, C. (2008). Absorption and luminescence spectroscopy of transition metal compounds: from coordination geometries to excited-state properties, Canadian Journal of Analytical Sciences and Spectroscopy, Vol. 53(3), pp. 91-101

DETERMINAREA ACIDULUI OXALIC DIN FRUNZELE DE SPANAC, ŞTEVIE ŞI RUBARBA

Natalie SLĂVESCU[1], Alexandrina FODOR[2]

[1]Student master Chimie Structurală şi Aplicativă, anul II, Universitatea din Oradea, Facultatea de Informatică şi Ştiinţe
[2]Coordonator lucrare, Departamentul de Chimie Universitatea din Oradea, Facultatea de Informatică şi Ştiinţe

Rezumat: *Acidul oxalic (oxalat) este un compus chimic găsit în verdeturile cu frunze. În multe verdeţuri există niveluri foarte ridicate de acid oxalic care de fapt joacă un rol semnificativ în metabolismul plantelor şi animalelor. Acidul oxalic se găsește în multe plante: spanac, rubarbă, sfeclă, măcriș, cafea, cacao, caju, ceai, fructe de pădure, etc. Produsele care conțin acid oxalic sunt bune pentru organism, dar necesită prudență în utilizare. O cantitate excesivă de substanță duce la acumularea de săruri dăunătoare și poate provoca boli cronice. Determinarea acidul oxalic se poate face prin diferite metode: titrimetrice, gravimetrice, spectrofotometrice. În prezenta lucrare s-a determinat experimental, prin metoda spectrofotometrică cantitatea totală de acid oxalic/oxalaţi din frunzele de spanac, ştevie şi rubarbă. În urma analizelor efectuate a fost pusă în evidenţă cea mai mare cantitate de acid oxalic în frunzele de rubarbă (fapt confirmat de datele din literatura de specialitate). Conţinutul de acid oxalic din frunzele de ştevie şi spanac s-au dovedit a fi comparabile ca valoare. După cum s-a putut observa datele obţinute sunt în foarte bună concordanţă cu cele din literatura de specialitate. Metoda spectrofotometrică utilizănd indolul ca reactiv de culoare s-a dovedit a fi o bună metodă de determinare a acidului oxalic din frunzele de spanac, stevie şi rubarbă.*

Cuvinte cheie: acid oxalic, metoda spectrofotometrica, indol

INTRODUCERE

Acidul oxalic (oxalat) este un un compus chimic găsit în verdeturile cu frunze. În multe verdeţuri există niveluri foarte ridicate de acid oxalic care de fapt joacă un rol semnificativ în metabolismul plantelor şi animalelor. Acidul oxalic se găsește legat de ioni de sodiu, potasiu și amoniu în aproape toate plantele. Aceste legături sunt săruri și se numesc oxalați. Laptele și carnea au puţin sau deloc oxalat.

Corpul nostru produce în mod natural oxalați (60-80%), diferenţa (20-40%) provenind din alimentele pe care le consumăm. Un consum excesiv de alimente bogate în oxalați poate reduce raportul. Dietele cu doze mari pot duce la mai mult oxalat în sânge și urină, ceea ce poate juca un rol în deficiențele de calciu și pietrele la rinichi.

Acidul oxalic se găsește în multe plante: spanac, rubarbă, sfeclă, măcriș, cafea, cacao, caju, ceai, fructe de pădure, etc. El reacționează cu minerale (mai ales cu calciu) și formează cristale care agresează mucoasele tractului intestinal sau perforează membranele celulare.

Produsele care conțin acid oxalic sunt bune pentru organism, dar necesită prudență în utilizare. O cantitate excesivă de substanță duce la acumularea de săruri dăunătoare și poate provoca boli cronice.

În prezenta lucrare s-au determinat experimental, prin metoda spectrofotometrică cantitatea totală de acid oxalic/oxalaţi din frunzele de spanac, ştevie şi rubarbă.

DETERMINAREA ACIDULUI OXALIC DIN FRUNZELE DE SPANAC, STEVIE SI RUBARBA

Prelucrarea probelor

Pentru determinarea conținutului de acid oxalic s-au folosit frunze de spanac, ştevie şi rubarbă uscate la cuptor. Frunzele uscate au fost mojarate.

Figra 1. Frunze de spanac crude/uscate/pulbere

Figra 2. Frunze de ştevie cruse/uscate/pulbere

Figra 3. Frunze de rubarbă crude /uscate/pulbere

În tabelul 1. sunt trecute rezultatele obţinute la ucarea frunzelor

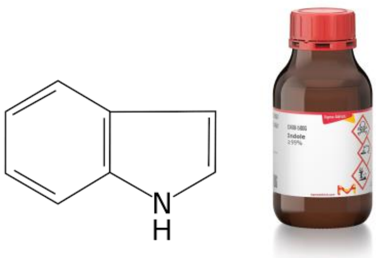
Tabelul 1. Umiditatea probelor analizate

Proba	**% apă**
Frunze spanac	92,56
Frunze stevie	81,98
Frunze rubarba	92,13

Extracția a fost efectuată urmând metoda tradițională: 0,5 g frunze uscate au fost aduse în stare de pudră și transferate într-un balon cotat cu capacitate de 50 ml. La care s-au adăugat 30 ml de HCI 0,25 N și s-au ținut în baie de apă clocotită timp de aproximativ 15 min. Soluţiile obţinute s-au răcit la temperatura camerei. Volumul a fost completat la 50 ml cu HCI 0,25 N. Această soluție a fost utilizată ca extract pentru determinarea acidului oxalic. Soluția de lucru a fost proaspăt preparată înainte de utilizare.

Metoda de analiză

S-a folosit determinarea spectrofotometrică a acidului oxalic cu indol.



Figra 4. Indol

Această metodă se bazează pe reacția dintre indol și acidul oxalic în care se formează un compus de culoare roz [16].

Reactivul indol a fost preparat proaspăt prin dizolvarea a 100 mg de indol în 100 ml de acid sulfuric concentrat.

S-a preparate o soluţie stock de acid oxalic prin dizolvarea a 100 mg de acid oxalic $C_2H_2O_4 \cdot 2H_2O$; (Masă moleculară: 126,07 g) în apă distilată şi adusă la 100 ml cu apă distilată în balon cotat. Soluţia stock s-a folosit pentru prepararea soluţiilor de acid oxalic necesare pentru trasarea curbei de calibrare.

Amestecul de testare a conținut 2 ml soluție standard de acid oxalic la diferite concentrații, variind de la 0,100 la 1,00 mg per ml, preparată în H_2SO_4 1N.

Solutia blank a fost preparata cu 2 ml de H_2SO_4 1N în loc de soluție de acid oxalic.

Apoi s-au adăugat 2 ml de reactiv indol în fiecare eprubetă, inclusiv blank, permițând reactivului să curgă pe partea laterală a tubului pentru a minimiza dezvoltarea căldurii.

Toate eprubetele au fost plasate în baie de apă la 80°C până la 90°C timp de 45 de minute. Răcite la temperatura camerei, absorbanța a fost măsurată la 525 nm pe spectrofotometru UV-VIS.

Concentraţia acidului oxalic mg/ml în H_2SO_4 1N	Absorbanţa măsurată la 525 nm
0,00	0,08
0,2	0,12
0,4	0,24
0,6	0,47
0,8	0,72
1,00	0,91

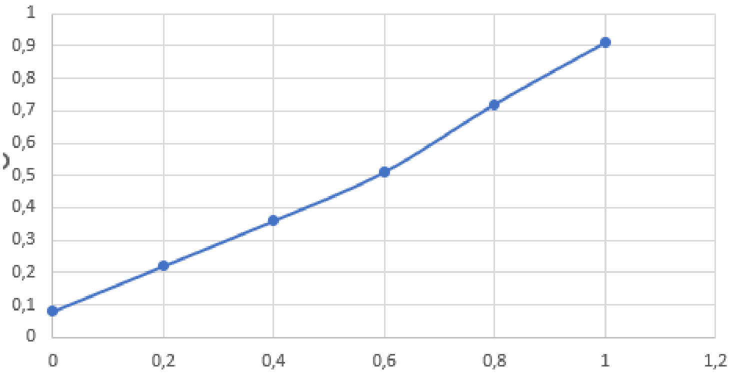


Figura 5. Curba de calibrare

REZULTATE

În urma măsurării absorbanţei probelor şi a curbei de elatonare s-au determinat concentraţiile de vitamina C. Rezultatele obţinute sunt prezentate în tabelul 2.

Tabelul 2. Conţinutul de vitamina C din probele analizate

Nr.	Proba	Absorbanţa măsurată la 525 nm	Concentraţia acid oxalic mg/ml determinată experimental	Cantitatea de acid oxalic mg/100 mg frunze uscate*	Cantitatea de acid oxalic din frunze proaspete mg/100 mg calculată**
1	Frunze de spanac	0,316	0,4035	40,35	542,34
2	Frunze de ştevie	0,504	0,6434	64,34	548,06
3	Frunze de rubarbă	0,774	0,9876	98,76	1146

*Factorul de corecţie la transformarea concentraţiei determinate experimental utilizănd curba de etalonare şi concentraţia exprimată în mg/100 mg probă analizată (frunze uscate) a fost: 0,01, factor calculat ţinând cont de faptul că s-au luat în lucru 0,5 g probă (frunze uscate), s-au adus la 50 ml în urmă diluării şi adausului de reactiv şi transformarea µg în 0,001 mg)

** calculul s-a făcut ţinând cont de umiditatea determinată experimental

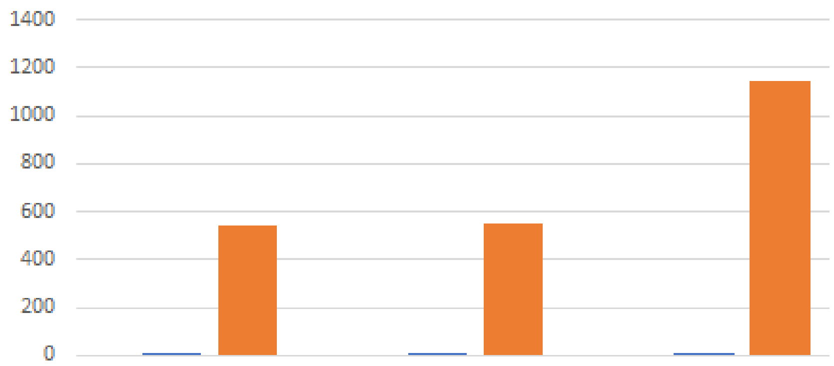


Figura 6. Cantitatea de acid oxalic din frunze proaspete de spanac, stevie si rubarbă, determinată experimental (mg/100 mg)

În tabelul 3 sunt trecute date orientative (din literatura de specialitate) ale conţinutului de acid oxalic în frunzele de spanac, stevie şi rubarbă.

Tabelul 3. Date din literatură cu privire la concentraţia de acid oxalic

Nr.	Proba	Date literatură * mg/100 g frunze proaspete
1	Frunze de spanac	600
2	Frunze de ştevie	620
3	Frunze de rubarbă	1900

** https://www.healthline.com/nutrition

În figura 7 sunt prezentate comparativ datele din literatură cu privire la concentraţia de acid oxalic şi cele obţinute experimental.

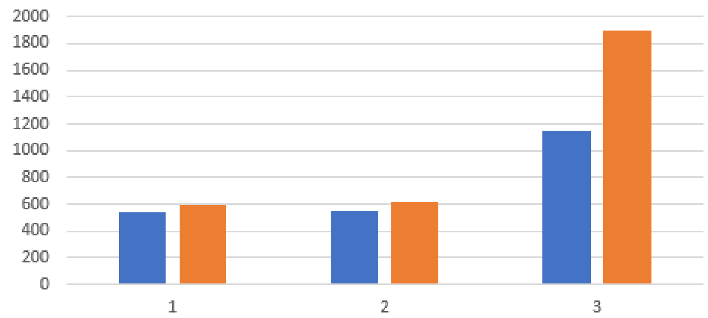


Figura 7. Comparaţie între datele obţinute experimental/date literature pentru conţinutul de acid oxalic în frunzele de: spanac, stevie si rubarbă analizate

CONCLUZII

În urma analizelor efectuate a fost pusă în evidenţă cea mai mare cantitate de acid oxalic în frunzele de rubarbă (fapt confirmat de datele din literatura de specialitate). Conţinutul de acid oxalic din frunzele de ştevie şi spanac s-au dovedit a fi comparabile ca valoare.

După cum se poate observa În figura 4.10. datele obţinute sunt în foarte bună concordanţă cu cele din literatura de specialitate. Metoda spectrofotometrică utilizănd indolul ca reactiv de culoare s-a dovedit a fi o bună metodă de determinare a acidului oxalic din frunzele de spanac, stevie şi rubarbă.

BIBLIOGRAFIE

[1]https://ro.wikipedia.org/wiki/Acid_oxalic, 10.02.2023
[2] https://ro.koshachek.com/articles/alimente-care-contin-acid-oxalic-dr.html, 10.02.2023
[3]https://www.academia.edu/39674846/CAPITOLUL_6_METODA_TITRIMETRIC%C4%82_DE_ANALIZ%C4%82_6_1_GENERALIT%C4%82%C5%A2I, 10.02.2023
[4] Fowler, R. M., Bright. H. A., Vogel, A. I. (1935). A test book of quantitative inorganic analysis.' Longmans Green and Co. Ltd., (E.L.B.S.)
[5] J. Bergerman, Elliot, J. S. (1955) Method for Direct Colorimetric Determination of Oxalic Acid, Anal. Chem., Vol. 27 (6), pp. 1014-1015
[6] Gnezda, J. (1899) Uber neue Reaktionen der Indolbasen und der albuminoiden Korper, Compt. rend., Vol. 128, pp. 1584-1587
[7] https://ro.wikipedia.org/wiki/Spanac, 15.04.2023
[8] https://dieta.romedic.ro/aliment/spanac, 15.04.2023
[9] https://www.ghidnutritie.ro/articol/legume/spanacul, 15.04.2023
[10] https://ro.wikipedia.org/wiki/%C8%98tevie, 15.04.2023
[11] https://www.ghidnutritie.ro/articol/plante_medicinale/stevia, 15.04.2023
[12] https://dieta.romedic.ro/aliment/rubarba, 15.04.2023

CIANURA, „OTRAVA PERFECTĂ"

Daria DANȘA[1], Anița LUNCAN[2]

[1] Colegiul Național „Emanuil Gojdu" -elevă în clasa a IX-a, Oradea, România -Str. Spiru Haret, nr. 3-5, Oradea, dariadansa@gmail.com
[2] Colegiul Național „Emanuil Gojdu" -profesoară de Chimie, Oradea, România

Rezumat: *Pasionată fiind de romanele polițiste întotdeauna mă întâlneam cu diverse cazuri de otrăvire cu arsenic, mercur, mătrăgună, cianură sau toxina botulinică. În special însă, îmi atrăgea atenția cianura cu misteriosul său miros de migdale amare și rapiditatea cu care răpunea victime într-un decurs de câteva minute. Părea de-a dreptul nemiloasă și cred că asta mi-a stârnit și mai mult curiozitatea de a afla ce se ascunde în spatele pomposului titlu atribuit acestei otrăvi. Astfel, prin intermediul acestei lucrări am pătruns în „intimitatea" cianurii, descoperind atât numeroase date teoretice despre compusul chimic în sine cât și aspecte pozitive și mai puțin pozitive în ceea ce privește utilitatea acesteia.*

Cuvinte cheie: acid cianhidric, otrăvire, anionul CN^-, toxicitate, miros de migdale amare

INTRODUCERE

Există oare otrava perfectă, substanța care absorbită în cea mai redusă cantitate să cauzeze moartea în mai puțin de câteva minute? Ei bine poate că nu reprezintă chiar „otrava perfectă", dar cert este că cianura, cunoscută ca fiind radicalul acidului cianhidric este o otravă a cărui renume datează de mai bine de câteva secole și pe care o întâlnim în majoritatea cazurilor de deces prin otrăvire, precum și ca motiv principal în romanele Agathei Christie sau ale emblemei literaturii polițiste românești, Rodica Ojog-Brașoveanu . Este o substanță chimică foarte ușor sintetizată în zilele noastre și cu toate că este atât de toxică pentru specia umană, din mai multe puncte de vedere aceasta este încă folosită în foarte multe procese industriale și are multiple roluri în mediul înconjurător.

Ca substanță cianura este anionul (CN^-) al acidului cianhidric (HCN), un lichid incolor, cu miros de migdale amare, solubil atât în apă, cât și în alcool și eter. Acesta fierbe la temperatura de 25,6˚C și se solidifică la temperatura de -15˚C, formând o masă cristalină, albă. Are o constantă dielectrică foarte mare ($\in = \mathbf{138\ la\ 10°C}$) care crește cu scăderea amplitudinii termice. Această proprietate, precum și puterea sa ionizantă mare, ar face din acidul cianhidric unul dintre cei mai buni dizolvanți, dacă nu ar fi foarte toxic. În stare lichidă, moleculele de HCN sunt asociate liniar prin legături de hidrogen, structură ce determină valoarea mare a constantei dielectrice. Structura moleculei este liniară și prezintă două forme tautomere- acidul cianhidric și izocianhidric:

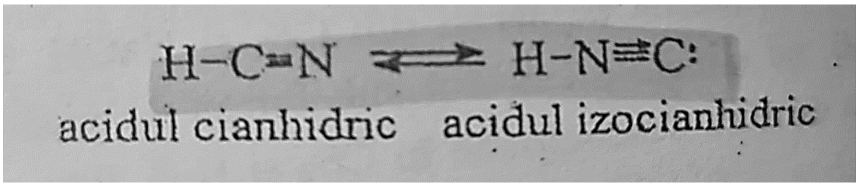


Figura 1. Structura moleculei și formele sale tautomere

La temperatură obișnuită, predomină prima formă în proporție de 99%; la temperaturi mai ridicate, echilibrul se schimbă cu predominarea celei de a doua. În soluție apoasă, acidul cianhidric este foarte puțin ionizat acesta fiind un acid chiar mai slab decât acidul carbonic. Acesta însă deplasează alți acizi în sărurile lor, atunci când formează o cianură insolubilă. Acidul cianhidric manifestă caracter reducător:

$$4HCN + 5O_2 \rightarrow 4CO_2 + 2N_2 + 2H_2O$$

De asemenea, acidul cianhidric reacționează cu oxizii bazici, cu bazele și unele săruri formând cianurile, alcătuite din ionul cianură și diverse metale. Dintre compușii pe care îi formează în urma acestor reacții, cianurile alcaline, alcalino-pământoase și cele de mercur (II) sunt solubile în apă; celelalte fiind insolubile.[6]

$$KCN + AgNO_3 \rightarrow KNO_3 + AgCN$$
$$AgCN + KCN \rightarrow K[Ag(CN)_2]$$

OMNIPREZENȚA ACIDULUI CIANHIDIRIC ÎN MEDIUL ÎNCONJURĂTOR

Fiind un acid organic acesta se găsește sub mai multe forme într-o bună parte din plante, mai ales în țesuturi sau în sâmburii fructelor. În mod practic acidul cianhidric este un component al amigdalinei, un compus ce conține dizaharide gentibioze cu aglicon și aldepidă beuzoică, care se găsește în cantitate de 2,5-3% în semințele migdalului, 0,37% în sâmburele de caise, 0,9-2,5% în sâmburele de prune, 1,3%-2,4% în sâmburele de vișine.[1] Totodată, întâlnim o cantitate considerabilă de HCN în apele dulci și râuri, fiind eliminat de unele specii de alge, dar și în soluri sau ape subterane în urma unor procese geologice.

Una dintre cele mai mari surse de cianură din mediul încojurător este reprezentată de industria minieră. Cinanura de potasiu sau sodiu este utilizată în procesul de extracție a aurului și a altor metale prețioase utilizând metoda cianurării[9]. În timpul acestui proces o mare parte din substanța utilizată se poate scurge infectând astfel mediul înconjurător și comunitățile locale precum s-a întâmplat în anul 2000 în mina din care se exploata aur în Baia Mare[8]. De asemenea, nu se exclud procesele industriale, cum ar fi arderea combustibililor fosili sau producția de pesticide și produse chimice ce emit în atmosferă cianură sub formă de vapori.

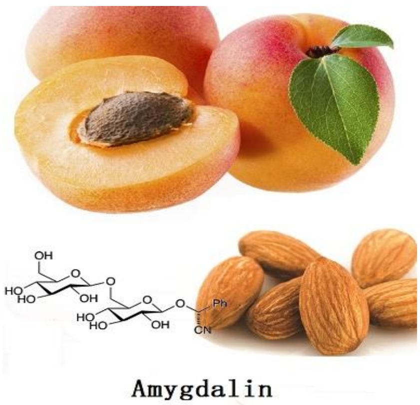


Figura 2. Acidul cianhidric în compusul amigdalin

Industrial aceasta se obține prin reacția în fază gazoasă între NH_3 și CH_4 (amonooxidarea metanului) la 1200˚C în prezență de catalizatori:

$$CH_4 + NH_3 \xrightarrow{Pt} HCN + 3H_2$$ – procedeul Degussa

$$2CH_4 + 2NH_3 + 3O_2 \xrightarrow{Pt/Rh} 2HCN + 6H_2O$$ – procedeul Andrussow

Un procedeu mai vechi (folosit până în anul 1965) conta în reacția amidurii de sodiu cu carbonul la temperaturi ridicate[6]:

$$Na + NH_3 \rightarrow NaNH_2 + H_2$$
$$NaNH_2 + C \xrightarrow{750°C} NaCN + H_2$$

IMPACTUL ASUPRA SĂNĂTĂȚII UMANE

După cum am precizat și în introducere acidul cianhidric este o substanță extrem de toxică pentru ființele umane și nu numai. Conform mai multor surse de cercetare am putut întocmi un tabel conform căruia pe baza gramajului de cianură incinerată sub orice formă, viața este pusă în pericol.[5][2][4]

Nr. Caz	Concentrație ioni CN^- în sânge (mg/L)	Cantitate HCN/KCN (mg)	Stare actuală	Simptome/Afecțiuni vizibile în urma decesului
1[5]	-	~250	Viu, resuscitat	Șoc sever, convulsii, leșin
2[2]	21,5	Între 500-1000	Decedat	Schimbarea culorii feței
3[4]	160,0	-	Decedat	Schimbarea culorii feței în roșu-purpuriu, miros puternic de migdale amare

În cazul intoxicației cu cianură nu există diagnostice fiabile în urma unei autopsii. Cu toate că în cazurile de mai sus sunt prezente anumite simptome, acestea diferă de la organism la organism, în funcție de canitate, de modul în care otrava este incinerată și așa mai departe. Totuși putem vorbi despre câteva caractere generale ilustrate prin: schimbarea culorii feței în roz, mirosul de „migdale amare”, gastrită și eroziuni orale sau periorale.

Otrăvirea cu acid cianhidric se diferențiază de cea cu monoxid de carbon colorarea roz intensă a feței. Cu toate acestea nu este un simptom patogenic și nu este întotdeauna observată în cazurile de deces cauzate prin otrăvirea cu cianură. Tot astfel, mirosul de „migdale amare” care pare de cele mai multe ori ca un semnal de alarmă cu privire la intoxicația cu cianură nu este întotdeauna detectat. Acest fapt se datorează proliferării aparatelor de respirație cu flux de aer utilizate și a sălilor de autopsie intens populate cu cadavre, astfel ajungându-se ca oamenii care sunt genetic capabili să detecze acest miros de migdale amare să nu îl simtă[4].

ACȚIUNEA CIANURII ÎN ORGANISMUL UMAN

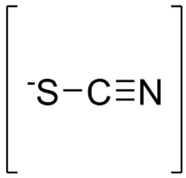
După modul în care otrava este incinerată aceasta își va face efectul în câteva minute. Absorpția orală a cianurii reacționează cu corpul în cel mai scurt timp, aproximativ 5 minute în cazul unei doze letale (peste 500mg substanță)[2]. Odată ajuns în organism, copusul HCN disociat în ionul cianură și proton se răspândește în organism acoperind 40% din masa corpului în timpul dat[7]. Fiind un agent coroziv deteriorează treptat țesuturile cu care intră în contact și intefeerează cu procesul de respirație celulară. Prin interfența cu procesul de respirație celulară, cianura se leagă de enzima cunoscută sub numele de citocromoxidază, care este esențială în lanțul respirator al celulelor. Prin legarea de citocromoxidază, cianura împiedică celulele să utilizeze oxigenul pentru a produce energie prin respirație celulară. Acest lucru duce la întreruperea procesului de generare al ATP-ului (acid adenozin trifosfat), care este principalul combustibil energetic al celulelor. Fără suficient ATP, celulele nu pot funcționa corect și încep să sufere daune sau chiar să moară.

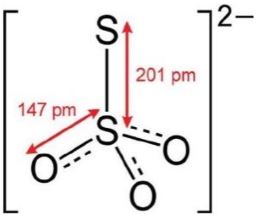
Cele mai afectate organe de intoxicația cu cianură sunt sistemul nervos central și celulele din inimă, ficat și alte organe vitale. Stomacul de exemplu, poate prezenta semne de coroziune prin apariția sângerării, iar diverse modificări morfologice epiteliale pot apărea în mucoasa gastroesofagiană.

Cu toate că s-au descoperit tratamente ce constau în administrarea de antidoturi specifice la un timp scurt după incinerarea acidului cianhidric, rata de supraviețuire este una scăzută, egală cu 0 în cazul în care se administrează doza letală sau o supradoză.

Tratamentul constă într-un kit ce conține: nitrat de amil, nitrat de sodiu și tiosulfat (figura 4)[4]. Tiosulfatul de sodiu acționează prin legarea de enzima mitocondrială numită rhodanază, facilitând astfel conversia cianurii în tiocianat (figura 3). Un nou antidot utilizat recent este hidroxocobalmina care reacționând cu cianura formează cianocobalmină (figura 5). Deși nu sunt 100% eficiente, aceste tratamente împreună cu administrarea de oxigen pot preveni răspândirea otrăvii în organism și stabilizarea acestuia.

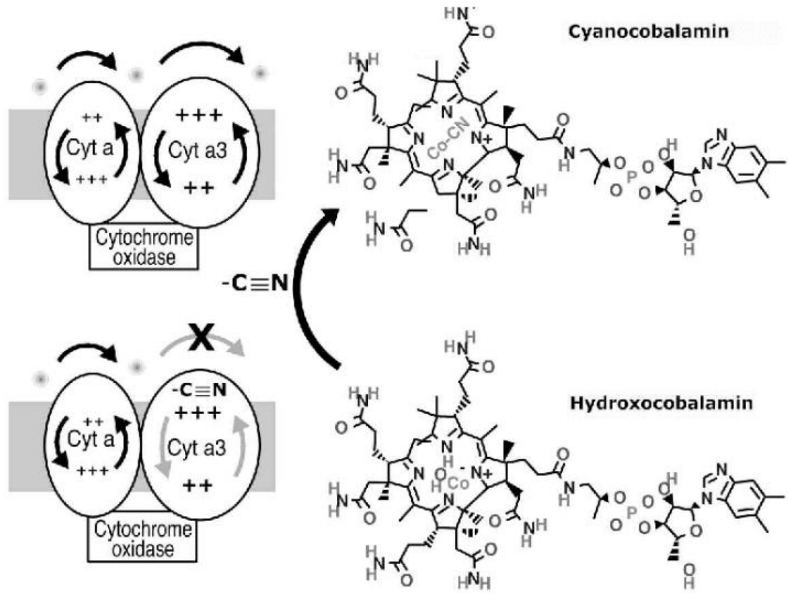
Cel mai utilizat antidot este kit-ul care conține nitriții împreună cu tiosulfatul, deși studiile recente arată că asocierea dintre hidroxocobalamină și tiosulfatul de sodiu este o alegere mai bună.[5]





Ion tiocianat
https://www.ymdb.ca/compounds/YMDB00391

Ion tiosulfat
https://en.wikipedia.org/wiki/Thiosulfate



Acțiunea hidroxocobalminei
https://www.semanticscholar.org/paper/Role-of-Hydroxocobalamin-in-Acute-Cyanide-Poisoning-Shepherd-Velez/61772e4f9d9679971d5bc0995fc9e0dcbc4fb080

ACIDUL CIANHIDRIC, MAI MULT DECÂT O OTRAVĂ

Cu toate că până acum am dezbătut doar toxicitatea acidului cianhidric, acest compus chimic are o gamă variată de aspecte pozitive și utilități. Este important de menționat că aceste aspecte pozitive nu anulează pericolele și riscurile asociate cu acidul și utilizarea acestuia trebuie să fie întotdeauna realizată în condiții de siguranță și în conformitate cu regulamentele și standardele de securitate corespunzătoare. Iată câteva aspecte pozitive ale acidului cianhidric:

1. Utilizări în industria chimică: Acidul cianhidric este utilizat în mod frecvent în industria chimică ca precursor în producția altor substanțe chimice. De exemplu, este utilizat în sinteza organică pentru obținerea anumitor produse farmaceutice și substanțe chimice organice.
2. Sinteza de materiale și produse utile: Acidul cianhidric este folosit în industria textilă pentru producerea de coloranți și pigmenti. De asemenea, este utilizat în procesele de galvanizare, adică pentru a acoperi metalele cu un strat protector pentru a preveni coroziunea.
3. Utilizare în procese de extracție: Datorită proprietăților sale chimice, acidul cianhidric este utilizat în procesele de extracție pentru separarea metalelor prețioase din minereuri și alte materii prime. De exemplu, este utilizat în extracția aurului și argintului din minereuri.[9]

4. Utilizare în controlul dăunătorilor: Acidul cianhidric poate fi utilizat în controlul dăunătorilor în agricultură. Cu toate acestea, utilizarea sa este strict reglementată și necesită expertiză specializată pentru a evita efectele toxice asupra mediului înconjurător și sănătății umane.
5. Utilizare în medicină: Acidul cianhidric se administrează sub formă de tablete de amigdalin ca și tratament anumitor forme de cancer.[3]

Este important să subliniem încă o dată că acidul cianhidric este un compus extrem de periculos și toxic. Orice manipulare sau utilizare a acestuia trebuie realizată într-un mediu controlat și în conformitate cu regulamentele și procedurile de siguranță adecvate.

CONCLUZII

Astfel, analizând mai îndeaproape această substanță chimică am descoperit nu numai complexitate din punct de vedere chimic, dar și vasta aplicabilitate a acesteia. De la modul prin care anionul cianură se leagă cu enzima citocromoxidază stopând utilizare de oxigen în procesul respirator celular din organismul uman, până la reacțiile sale ce ajută la înderpartarea aurului și ale altor metale prețioase din rocă.....

BIBLIOGRAFIE

[1] Arnaut, V., Mancuș, N. Instalație pentru extragerea sîmburilor din vișine și cireșe/ https://ibn.idsi.md/sites/default/files/imag_file/87-90_41.pdf
[2] Blanco, PJ, Rivero, AG (2004). First case of illegal euthanasia in Spain: fatal oral potassium cyanide poisoning
[3] Dang, T., Nguyen, C., & Tran, P. (2017). Physician Beware: Severe Cyanide Toxicity from Amygdalin Tablets Ingestion. Case Reports in Emergency Medicine
[4] James, R. Gill, M.D. Marker, E., Marina Stajic, M..(2004). Suicide by Cyanide: 17 Deaths
[5] Jethava, D., Gupta, P., Kothari, S., Rijhwani, P., Kumar, A. (2014). Acute cyanide Intoxication: A rare case of survival
[6] Miftode, M., Ștefănache, A. (2003). Chimia nemetalelor
[7] Bhattacharya, R.., Flora, S.J.S. (2009). CHAPTER 19 - Cyanide Toxicity and its Treatment
[8]www1: https://hudoc.echr.coe.int/fre?i=003-2615810-2848789
[9]www2: https://miningwatch.ro/rapoarte/cianura-in-minerit/

ROLUL TRETINOINEI ÎN TRATAMENTUL ACNEEI

Paul-Gabriel POPOVICIU[1], Anița LUNCAN[2]

[1] Colegiul Național „Emanuil Gojdu” -elev în clasa a XII-a, Oradea, România -Str. Spiru Haret, nr. 3-5, Oradea, paul.g.popoviciu@gmail.com
[2] Colegiul Național „Emanuil Gojdu” -profesoară de Chimie, Oradea, România

Rezumat: *Acneea este una dintre cele mai comune afecțiuni a pielii. Cu toate că acneea nu are efecte asupra sănătății fizice, aceasta afectează semnificativ sănătatea emoțională a pacienților. Ca urmare, domeniul medicamentelor pentru tratamentul acneei a devenit unul rentabil, iar tretinoina este una dintre substanțele des folosite în acest sens. Obiectivul acestui articol este de a analiza modul în care se folosește acest medicament pentru tratarea acneei. Se vor prezenta informații farmaceutice, date despre administrare, mecanismul de acțiune și posibilele efecte secundare ale tretinoinei, cât și evaluarea subiectivă din partea pacienților. De asemenea, se vor discuta câteva dintre implicațiile rezultatelor descoperite și se vor sugera noi direcții de cercetare.*

Cuvinte cheie: Tretinoina, Acid Retinoic, Acnee, Dermatologie

INTRODUCERE

Acneea, cunoscută și sub numele de acnee vulgară, reprezintă o afecțiune cronică inflamatorie a pielii ce rezultă dintr-o creștere a secreției de sebum controlată de către hormonii androgeni, keratinizare alterată și dintr-o activare a bacteriilor *Propionibacterium acnes*.[1] Această afecțiune, care afectează 85% din persoanele de vârste cuprinse între 12 și 25 de ani, a fost considerată de-a lungul timpului o problemă estetică nesemnificativă fiindcă nu prezenta riscuri majore legate de sănătatea fizică. Astfel, afecțiunea a fost ignorată de către cercetători pentru o lungă perioadă de timp. Recent însă, au apărut mai multe studii ce dovedesc o legătură strânsă dintre acnee și diferite probleme psihologice adaptative[2]. Mai exact, s-a observat o corelație, în special la tineri, între acnee și simptome de depresie[3], anxietate[4], gânduri intrusive și tentative de suicid[5]. Având în vedere consețințele sociale și economice a acestor probleme de natură psihologică, găsirea unui tratament eficient pentru acnee a devenit foarte important. De exemplu, în 2021, conform unui studiu, 57% dintre tinerii care fac parte din generația Z și 63% dintre persoanele care fac parte din generația Y, afirmă că acordă atenție specială îngrijirii tenului în vederea tratamentului acneei.[6] În acest sens, piața bazată pe vânzarea medicamentelor utilizate în tratamentul acneei a devenit una profitabilă și importantă, piață în care segmentul reprezentat de retinoide a fost de aproximativ 26% în 2022.[7] Din clasa retinoidelor face parte și tretinoina, acidul vitaminei A - cunoscută și sub numele de acid retinoic.[8] Tretinoina a fost aprobată de FDA în anul 1971 și a devenit de atunci esențială în tratamentul acneei.[9]

METODĂ

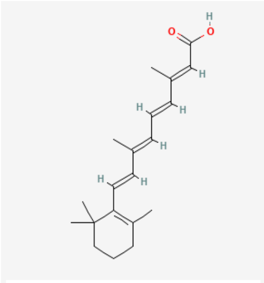
Pentru tretinoină s-au selectat următoarele aspecte pentru analiză:

1. Informații farmaceutice
2. Date despre administrare
3. Mecanismul de acțiune
4. Posibile efecte secundare și evaluarea subiectivă din partea pacienților

Informațiile pentru primul aspect au fost preluate de pe PubChem. Datele despre administrare și mecanismul de acțiune au ca sursă diverse studii și articole de specialitate. Informațiile pentru al patrulea criteriu au fost selectate de pe Drugs.com.

1. Informații farmaceutice

Denumirea I.U.P.A.C a moleculei este: acid (2E,4E,6E,8E)-3,7-dimetil-9-(2,6,6,trimetilciclohex-1-en-1-il)nona-2,4,6,8-tetraenoic. Formula moleculară este: C20H28O2, iar masa ei atomică este de 300.442 de grame/mol. În formă pură tretinoina este un praf de culoare galbenă spre portocaliu deschis, cu un miros caracteristic floral. Molecula este practic insolubilă în apă și glicerină. Ea este ste ușor solubilă în octanol, etanol, polietilenglicol 400 și cloroform și solubilă în DMSO și eter. Punctul de topire este în jur de 180-182 de grade Celsius.[10]



Molecula tretinoinei

2. Date despre administrare

Tretinoina în tratamentul acneei se administrează o dată pe zi, de regulă seara datorită riscului scăzut de expunere la radiații UV, aplicându-se un strat subțire pe zonele pielii unde sunt prezente leziuni. Se recomandă, totuși, evitarea zonelor din apropierea ochilor, gurii și nasului.[11] Chiar la aplicare se poate resimți o senzație de împunsătură sau de căldură. În plus, frecvența aplicării tretinoinei depinde și de capacitatea pacientului de a o tolera. În primele săptămâni ale tratamentului, aspectul feței se poate înrăutăți ca urmare a efectelor medicamentului asupra unor leziuni profunde care nu fuseseră încă identificate. Efecte benefice se pot observa chiar după două săptămâni de la începerea terapiei, dar, de obicei, de abia după patru săptămâni de tratament sunt vizibile îmbunătățiri.

Se recomandă evitarea folosirii preparatelor pentru tratamentul acneei ce conțin peroxid de benzoil, sulf, rezorcină sau acid salicic, în mod concomitent cu tretinoina. De asemena, este indicată oprirea tratamentului în cazul în care pacientul are o arsură solară activă.[12]

3. Mecanismul de acțiune

Tretinoina a fost aprobată de către FDA în anul 1971. Cu toate acestea, mecanismul ei de acțiune exact nu este încă cunoscut. Consensul științific este că tretinoina acționează prin stabilirea unor legături cu receptorii acidului retinoic (α, β, γ), și cu receptorii retinoizi X prin blocarea mediatorilor inflamatori. Ca urmare producția de procolagen crește pentru a spori formațiunile de colagen de tip 1 și tip 3. Colagenul de tip 1 este cel mai abundent și este folosit pentru a conferi structură pielii, oaselor, tendoanelor și ligamentelor. Colagenul de tip 3 se găsește în mușchi, artere și organe[13].

Eficiența tretinoinei în tratamentul acneei este dată de capacitatea ei de a modifica formarea foliculară anormală care apare datorită keratinizării excesive a celulelor epiteliale. Tretinoina promovează descuamarea și cornificarea. Cea din urmă duce la formarea stratului extern al piealli, numit și stratul cornos, care servește ca barieră primară între mediu și organism.[14] În urma cornficării, fosta membrană celulară a keratinocitelor este înlocuită de un strat de ceramide conectate cu proteine.[15] În plus, tretinoina sporește activitatea mitotică, ceea ce grăbește *turnover-ul* corneocitelor slab aderente și elimină conținutul comedoanelor.[11]

4. Posibile efecte secundare și evaluarea subiectivă din partea pacienților

Conform informațiilor găsite pe site-ul Drugs.com, până la data de 25.09.2023 tretinoina a fost evaluată de 442 de pacienți. Media evaluărilor a fost de 7.7/10.

Majoritatea pacienților au fost satisfăcuți de efectele medicamentului, aceștia văzând îmbunătățiri semnificative după aproximativ două luni de tratament. Printre cele mai comune efecte secundare amintite se numără: senzații de usturime, mâncărimi, căldură, sau împunsături, descuamare, înroșire a feței, piele neobișnuit de uscată, schimbarea ușoară a nuanței tenului.[16]

Captură de ecran cu privire la rezumatul evaluărilor subiective ale tretinoinei. Sursa: Drugs.com, din data de 25.09.2023.

Conform datelor culese, 88% din pacienții care folosesc tretinoina ajung să aibă cel puțin unul dintre simptomele secundare amintite mai sus.[17]

DISCUȚII

Pe baza analizei făcute în acest articol se pot face trei observații. În primul rând, acneea afectează majoritatea tinerilor. Conform studiilor, un procent de aproximativ 85% din persoanele cu vârste cuprinse între 12 și 25 de ani suferă de acnee. Această afecțiune are consecințe negative asupra sănătății emoționale, chiar dacă nu afectează sănătatea fizică într-un mod semnificativ. Persoanele de gen feminin și tinerii care aparțin unor grupuri etnice sau rasiale minoritare sunt afectați emoțional de prezența acneei într-un mod disproporționat.[2] Aceștia experimentează într-un procent mai ridicat sentimente de rușine, anxietate, și fobii datorate condiției lor medicale. În plus, acești tineri au un risc mai crescut de a se simți singuri, a experimenta *bullying* școlar și de a evita situațiile sociale în care aspectul lor fizic ar putea fi evaluat. Aceste rezultate au implicații importante pentru psihologii școlari, profesori, părinți și pentru alți profesioniști preocupați de sănătatea mentală a tinerilor. În al doilea rând, notăm faptul că încă nu se cunoaște exact mecanismul de acțiune a tretinoinei, cu toate că acest medicament este folosit de mai bine de 50 de ani. Ca urmare, considerăm că ar fi necesare mai multe studii în acest sens. În al treilea rând, majoritatea pacienților expuși la tretinoină experimentează cel puțin un efect secundar, ceea ce ar putea avea un impact asupra deciziei lor de a folosi acest medicament ca tratament. Notăm o lipsă a studiilor care analizează corelația dintre frecvența efectelor secundare și evitarea tretinoinei ca opține de tratament.

CONCLUZII

În concluzie, notăm că în ciuda faptului că nu cunoaștem totul despre tretinoină și că majoritatea pacienților experimentează cel puțin un efect secundar, acest medicament este unul dintre tratamentele comun folosite, având până la urmă, în majoritatea cazurilor, un efect pozitiv asupra afecțiunii.

BIBLIOGRAFIE

[1]Williams, HC, Dellavalle, RP, Garner, S. (2012). Acne vulgaris. Lancet., Vol. 28;379(9813), pp.361-72. 6

[2]Natsuaki, M.N.,Yates, T.M. (2021), Adolescent Acne and Disparities in Mental Health. Child Dev Perspect, Vol.15, pp. 37-43. https://doi.org/10.1111/cdep.12397 (deschis la data de 22.06.2023)

[3]Dalgard, F, Gieler, U, Holm, JØ, Bjertness, E, Hauser, S. (2008). Self-esteem and body satisfaction among late adolescents with acne: results from a population survey.,J Am Acad Dermatol. Nov, Vol.59(5), pp.746-51.

[4]Barlow, R, Payyazhi, G, Hogan, S, Grindlay ,D, Choi, D, Verma, M, Pasunuru, K, Taylor, R, Bewley, A, Mohandas, P. (2023). Suicide and Suicidality in Children and Adolescents with Chronic Skin Disorders: A Systematic Review. Acta Derm Venereol. Jan 11, Vol.103:adv00851..

[5] Halvorsen, J.A., Stern, R.S., Dalgard, F., Thoresen, M., Bjertness, E., Lien, L. (2011). Suicidal Ideation, Mental Health Problems, and Social Impairment Are Increased in Adolescents with Acne: A Population-Based Study, Journal of Investigative Dermatology, Vol. 131(2) , pp. 363-370

[6] Petruzzi, D. (2023) Share of Millennials & Gen Z serious about their skin care routine in the U.S. 2021. Online: https://www.statista.com/statistics/1289657/millennials-and-gen-z-who-are-serious-about-their-skin-care-routine/ (deschis la data de 22.06.2023)

[7]Acne Treatment Market Size by Product Type (Antibiotics, Isotretinoin, Retinoids, and Others), Route of Administration (Topical, Injectable, and Oral), End User (Hospitals, Specialty Centers, and Skincare Clinics), Regions, Global Industry Analysis, Share, Growth, Trends, and Forecast 2022 to 2030. (2023). Online: https://www.thebrainyinsights.com/report/acne-treatment-market-13265 (deschis la data de 22.06.2023)

[8]PubChem. Online: https://pubchem.ncbi.nlm.nih.gov/compound/444795 (deschis la data de 22.06.2023)

[9]Baldwin, H, Webster, G, Stein ,Gold L, Callender, V, Cook-Bolden FE, Guenin E. (2021). 50 Years of Topical Retinoids for Acne: Evolution of Treatment. Am J Clin Dermatol. May; Vol.22(3), pp.315-327

[10]PubChem (2023). *National Library of Medicine.* Online: https://pubchem.ncbi.nlm.nih.gov/compound/tretinoin (deschis la data de 25.09.2023)

[11]Yoham, A, Casadesus, D. Tretinoin. I. (2022). StatPearls. StatPearls Publishing, Treasure Island (FL);. PMID: 32491410.

[12]PRODUCT MONOGRAPH PrRETIN-A MICRO® Tretinoin Gel (microsphere) 0.1% w/w and 0.04% w/w Comedolytic Agent. Bausch Health, Canada Inc. 2150 St-Elzear Blvd. West Laval, Quebec H7L 4A8. Online: https://bauschhealth.ca/wp-content/uploads/pdf/Retin-A%20Micro%20PM-E-2020-09-29.pdf (deschis la data de 25.09.2023)

[13] Cleveland Clinic. Online: https://my.clevelandclinic.org/health/articles/23089-collagen (deschis la data de 25.09.2023)

[14]Eckhart,L., Lippens, S., Tschachler, E., Declercq.W. (2013). Cell death by cornification, Biochimica et Biophysica Acta (BBA) - Molecular Cell Research, Vol. 1833(12) , pp. 3471-3480, Online:https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167488913002334 (deschis la data de 25.09.2023)
[15]Haftek, M., Callejon, S., Sandjeu, Y., Padois, K., Falson, F., Pirot, F., Portes, P., Demarne, F., Jannin, V.. (2011). Compartmentalization of the human stratum corneum by persistent tight junction-like structures. (15 Iunie 2011). https://doi.org/10.1111/j.1600-0625.2011.01315.x (deschis la data de 26.09.2023)
[16] Drugs.com (2022). Online: https://www.drugs.com/comments/tretinoin-topical/for-acne.html?search=&sort_reviews=most_helpful#reviews (deschis la data de 26.09.2023)
[17] Kaisar, R., Bhupinder, S., Shikha, L., Gajanand, S., Poonam, N., Yukhti, Y., Om Prakash, K. (2013). Nano-lipoidal carriers of tretinoin with enhanced percutaneous absorption, photostability, biocompatibility and anti-psoriatic activity, International Journal of Pharmaceutics, Vol. 456, pp. 65–72

METODE DE PREPARARE A UNOR ECO-INHIBITORI

Camelia Daniela ŢICĂRAT (IONAŞ)[1], Petru Gabriel BADEA[2], Caius Marian STĂNĂȘEL[3], Alexandru BADEA[2], Gabriela Elena BADEA[4], Sanda BOTA[4]

[1]Facultatea de Informatică şi Științe, Universitatea din Oradea, master CSA
[2]Facultatea de Informatică şi Științe, Universitatea din Oradea, Informatică, Chimie
[3]Facultatea de Inginerie Managerială şi Tehnologică, master CFMAC, CSA
[4]Facultatea de Informatică şi Ştiinţe, Universitatea din Oradea, coordonator

Rezumat- *Inhibitorii sunt substanţe care adăugate în cantităţi foarte mici reduc sau chiar opresc fenomenul de coroziune al metalelor. Inhibitorii de coroziune verzi sau eco-inhibitorii sunt biodegradabili și nu conțin metale grele sau alți compuși toxici. Și funcționează ca inhibitori micsti care protejează metalul de coroziune prin adsorbție chimică și fizică și formarea unei pelicule protectoare.Ecoinhibitoarii se obtin prin extractia lor in solventi alcoolici sau hidroalcoolici, prin diferite metode cum ar fi macerarea sau extractia Soxhlet.*
Cuvinte cheie: extract hidroalcoolic, coroziune, inhibitori

INTRODUCERE

Tehnologia modernă are la dispoziţie o gamă largă de materiale de construcţie: metale, aliaje metalice, materiale plastice, produse ceramice, etc. Alegerea materialului potrivit pentru confecţionarea unui utilaj dat constituie o responsabilitate majoră a specialiştilor, o decizie putând fi luată numai ţinând cont de proprietăţile fizice şi mecanice, dar mai ales de efectul interacţiunii materialului cu mediul în care va fi exploatat, adică de comportarea la coroziune[1-3].

Efectele negative ale coroziunii sunt pierderile anuale de material metalic, la care se adugă cheltuieli suplimentare legate de oprirea unor instalaţii pentru înlocuirea părţilor corodate, poluarea cu diferitele metale, ce contaminează apa, solul sau aerul[1-3].

Procesul prin care un metal sau aliaj este transformat de la starea metalică la cea combinată prin interacţiune cu mediul înconjurător, poartă numele de coroziune.

Combaterea coroziunii este justificată de necesitatea siguranţei în exploatare a instalaţiilor, de asigurarea calităţii corespunzătoare a produsului fabricat, de limitare a pierderilor de materiale şi a poluării[1-3]. Tratarea mediului cu scopul de a micşora caracterul lui agresiv conduce în multe cazuri la scăderea considerabilă a vitezei de coroziune. Una din metodele de a proteja materialele metalice impotriva coroziunii este utilizarea inhibitorilor de coroziune[1-3].

Inhibitorii de coroziune sunt substanţe organice, cum ar fi aminele: piridine, chinoline, tiouree, sau anorganice: fosfaţi, cromaţi, care se adsorb la suprafaţa metalului şi scad considerabil viteza de coroziune. Inhibitorii sunt substanţe care adăugate în cantităţi foarte mici reduc sau chiar opresc fenomenul de coroziune al metalelor.

Inhibitorii de coroziune verzi sau eco-inhibitorii sunt biodegradabili și nu conțin metale grele sau alți compuși toxici [4-8]. Eco-inhibitorii sau inhibitorii organici verzi în funcție de compușii lor naturali sau de produsele pe care le conțin, cum ar fi aminoacizi, alcaloizi, fenoli și polifenoli, acizi grași[9], sau ca biologice (chitosan, aminoacizi, bacterii și ciuperci), vegetale (plante). extracte, cochilii, taninuri) și medicamente farmaceutice [10]. Indiferent de clasificarea lor, aproximativ 80% sunt clasificați ca inhibitori micsti care protejează metalul de coroziune prin adsorbție chimică și fizică și formarea peliculei [6]. În cele din urmă, este important să ne amintim că chiar și inhibitorii verzi pot să nu fie întotdeauna ieftini sau chiar ecologici din cauza costului și a timpului necesar pentru extragerea și purificarea substanțelor naturale, cum ar fi din unele plante [11], medicamente sau lichide ionice [8].

De asemenea pot fi necesari solvenți organici pentru procesul de extracție, care pot deteriora mediul. Astfel, abundența, reînnoirea și eliminarea bio sunt cheia pentru aplicarea unor astfel de inhibitori verzi în situații reale[10].

PARTEA EXPERIMENTALA

Materiale si substante necesare pt macerare

Pentru procesul de macerare sunt necesare substanțele și materialele prezentate în rândurile următoare și anume: plantele uscate, soluția de macerare: un amestec 1:1 de apă bidistilată și alcool etilic p.a., recipiente de stocare: sticluțe de culoare brună pentru a proteja extractele de oxidare și radiația solară.

Materiale si substante necesare pt extractie prin reflux (Soxlet)

Materialele și substanțele necesare pentru procesul de extracție Soxhlet au fost următoarele: dispozitiv Soxhlet compus din trei componente principale - un vas inferior, un extractor intermediar și un condensator superior; materialul solid sau semisolid (plante uscate, semințe, etc.); alcool etilic p.a.- solvent. Pentru a răci condensatorul, se folosește un sistem de răcire cu apă.

REZULTATE SI DISCUȚII

Obtinerea eco-inhibitorilor prin macerare

Compusii naturali- ecoinhiobitori, ce prezinta proprietati inhibitoare pentru coroziune au activitate antioxidanta determinata de prezenta compusilor fenolici.

Soluțiile de eco inhibitori sunt practic tincturi/extracte obtinute din material vegetal uscat si un amestec 1:1 de apa bidistilata si alcool etilic p.a. Pentru extract s-au cântărit 10 g de plantă uscată, cântărită la balanța analitică, peste care s-au adaugat 100 ml solutie apa-alcool etilic, 1:1, amestec de volum. Tinctura astfel obținută a fost acoperite cu parafilm, pentru a limita accesul oxigenului si metinute astfel 24 h la temperatura camerei.

Dupa 24 de ore, extractul au fost filtrat cu ajutorul unei pompe de vid si a aparatului Witt. Extractul a fost apoi stocate în sticluță de culoare brună, în frigider, pentru a evita oxidarea si modificarea sub actiunea radiatiei solare.

Figura 1. Obtinerea extractelor de eco-inhibitori prin macerare si reflux

Obtinerea eco-inhibitorilor prin reflux

Se plasează materialul solid sau semisolid în extractorul intermediar al dispozitivului Soxhlet, se umple vasul inferior al extractorului cu solventul adecvat, în cazul nostru -alcoolul etilic, se montează condensatorul în partea superioară a dispozitivului și se conectează la un sistem de răcire. Vasul inferior al dispozitivului se încălzește, permitând solventului să se evapore și să treacă în extractorul intermediar, astfel că, vapori de solvent urcă în extractor, se condensează în contact cu condensatorul răcit și se scurg înapoi în vasul inferior sub formă de solvent lichid. Acest ciclu de evaporare, condensare și revenire se repetă continuu, permitând solventului să treacă prin materialul de extracție și să extragă substanțele solubile.

Durata extracției variază în funcție de substanța dorită și de materialul de extracție, dar poate dura de obicei câteva ore sau chiar mai mult. După terminarea extracției, solventul împreună cu substanța solubilă extrasă este colectat în vasul inferior al dispozitivului Soxhlet.

Procesul Soxhlet este utilizat pentru a obține extracte concentrate de substanțe solubile din materiale solide sau semisolide și este un proces continuu care poate dura o perioadă semnificativă de timp, în funcție de natura extracției dorite.

CONCLUZII

In urma cercetarii efectuate pina acum asupra eco-inhibitorului de coroziune extras din Galium verum pentru otel in medii apoase acide, se pot desprinde urmatoarele concluzii:

- Stadiul actual al cunoasterii indica un potential urias pentru valorificarea de extracte naturale, netoxice, prietenoase cu mediul, cu efect de inhibitor de coroziune, ce pot fi utilizate la protectia anticoroziva a diferitelor metale si aliaje, in diferite solutii sau medii apoase.
- Studiile efectuate pina in prezent s-au axat pe evaluarea comportarii celor mai uzuale metale si aliaje: otel, aluminiu, cupru, aliaje de cupru, aluminiu si magneziu, ce au fost studiate in diferite medii apoase: acide, neutre sau bazice [11-17].
- Eco inhibitorii sunt extracte de plante ce contin in cantitati mari substante din clasele: polifenoli, taninuri si alcaloizi.

BIBLIOGRAFIE

[1] Badea, G.E. (2022). Coroziune si protectie anticoroziva, Ed. Universitatii din Oradea
[2] Badea, G.E. (2007). Chimie si Coroziune, Ed.Universitatii din Oradea
[3] Ciura, G. (2000). Chimie, Ed.Printech, Bucureşti
[4] Ratti, R. (2020). Industrial applications of green chemistry: Status, Challenges and Prospects, SN Applied Sciences, Vol. 2, pp.263
[5]Rani, B.E.A., Basu, B.B.J. (2012) Green inhibitors for corrosion protection of metals and alloys: an overview. Int J Corros 2012, pp.1–15
[6]Popoola, .LT. (2019) Organic green corrosion inhibitors (OGCIs): a critical review. Corros Rev., Vol. 37, pp.71–102
[7]Goni, L.K.M.O., Mazumder, A.J.M. (2019). Green corrosion inhibitors. In: Singh A (ed) Corrosion inhibitors. IntechOpen, London.
[8]El Ibrahimi, B., Jmiai, A., Bazzi, L., El Issami, S. (2020) Amino acids and their derivatives as corrosion inhibitors for metals and alloys. Arab J Chem., Vol. 13, pp.740–771
[9]Oguzie, E.E. (2008) Evaluation of the inhibitive effect of some plant extracts on the acid corrosion of mild steel. Corrosion Science, Vol. 50(11), pp.2993–2998
[10]Desai, P.S. (2015). Hibiscus rosa-sinensis (Jasud) leaves extracts used as corrosion inhibitors for mild steel in hydrochloric acid. E-jpmr, Vol. 2(1), pp.470–485
[11]Bensouda, Z., El Assiri, E.H., Sfaira, M. et all. (2019). Extraction, Characterization and Anticorrosion Potential of an Essential Oil from Orange Zest as Eco-friendly Inhibitor for Mild Steel in Acidic Solution. J Bio Tribo Corros, Vol. 5, pp. 84
[12] Bondarenko, N. Î., Yuchynska, A. O., Selivanova, T. V., Nechipurenko, P.P. (2021). Evaluation Of The Protective Effectiveness Of Aqueous Plant Extracts In The Composition Of Corrosion Inhibitor Extract, Ecological Bulletin Of Kryvyi Rih District.. Vol. 6, pp.. 119–128
[13]Mohammed, A., El-Hashemy, A. S. (2020). The inhibitive action of Calendula officinalis flower heads extract for mild steel corrosion in 1 M HCl solution, Journal of Materials Research and Technology, Vol. 9(6), pp.13509-13523
[14]Buğra, K., Alper, T., Iskender, I. and all. (2011). Inhibition of EN 10204 Steel in by a Mixture of Hypericum Perforatum Plant Extract and Nitrite Based Inorganic Inhibitors, Conference: The European Corrosion Congress, Stockholm
[15] Ramezanzadeh, M., Bahlakeh, G., Sanaei, Z., Ramezanzadeh, B. (2018). Studying the Urtica dioica leaves extract inhibition effect on the mild steel corrosion in 1 M HCl solution: Complementary experimental, ab initio quantum mechanics, Monte Carlo and molecular dynamics studies, Journal of Molecular Liquids, Vol. 272, pp. 120-136

[16]Badea, G. E., Dzitac, S., Marin, L., Petrehele, A. I. G., Porumb, C., Badea, P.G. (2023). An Investigation On The Electrochemical Behavior Of Steel In The Presence Of An Eco-inhibitor. 17th International Conference on Engineering of Modern Electric Systems (EMES), Oradea, Romania,
[17] Badea, G.E., Stănăşel, O. D., Bota, S., Dzițac, S., Ionaș, C., Badea, P.G., Stănăşel, C.M. (2022). Database With Eco-Inhibitors Of Corrosion For Carbon Steel In Acid Environment, Analele Universităţii Din Oradea - Fascicula Chimie, AUOFC Vol.XXVIII(29), pp. 23-26

STRUCTURA, BIOSINTEZA ȘI ACȚIUNEA VITAMINELOR HIDROSOLUBILE

Roșca Alexandru[1], Bondor Gabriela[2]

[1]Elev C.N.I. Vulcan Oradea
[2]Profesor chimie C.N.I. Vulcan Oradea, gabriela.bondor@yahoo.com

Rezumat: *Lucrarea este rezultatul documentării în literatura de specialitate a vitaminelor hidrosolubile*
Cuvinte cheie: vitamine hidrosolubile

Vitaminele complexului B

Nu toate vitaminele sunt la fel, așa că dacă vrem să ne fortificăm organismul, este important să înțelegem diferențele dintre vitaminele solubile în apă și cele care sunt solubile în grăsimi. Există diferențe importante între aceste două categorii, mai ales când vine vorba despre absorbție și despre stocarea și păstrarea lor in organism,.

Complexul vitaminelor B cuprinde următoarele vitamine: B_1, B_2, B_6, grupa vitaminelor B_{12}, nicotinamida, vitamina PP, acidul paraaminobenzoic (PAB), acizii pteroilglutamici, biotina, mezoinozitoul.

Vitaminele complexului B se găsesc în drojdia de bere (ca rezultat al biosintezei făcute de microorganisme), în cereale (grâu necorticat, orz, orez, ovăz, porumb) și în unele fructe (nuci, alune). În regnul animal se găsesc în ficat (depozit de vitamine), rinichi, creier, plămâni și mușchi.

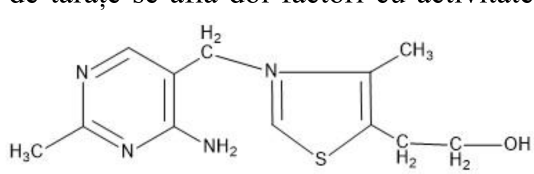
Caracteristica vitaminelor complexului B este participarea lor ca parte prostetică în structura unor enzime cu mare importanță metabolică.

Lipsa lor în organism face imposibilă sinteza enzimelor, încetinind procesel metabolice care întrețin viața organismelor.

Acest grup de vitamine reprezită factorii de creștere pentru microorganisme, fapt pe care se bazează o serie de teste microbiologice în care se determină cantitățile necesare în vitamine pentru creșterea anumitor culturi în condiții standard.

Vitamina B_1 (Aneurina, Tiamina)

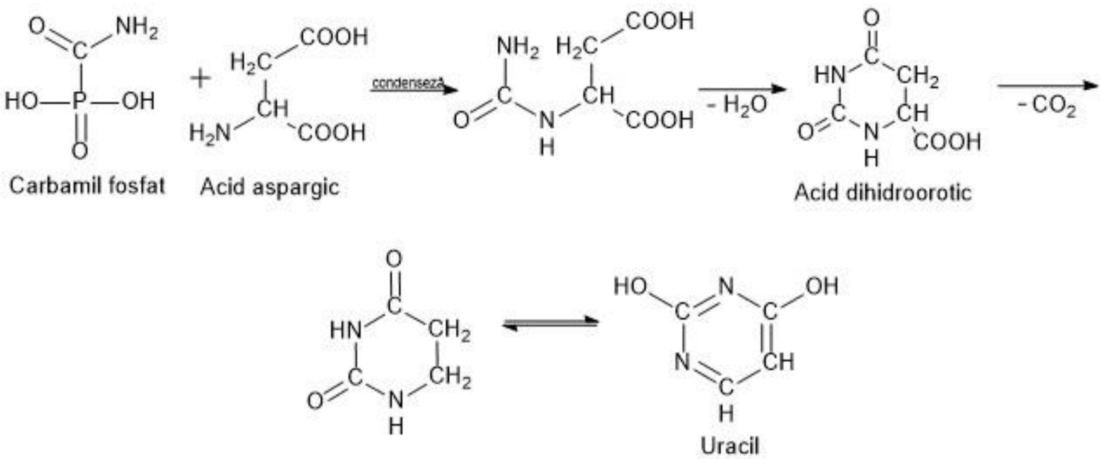
Tiamina este prima vitamină descoperită de Funck (1911) în tărâțele de orez, care, administrate bolnavilor suferind de beri-beri, îi vindecau de acestă boală. Câțiva ani mai târziu s-a constatat că în extractul de tărâțe se află doi factori cu activitate vitaminică: unul termolabil,



Vitamina B_1

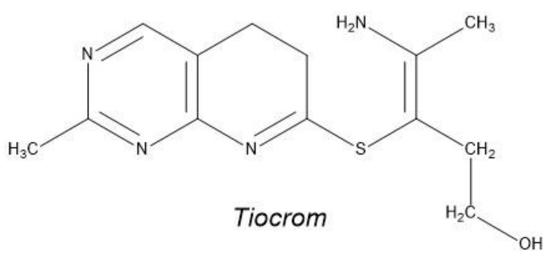
care vindecă boala beri-beri și care a fost numit vitamina B_1 și altul termostabil, cu rol în creștere, denumit vitamina B_2.

Biosinteza. Pentru că în structura ei intră un nucleu pirimidinic și unul tiazolic, se pune problema biosintezei acestor două nuclee. Până în prezent se cunosc date care confirmă biosinteza nucleului pirimidinic, plecând de la acidul aspartic, prin condensare cu carbamil-fosfatul, donor de energie.



Ciclul pirimidinic suferă, în continuare, transformări care duc la apariția metililor de la C_2 și C_5. În continuare, compusul se va condensa cu tiazolul, rezultând vitamina B_1.

Clorhidratul de vitamină B_1 se prezintă sub forma unei pulberi de culoare albă, cu punctul de topire la 246ºC, ușor solubilă în apă. Este distrusă ușor de acizi și de razele ultraviolete, când se oxidează, trecând în tiocrom. Pe această proprietate se bazează dozarea vitaminei B_1, deoarece în ultraviolet tiocromul este fluorescent.



Acțiunea fiziologică. În organism vitamina B_1 se găsește mai ales formă de ester pirofosforic (TPP), constituind partea prostetică a unor enzime, printre care și cocarboxilaza. Lipsa ei din alimentație duce, la om, la astenia generală, inapetență, tulburări gastrointestinale și edeme.

Vitamina B_6 (Piridoxina)

Piridoxina a fost cunoscută și sub numele de adermină sau factorul care previne pelagra la șobolani.

Vitamina B_6 s-a izolat din tărâțele de orez (Kuhn, 1938), apoi din drojdia de bere și din ficat.

Din punct de vedere chimic, este un derivat de piridină care este substituit cu diferiți radicali, în funcție de care putem avea următorii compuși:

Piridoxalul este răspândit în natură în cantitatea cea mai mare, iar din acesta se obțin celelalte două forme. Amestecul lor formează vitamina B_6.

Acțiunea fiziologică. Sub formă fosforilată, vitamina B_6 face parte dintr-o serie de sisteme enzimatice cu mare rol în metabolismul aminoacizilor. Vitamina B_6 constituie partea activă a transaminelor și aminoacid decarboxilazelor. Din seria ultimului grup amintim enzimele care au ca parte prostetică piridoxalfosfatul:

aminoacid decarboxillazele, cum sunt cele pentru histidină, tirozină, ornitină, llizină, acid glutamic, acid aspargic și alanină.

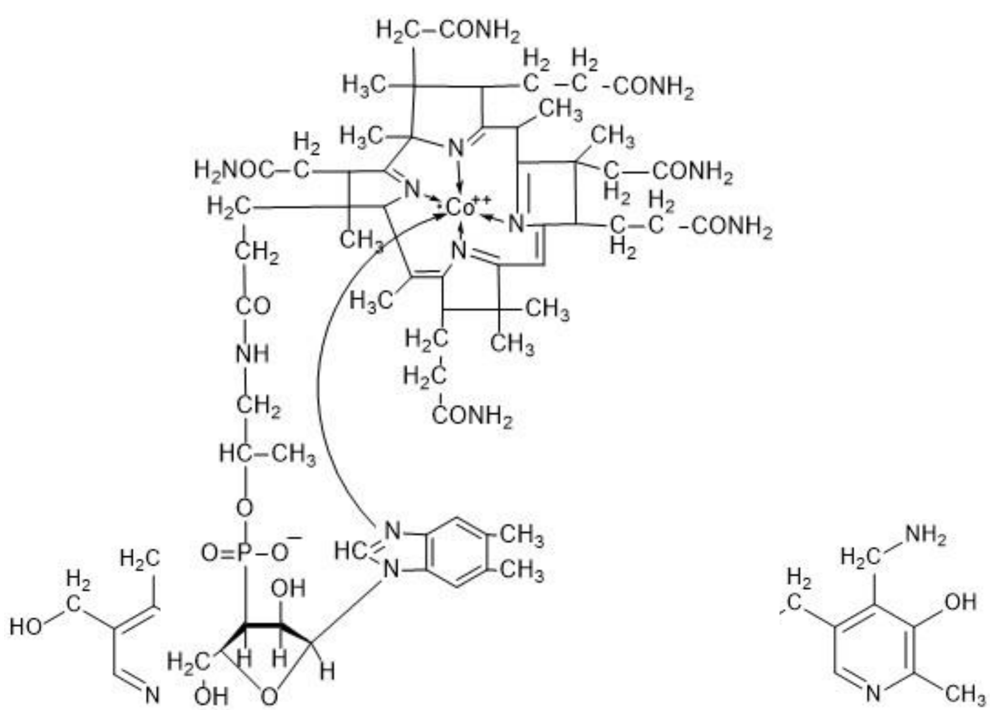
Vitamina B_{12} (Ciancobalamina)

Din 1926, Minot și Murphy au arătat că administrarea de ficat crud bolnavilor de anemie pernicioasă este în stare să vindece acestă bolală considerată incurabilă. După 20 de ani de cercetări s-a constatat că în ficat există un factor activ care vindecă anemia perniciosă. Astfel, în 1948, Smith (Anglia) și Rickes (S.U.A.) reușesc să obțină dintr-o tonă de ficat 20 mg vitamină B_{12} în stare cristalină.

Vitamina B_{12} se găsește în ficat, ouă, lapte, pește și apele reziduale de la fermentația antibioticelor. Este sintetizată de unele microorganisme, ca *Lactobacilus lactis* Dorner.

Acțiune biologică. În lipsa B_{12} apare la om o boală gravă denumită *anemia pernicioasă* (Biermer, 1856), care este cauzată în esență unei deficiențe în dezvoltarea globulelor roșii, sinteza de hemoglobină nefiind afectată.

Acțiunea intimă a vitaminei B_{12} se manifestă la nivelul metabolismului aminoacizilor, favorizând încorporarea acestora în lanțul polipeptidic, în biogeneza acizilor nucleici în procesele de transmetilare, în transportul unui fragment cu 1 carbon activ, stimulând hematopeza.



Pirid *Structura vitaminei B_{12}* *iridoxamina*

Vitamina C (Acidul ascorbic)

Încă din 1907, Hölst și Fröhlich au arătat că scorbutul cobaiului nu mai evoluează dacă se adaugă în hrană tărâțe de ovăz. Tot cu acestă ocazie s-a constatat că scorbutul este cel mai ușor de reprodus la cobai și la om, în timp ce câinele, pisica și șobolanul nu fac acestă boală, deoarece sintetizeză acidul ascorbic.

Vitamina C este una dintre cele mai răspândite vitamine, atât în regnul vegetal (lămâii, portocale, măceș), cât și în cel animal.

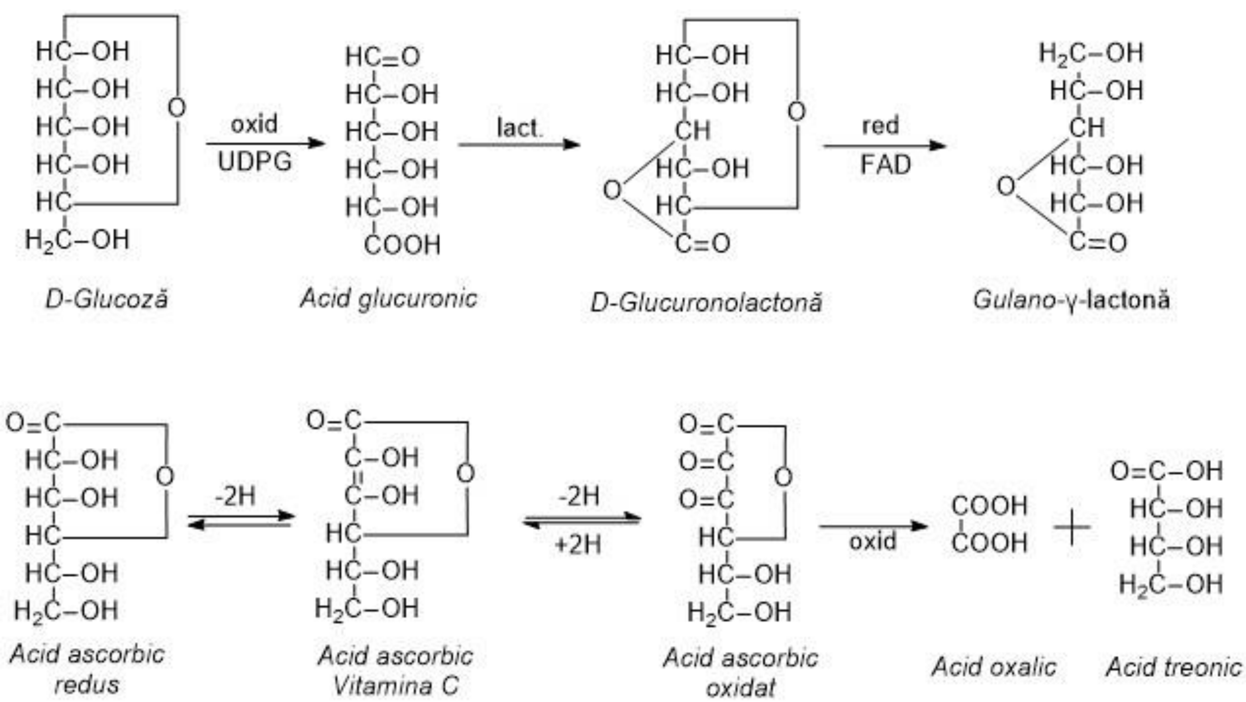
În 1928, Szent-Györyi izoleză vitamina sub formă cristalină din sprarenale, dându-i denumirea de acid ascorbic sau hexuronic.

Din punct de vedere structural, este un acid cu șase atomi de carbon, care conține în moleculă patru grupări oxidril și o dublă legătură.

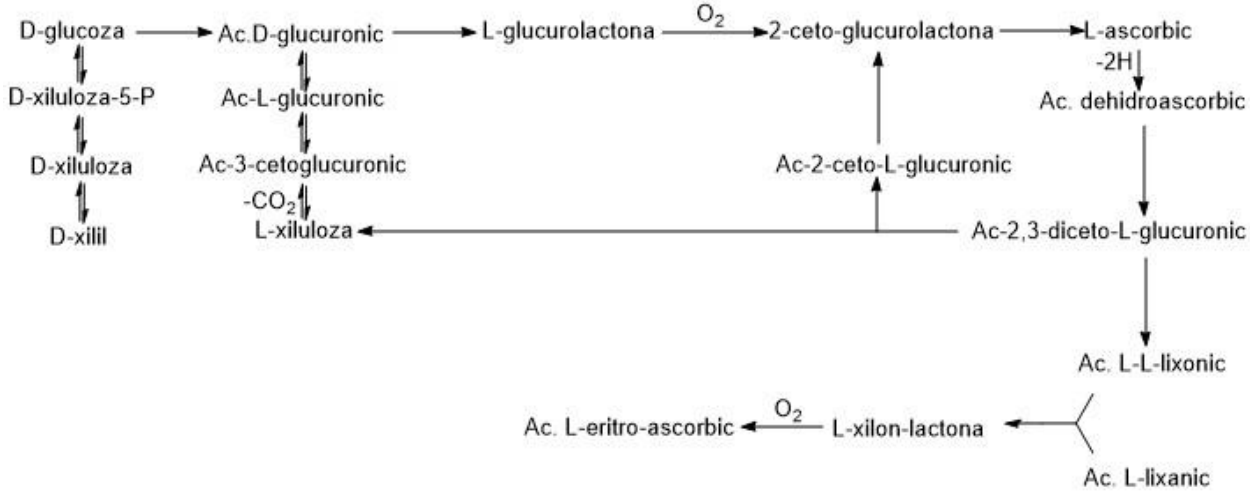
Aciditatea acidului ascorbic se datorează disocierii celor doi protoni din forma enolică (pK_a=4,17). Activitatea sa pricipală este de a funcționa ca sistem *redox* într-o serie de reacții biologice. Reducera formei cetonice este realizată de compuși ca cisteina și glutationul. Un sistem important la care participă este cel de oxidare a acidului p-hidroxifenilpiruvic, precum și la o serie de reacții de hidroxilare în seria hormonilor steroizi sau de formare a 5-hidroxi-triptaminei (serotoninei). Alături de vitaminele E și K face parte din factorul Slater în sistemul de respirație celulară, mediind transmiterea electronului între potențialele electronegative și cele electropozitive.

Biogeneza acidului ascorbic pleacă de la glucoză, care sub acțiunea enzimelor specifice, trece în final în vitamina C, după reacțiile:

Acțiunea biologică. Acidul ascorbic este un factor indispensabil în procesele *redox* din organism, el intrând în structura unor țesuturi ca țesutul conjuctiv; ia parte la multe reacții în



metabolismul glucidic, care în rezumat sunt prezentate în schema alăturată:



În afară de cele menționate mai sus, acidul ascorbic mai intervine în activitatea unor sisteme enzimatice, printre care amintim: catalaze, fenoloxidaze, xantinoxidaze, α-amilaze, ureaza, arginaza, în biosinteza hormonilor tiroidieni, a celor suprarenali, a hematopoezei etc.

Acidul ascorbic participă, la nivelul corticalei suprarenale, la biogeneza hormonilor corticosteroizi; de aici cantitatea mărită de acid ascorbic care se găsește în sprarenală.

Deoarece vitaminele hidrosolubile nu pot fi stocate sau păstrate în corp, rezervele acestor vitamine trebuie să fie reumplute în mod regulat, cu ajutorul alimentației.

BIBLIOGRAFIE

[1]Căpâlna, S. (1971). Biochimie dinamică, Ed. Medicală, București
[2]Benetato, G. (1962). Elemente de fiziologie normală și patologică, ed.medicală, București
[3]Bersin, T. (1959). Biochimie der Hormone, Akad. Verlag, Leipzig
[4]Chiosa, L, Neuman, M.(1955). Vitamine și antivitamine Ed Medicală, Bucuresti

STUDIUL BIOFIZIC AL CIRCULAȚIEI SÂNGELUI

Gabriella–Kinga BIRÓ[1], Cristian-Dorin HOREA[2]

[1]Universitatea din Oradea, Facultatea de Informatică şi Ştiinţe studentă Fizică Medicală, anul III, gabriellabiro86@gmail.com
[2]Universitatea din Oradea, Facultatea de Informatică şi Ştiinţe, Departamentul de Fizică

Rezumat. *Sângele este un țesut special, o substanță lichidă de culoare roșie, care prin intermediul aparatului circulator, alcătuit din inimă și vasele sanguine, transportă nutrienții și oxigenul la nivelul țesuturilor corpului, de unde preia dioxidul de carbon și produșii de catabolism tisular, transportându-i la nivelul organelor de eliminare. Sângele poate fi studiat din punct de vedere biologic, chimic sau fizic. Lucrarea are ca scop realizarea unei treceri în revistă a studiului circulației sângelui din punct de vedere biofizic*

Cuvinte cheie: sânge, inimă, hemodinamică, elasticitate, vase sanguine

INTRODUCERE

Biofizica este o ramură interdisciplinară a științei care se ocupă cu studiul proceselor şi fenomenelor biologice utilizând principiile fizicii, având o importanță deosebită în medicină, deoarece ajută la înțelegerea proceselor biologice, cum ar fi curgerea sângelui prin sistemul vascular.

Lucrul mecanic al inimii

Dintre fenomenele fizice care se desfăşoară în cursul activității inimii, o importanţă deosebită o are efectuarea de lucru mecanic de către inimă prin expulzarea sângelui, la fiecare ciclu (aproximativ $1{,}6\,J$). În fazele ciclului cardiac în care variaţia de volum este nulă (contracţia şi relaxarea izovolumice sau izometrice) nu se efectuează lucru mecanic, spre deosebire de etapa de ejecţie. Faza de umplere reprezintă un aport de lucru mecanic datorat presiunii mai mari a sângelui din atriu. Lucrul mecanic este cu atât mai mare cu cât numărul contracţiilor cardiace creşte, ca în cazul efortului fizic (figura 1.).

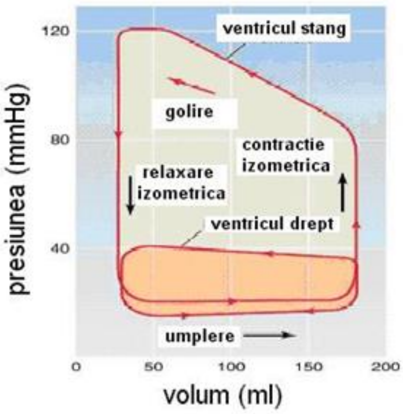


Figura 1. Lucrul mecanic efectuat de inima în timpul unui ciclu cardiac [3]

Conform legii de conservare a energiei, lucrul mecanic al inimii se va regăsi sub alte forme de energie în:

- energia potențială a sângelui (căreia îi corespunde o presiune efectivă asupra pereților vasului),
- în energia cinetică a sângelui care măsoară mișcarea sângelui,
- în încălzirea sângelui ca urmare a frecărilor dintre straturile de sânge.

Lucrul mecanic generat de inimă în sistolă se acumulează parţial sub formă de energie potențială și este cedat apoi coloanei de sânge în timpul diastolei. Deoarece arterele au pereți elastici, în condițiile regimului pulsatil în care lucrează inima, acestea permit curgerea sângelui și în perioada în care inima este în diastolă; astfel, debitul este cu mult mai mare decât debitul ce ar exista în vase cu pereți neelastici.

Structura și elasticitatea pereților vaselor sanguine

Prin elasticitate se înțelege proprietatea unui corp de a-și modifica dimensiunile în urma aplicării unei forțe și de a reveni la starea inițială după înlăturarea forței. În cazul corpurilor elastice omogene are loc legea lui Hooke, conform căreia alungirea relativă $\frac{\Delta l}{l}$ este proporțională cu tensiunea $\frac{F}{S}$. Legea lui Hooke este valabilă numai în zona deformării elastice (figura 2., unde Oa - deformarea elastică; ab - deformarea plastică; b - limita de curgere; d - punctul de rupere).

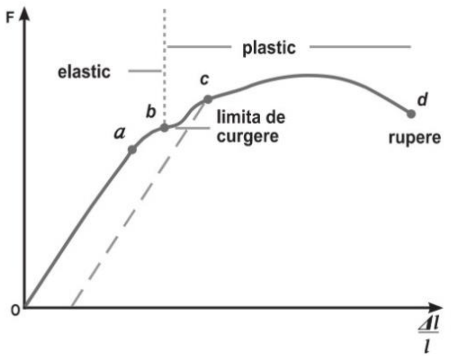


Figura 2. Diagrama forță-alungire [1]

Pentru forțe mai mari, deformarea devine plastică; corpul nu-și recapătă forma inițială la dispariția forței. Din punct de vedere structural, pereții vaselor sanguine sunt constituiți din patru tipuri de țesuturi:

1. Endoteliu, format dintr-un strat de celule turtite, care căptușește interiorul peretelui, conferindu-i un caracter neted. Trebuie de menționat ca endoteliul posedă o permeabilitate selectivă pentru diferite substanțe.
2. Fibre de elastină cu modulul de elasticitate $3 \cdot 10^5 N \cdot m^{-2}$. Ele sunt foarte ușor extensibile și creează o tensiune elastică în peretele vasului, conferindu-i acestuia o rezistență minimă la distensia produsă de presiunea sanguină.
3. Fibre de colagen cu modulul de elasticitate $10^8\ N \cdot m^{-2}$, care sunt mult mai rezistente la întinderi decât fibrele de elastină și conferă vasului sanguin rezistență la presiuni mari. În plus, fibrele de colagen au o structură pliată, astfel ele nu intervin decât după o anumită alungire.
4. Fibre musculare netede, care predomină pe măsură ce diametrul arterial se micșorează, ajungând cea mai mare dezvoltare la nivelul arteriolelor. Fibrele musculare netede realizează o tensiune activă controlată fiziologic. Contracția lor modifică raza vaselor și implicit debitul sângelui prin acestea.

Nefiind corp omogen, peretele vascular nu se supune legii lui Hooke. Dependența tensiunii din peretele vasului de alungire, așa-numită curbă tensiune-extensie, nu este liniară (figura 3).

Modulul lui Young nu este constant, ci crește odată cu mărirea presiunii arteriale. Elasticitatea arterială joacă un rol deosebit de important în reologia sângelui, deoarece nu numai că transformă regimul intermitent de propulsare a masei sanguine în regim continuu de curgere, dar și concomitent, mărește debitul sângelui prin vase.

Experiența lui Marey a pus în evidență această diferență: s-a considerat un tub de sticlă care se bifurcă, una dintre ramuri fiind din sticlă, iar cealaltă din cauciuc, ambele ramuri având același diametru. Prin capătul tubului a trimis un curent de apă întrerupt ritmic. A observat că în timp ce curgerea era intermitentă în ramura de sticlă, deoarece la fiecare oprire de debit, presiunea atmosferică se opunea curgerii, în ramură de cauciuc, curgerea era continuă, însă cu o viteză mai mică.

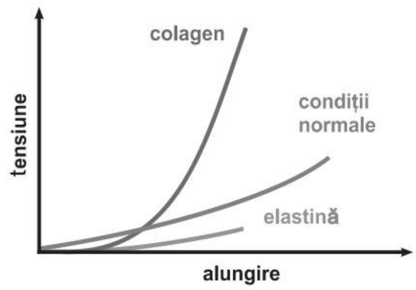


Figura 3. Diagrama tensiune – alungire. [2]

Măsurând volumele de lichid scurse prin cele două ramuri în intervale egale de timp, a constatat că mai mult lichid s-a scurs prin tubul elastic, decât prin cel de sticlă, deși diametrele acestora erau egale. Acest fenomen se explică prin elasticitatea tubului de cauciuc. Presiunea lichidului care vine dintr-un rezervor cu debit constant acționează nu numai asupra coloanei de lichid din tub, împingând-o înainte, dar și asupra pereților elastici ai tubului, cărora le imprimă o deformație elastică.

Tubul elastic deformat revine apoi la forma inițială, dezvoltând o forță elastică proporțională cu deformația, astfel lichidul continuând să curgă din spațiul suplimentar cu care tubul i-a mărit diametrul prin deformarea elastică. Așadar, în tubul elastic, lichidul curge continuu, cu o viteză mai mică, dar cu un volum mai mare decât în tubul de sticlă.

MATERIALE ŞI METODE

În timpul circulației sanguine o parte din energia cinetică a sângelui se transformă în căldură datorită frecării cu pereții vaselor sau vâscozității. Din această cauză energia mecanică a sângelui scade, și pierderea este compensată prin lucrul mecanic efectuat de mușchiul inimii. Ciclul cardiac poate fi reprezentat grafic, în coordonate presiune – volum, pentru ventricolul stâng, (figura 4.), în care distingem următoarele faze: AB – faza de umplere a inimii cu sânge, prin artera pulmonară, la presiune mică și constantă (diastolă); BC – contracția izometrică a mușchiului inimii; CD – faza de pompare a sângelui în aortă (sistola); DA – relaxarea mușchiului. Între presiunea sistolică și presiunea diastolică există relația:

$$p_d \approx \frac{1}{2} p_s \quad (1).$$

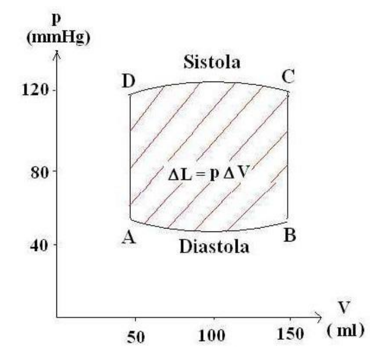


Figura 4. Reprezentarea ciclului cardiac în coordonate (p,V) [5]

Suprafața hașurată reprezintă lucrul mecanic efectuat de ventricolul stâng, respectiv aria unui dreptunghi, având drept laturi $\Delta p = p_s - p_d$ și ΔV, volumul sângelui pompat la o contracție a miocardului:

$$\Delta L = \Delta p \cdot \Delta V = 70 \cdot 100 \cdot 133 \cdot 10^{-6} = 0{,}93\, J \quad (2)$$

Dacă ținem cont și de ventricolul drept, care se comportă asemănător dar efectuează un lucru mecanic mai mic cu aproximativ 20%, rezultă că lucrul mecanic total efectuat de inimă la o contracţie este de $L = 1,1\,J$. La un puls de $60\ min^{-1}$, puterea inimii este:

$$P = \frac{\Delta L}{\Delta t} = 1,1\,W \quad (3)$$

Cu ajutorul unui tensiometru se determină presiunea sistolică şi diastolică şi cu un cronometru se măsoară pulsul. Valorile obținute se trec în tabelul 1.

REZULTATE ŞI DISCUŢII

Tabelul 1. Rezultate experimentale pentru calculul lucrului mecanic și al puterii

Nr. det.	p_s $(mmHg)$	p_d $(mmHg)$	$Puls, f$ (min^{-1})	$\Delta p = p_s - p_d$ $(mmHg)$	ΔV (ml)	L (J)	Δt (s)	P (W)
1.	132	80	78	52	105	0,726	0,769	0,944
2.	140	90	82	50	120	0,798	0,731	1,090
3.	102	64	76	38	65	0,328	0,789	0,416
4.	120	73	77	47	95	0,593	0,779	0,762
5.	104	75	72	29	85	0,327	0,833	0,393

Durata unui puls, $\Delta t\ (s)$, se calculează cu relația:

$$\Delta t\ (s) = \frac{60}{f}\ (min^{-1}) \quad (4).$$

Pentru volumul sângelui pompat pe durata unui puls, (ΔV), se va utiliza tabelul următor, unde m este masa corporală a subiectului investigat; pentru alte valori ale masei corporale se va utiliza interpolarea liniară.

Tabelul 2. Valori corespunzătoare pentru masa corporală și volumul sângelui pompat

Bărbați		Femei	
$m\ (kg)$	$\Delta V\ (ml)$	$m\ (kg)$	$\Delta V\ (ml)$
50	80	50	75
60	90	60	85
70	100	70	95
80	110	80	105
90	120	90	115

CONCLUZII

Lucrul mecanic este direct proporţional cu volumul sângelui pompat la o contracţie, lucrul mecanic este direct proporțional cu pulsul și invers proporțional cu durata unui puls.

S-a dovedit că elasticitatea arterială joacă un rol deosebit de important în reologia sângelui, deoarece nu numai că transformă regimul intermitent de propulsare a masei sanguine în regim continuu de curgere, dar și concomitent, mărește debitul sângelui prin vase. Acest lucru are o importanță deosebită în curgerea sângelui în regimul pulsatoriu impus de inimă prin vasele elastice care înmagazinează energie potențială în timpul sistolei, asigurând un flux mai mare de sânge decât dacă vasele ar avea pereți rigizi.

BIBLIOGRAFIE

[1] Croitoru, D., Vovc, V., Cojocaru,I. (2013). Biofizică medicală, Prelegeri, Exerciții, Chișinău, Republica Moldova pp. 48-60, 63-72

[2] https://www.qdidactic.com/sanatate-sport/medicina/mecanica-lichidelor-biomecanica-lichidelor336.php;

[3] Fumeral, D. (2017). Biofizică medicală

[4] Băran, I., Călinescu,O., Ionescu, D., Iftime,A., Ganea, C. (2017). Curs de biofizică, Editura Universitară „Carol Davila", București pp.114-126

EFICIENȚA METODELOR DIDACTICE ÎN ÎNȚELEGEREA NOȚIUNILOR DE FIZICĂ LA ELEVII DIN CLASELE PRIMARE

Cristina DĂRĂBAN[1]

[1] Liceul Tehnologic ”Felix” Sânmartin - profesor învățământ primar

Rezumat: *O condiție esențială și obligatorie pentru dezvoltarea unui copil este de a-i lărgi orizontul, de a-l face dornic de cunoaștere, la început printr-o învățare dirijată, mai apoi prin acțiuni autodidacte, prin descoperire...*
Un mare om de știință a zis...”Nimic în viață nu trebuie temut, ci doar înțeles. Acum este momentul să înțelegem mai mult ca să ne temem mai puțin” (Marie Curie)
Doar așa, lumea va putea evolua în continuare!
Cuvinte cheie: ştiinţă, experiment, descoperire, evoluție

INTRODUCERE

Metodele didactice reprezintă ”calea” pe care o propune cadrul didactic în activitatea educațională de predare, învățare și evaluare, considerând-o cea mai eficientă pentru a ajunge la efectul scontat.

Așadar, atingerea obiectivelor instructiv-educative se realizează prin corelarea metodelor, a mijloacelor de învățământ și a formelor de organizare (frontal, individual și în grup).

Metodele didactice pot fi clasificate după mai multe criterii, aici fiind amintite doar două, și anume:

-din punctul de vedere al modalității cunoașterii: metode de transmitere și însușire de cunoştinţe; metode de explorare și descoperire și metode bazate pe acțiune

-din punct de vedere istoric: metode tradiționale și metode moderne.

Metodele didactice, oricare ar fi ele, prezintă avantaje și dezavantaje, modalitatea de a le alege și de a le combina în funcție de obiectivele urmărite ține de măiestria și priceperea cadrului didactic

În ultimii ani se pune accentul pe metodele activ-participative, deoarece le stârnește elevilor curiozitatea, imaginația, determină implicarea activă a acestora, le stimulează și canalizează energia în procesul instructiv-educativ, le prelungeşte concentrarea pe subiect și implicit crește eficiența asimilării și înțelegerii.

METODE, MIJLOACE ȘI FORME DE ORGANIZARE

La clasele primare, aria curriculară ”Matematică și științe ale naturii”, se comasează în clasa pregătitoare și clasa I, în disciplina ”Matematică și explorarea mediului”. În clasele a III-a și a IV-a, se disting separat ”Matematica” și ”Științe ale naturii”.

Din această arie curriculară mă voi opri la ”Științe ale naturii”.

Elevii sunt atrași de mici spre cunoașterea mediului lor de viață, povestesc despre propriile experiențe, își ascultă colegii care povestesc experiențe diferite de ale celorlalți, respectiv sunt foarte deschiși spre necunoscut.

Totodată, fiind încă mici, nu au răbdarea necesară de a asimila informații prin metode expozitive și frontale îndelungate. Nici noțiunile abstracte nu le înțeleg bine decât spre finalul ciclului primar. De aceea ei au nevoie de suporturi intuitive, demonstrative, instruirea asistată de calculator, internetul, etc.

Noţiunile de fizică și chimie apar destul de puţin în programa ştiinţelor naturii. Cu toate acestea, elevii sunt foarte curioși și dacă aceste noțiuni le sunt explicate interesant și practic, ei cer din ce în ce mai multe informații și exemple.

Observând această afinitate a copiilor spre ”cunoașterea realității”, începând mai simplist din clasa I și continuând din ce în ce mai complicat până în casa a IV-a obișnuiesc prin joacă, prin descoperire experimentală, să le formez o cultură generală și în acest sens.

Orele la care realizez aceste lucruri cu elevii sunt orele de științe. Le promit copiilor că la sfârșitul orei (ultimele 10 minute), dacă au fost atenți, activi și disciplinați, ca și o ”recompensă” vom putea face împreună un experiment. Obișnuiesc să îi spun ”pastila de cultură generală”.

Aceste microsecvențe de învățare cuprind trei etape:

-stârnirea interesului elevilor în legătură cu conținutul (prin discuții, filmulețe sau pur și simplu prin prezentarea unei probleme de soluționat

-căutarea și aflarea răspunsurilor (prin observare, experiment, rezolvare)

-evaluarea și discutarea rezultatelor obținute.

Elevii trebuie familiarizați cu organizarea unui mediu propice pentru a realiza experimente.

-îmbrăcămintea să fie potrivită unei activități practice

-ordinea trebuie păstrată pe masa de lucru pe tot parcursul lucrului

-se lucrează doar sub supravegherea profesorului

-se lucrează prudent, indiferent de mijloacele didactice folosite.

Forma de organizare a colectivului este frontal, individual sau pe grupe, în funcție de experimentul făcut. Obișnuiesc să îi așez în semicerc în fața mea când le prezint doar eu experimentul, respectiv câte patru elevi într-o grupă, așezați în așa fel la mese încât să îi pot observa pe fiecare, atunci când realizează și ei activitatea practică.

DESCOPERIRILE EXPERIMENTALE, PROBLEMATIZĂRILE

Circuitul apei în natură, realizat chiar la capitolul respectiv din manual, realizat de cadrul didactic, elevii așezați în semicerc.

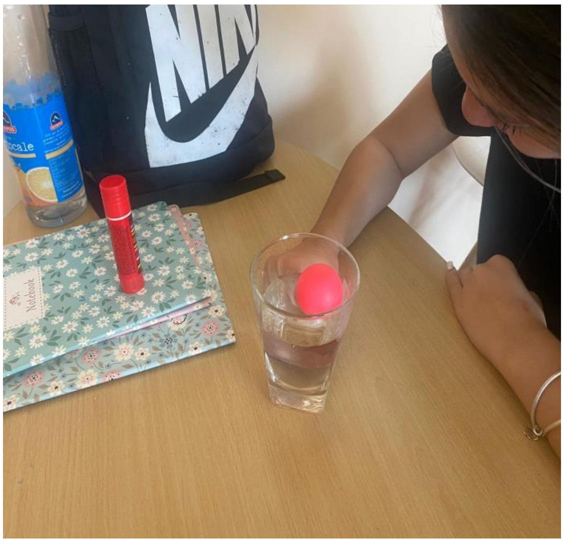
Se realizează în fața elevilor o analogie între imaginea din carte și o oală plină cu apă, apă care va fierbe cu ajutorul unui termoplonjon. Aburii creați ajung pe capacul cu care se acoperă oala . După puțin timp se ridică, și aceștia datorită condensului se transformă în picături de apă ce se preling din nou în oală.

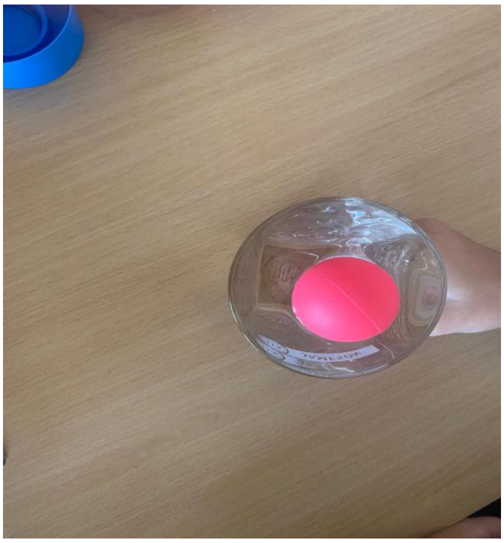
Doza de aluminiu goală care sare din cană, realizat de fiecare copil în parte, așezat la propria bancă.

Se introduce doza goală în cana goală, și se suflă în spațiul dintre doză și peretele cănii. Li se explică pătrunderea aerului până sub doză, respectiv viteza mare a acestuia datorită locului mic, face ca doza să iasă din cană.

Mingea de ping-pong în paharul cu apă, realizat pe grupe de câte 4.

Se umple pe jumătate un pahar cu apă și se așează o minge de ping-pong pe nivelul apei. Aceasta se va deplasa întotdeauna spre margini, indiferent cum o dirijăm. La umplerea paharului până sus, mingea va sta în centru, indiferent de dirijare. Explicația pe înțelesul lor va fi că atunci când paharul e umplut parțial, forma ”apei” de la suprafață face ca mingea să se deplaseze către margini, respectiv forma când e plin, o face să rămână central.





Paiul nebunatic,se realizează de către toți elevii cu propriile flacoane de apă, umplute și un pai pe care îl electrizează de păr. Se pune paiul pe dopul flaconului și se poate învârti în ambele sensuri dirijându-l cu degetul, fără a-l atinge. Explicația este că paiul electrizîndu-se îl putem controla de la distanță.

Sensul săgeților se inversează când sunt privite pe sub apă, se realizează pe echipe. În spatele unui pahar se lipește o hârtie cu două săgeți orientate în sens opus. Când se umple paharul cu apă, săgețile își schimba sensul. Ele sunt reale, răsturnate și mai mari.



Acestea sunt doar câteva din experimentele realizate, dar foarte îndrăgite de copii. Ei așteaptă cu nerăbdare orele de științe. Ba mai mult, vin cu idei, ce au văzut și vor să încerce, sau cu tot felul de întrebări, ”De ce...?”

CONCLUZII ȘI DISCUȚII

În urma experiențelor personale din ultimii ani, în urma discuțiilor cu colegii care predau discipline unde se folosesc metode de învățare prin descoperire, problematizare, experimente, am hotărât că ar fi foarte potrivit să întocmesc un opțional bazat pe descoperire prin experimente.

Toate aceste activități desfășurate le-ar fi de mare ajutor atât elevilor cât și profesorilor la trecerea în ciclul gimnazial.

În linii generale, s-ar axa pe domenii de interes, pe categoria de vârstă a elevilor și ar fi o oră pe săptămână.

Experimentele s-ar complica față de cele de 10 minute făcute până acum, de exemplu confecționarea unui caleidoscop, sau formarea unui curcubeu în ligheanul cu apă, etc.

Pe lângă acestea, ar mai fi mici povestiri și curiozități despre oamenii de știință care au schimbat lumea (Marie Curie, Albert Einstein, etc.). Acestea vor fi citite, sau prezentate pe tabla smart.

Materialele didactice, din cele mai simple, de preferat reciclabile. Totodată am putea colabora cu profesorii de la catedra de științe din şcoală pentru a ne ajuta și ei cu diverse materiale didactice din dotarea laboratoarelor şcolii.

Pentru evaluarea elevilor, s-ar putea face miniexpoziții cu lucrările lor, expuse atât în clasă cât și pe holul şcolii sau în laborator. Totodată, după terminarea fiecărei lucrări elevii vor desena ceea ce au făcut. Aceste desene vor reprezenta portofoliul individual.

Motto-ul ar fi:”Este important să facem din viață vis și din vis realitate” (Marie Curie).

BIBLIOGRAFIE

[1] Popa, C.A. (coord.), (2014) Teoria și metodologia instruirii, Ed. Universității, Oradea.
[2] Ciascai, L. (2007), Didactica fizicii, Ed. Corint, București.
[3] www1: https://youtu.be/y41EaIWxVkk?si=Tyg8WOq5g02HpSQz
[4] www2: https://youtu.be/AK6Y1bnuR-0?si=M2kk31rMzBM5NGgR

ANALIZĂ SPECTRALĂ ASUPRA UNOR PRODUSE FARMACEUTICE

Monica FLORA[1], Noemia BUCUR[2]

[1]Universitatea din Oradea, lector dr., Departamentul de Fizică, floramoni@gmail.com
[2]Universitatea din Oradea, student anul II Fizică Medicală

Rezumat. *Lucrarea prezintă spectrul IR (radiația în infraroșu), evidențiat în domeniul farmaceutic asupra medicamentelor utilizate pe scară largă în viața de zi cu zi. Spectroscopia este o metodă experimentală de caracterizare a diferitelor substanțe, în urma studiului răspunsului materialului de interes la iradierea cu unele surse de lumină.*
Cuvinte cheie: spectroscopie, radiația infraroșie (IR), medicamente, spectru

INTRODUCERE

Spectroscopia IR este o metodă uzuală în elucidarea structurii și identificarea unui compus chimic. Principalul obiectiv al spectroscopiei IR constă în determinarea grupărilor funcționale ale probei analizate. Grupele funcționale absorb radiații IR la frecvențe caracteristice.

Proba utilizată se poate afla in stare solidă, lichidă sau gazoasă. Scopul experimentului Radiația IR poate fi definită ca acea radiație electromagnetică situată între radiația din domeniul vizibil și microunde este ca în urma expunerii probei de material la radiația infraroșie (IR), să se înregistreze spectrele de transmisie, de putere și forma de undă a substanței analizate.

Pentru a realiza experimentul s-au utilizat diverse produse farmaceutice ce au fost supuse la radiației laser în domeniul infraroșu îndepărtat. Substanța medicamentoasă este o structură chimică capabilă să producă un efect farmacodinamic. Forma farmaceutică este modul de prezentare al unei substanțe medicamentoase asociată cu substanțe auxiliare potrivite cu scopul de a fi administrată pe o anumită cale în interes terapeutic.

Medicamentul este – orice compus chimic pur sau produs complex care datorită acțiunii exercitate asupra organismului poate fi folosit pentru diagnosticul, prevenirea, tratamentul și ameliorarea bolilor. Originea medicamentelor poate fi:

- vegetală – diferite părți ale plantelor: folium, flores, radix, semen, cortex. (morfina, atropina, digoxinul)
- animală – hormoni (insulina porcină, bovină); enzime (tripsina amilaza)
- minerală – caolinul, bentonita
- semisintetice – unele antibiotice (penicilina G)
- sintetice – chimioterapicele, sulfamidele antibacteriene, etc.

MATERIALE ŞI METODE

Spectroscopul este un instrument utilizat pentru a analiza spectrul de radiație al unei substanțe prin emiterea, absorbția sau răspândirea radiației. Spectroscopul poate fi utilizat pentru a determina compoziția chimică, structura și proprietățile substanței analizate. Există mai multe tipuri de spectroscoape, fiecare fiind specializat pentru anumite tipuri de radiație și aplicații.

Spectroscoapele atomice și moleculare sunt utilizate pentru a analiza spectrele emise sau absorbite de atomi sau molecule, și sunt utilizate pentru determinarea compoziției chimice și proprietăților substanțelor analizate. Spectroscoapele IR și Raman sunt utilizate pentru a analiza si a determina structuri moleculare și proprietăți vibraționale. Spectroscopul poate fi un dispozitiv independent sau poate fi integrat într-un alt instrument, cum ar fi un microscop sau un analizor de masă.

Identificarea unei substanțe pe baza spectrului IR este o chestiune de selecție a benzilor de absorbție și de comparare cu datele de referință existente în bibliotecile de spectre. De multe ori însă benzile caracteristice unor grupe de atomi sunt afectate de restul moleculei, fapt ce necesită realizarea unor corelații între pozițiile maximelor de absorbție și prezența unor grupări funcționale organice în moleculele substanțelor analizate.

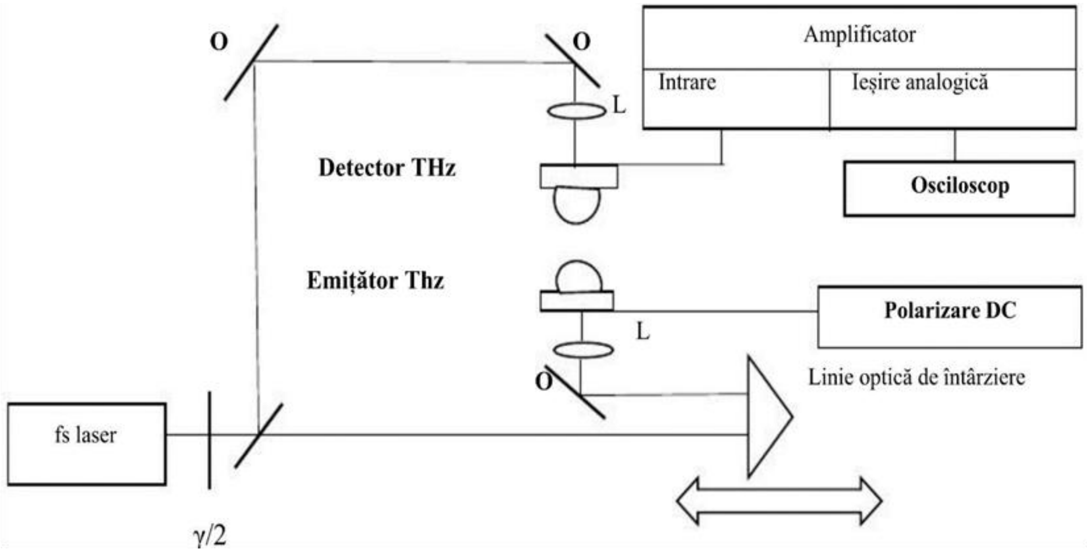


Figura 1. Schema de măsură utilizată

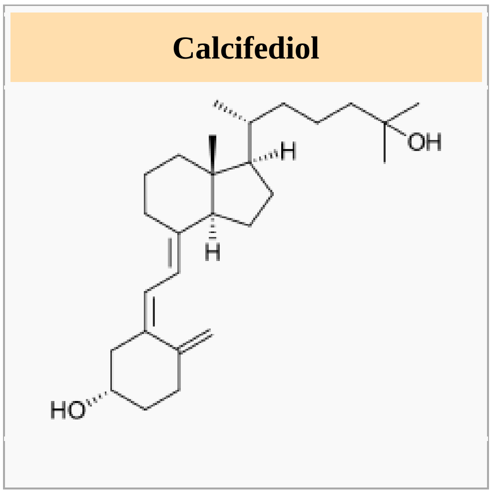


Figura 2. Formula chimică a vitaminei D_3 : $C_{27}H_{44}O$

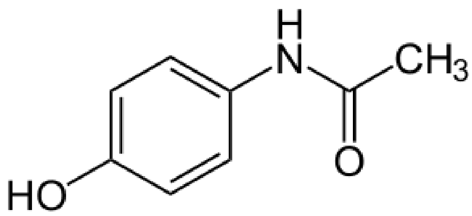


Figura 3. Formula chimică pentru Paracetamol $C_8H_9NO_2$

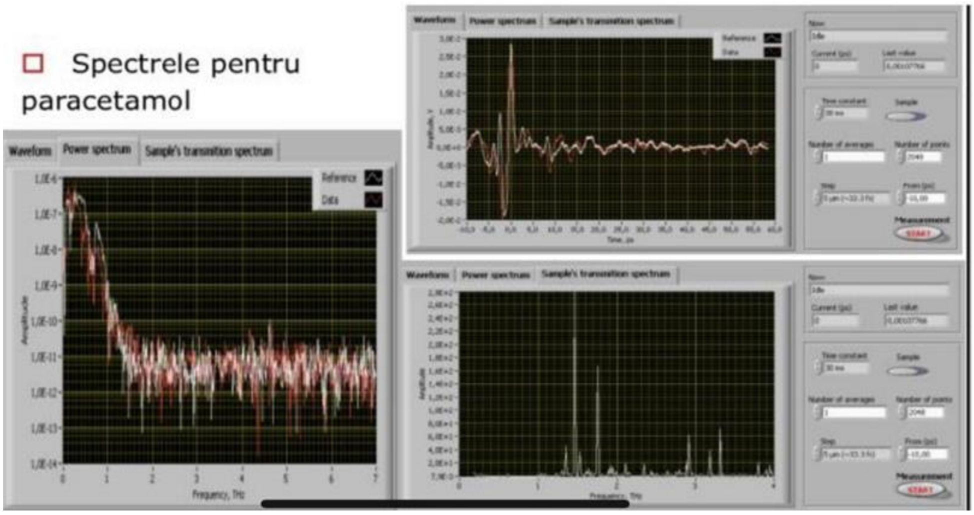
REZULTATE ŞI DISCUŢII

Rezultate experimentale din tabelul de mai jos prezintă cele patru substanțe care au fost supuse experimentului:

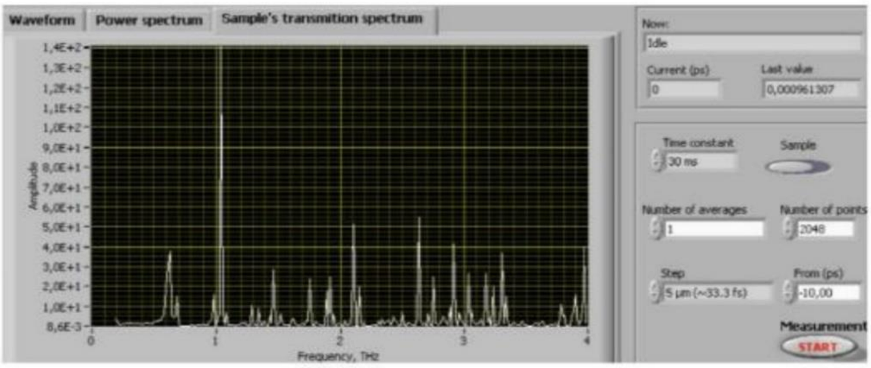
Tabelul 1. Rezultatele experimentale

Nr.crt	Substanța	Parametrii de mediu (T, H, P)	Nr. pași	Referința
1	Paracetamol	23,1/32% /933	2048	Cuvă
2	Vitamina D3	23,1/32% /933	2048	Cuvă
3	Alcool etilic medicinal	23,1/32% /933	2048	Cuvă + hârtie
4	Algocalmin	23/32% /933	2048	Cuvă + hârtie

□ Spectrele pentru paracetamol



□ Spectrul de transmisie- Vitamina D3



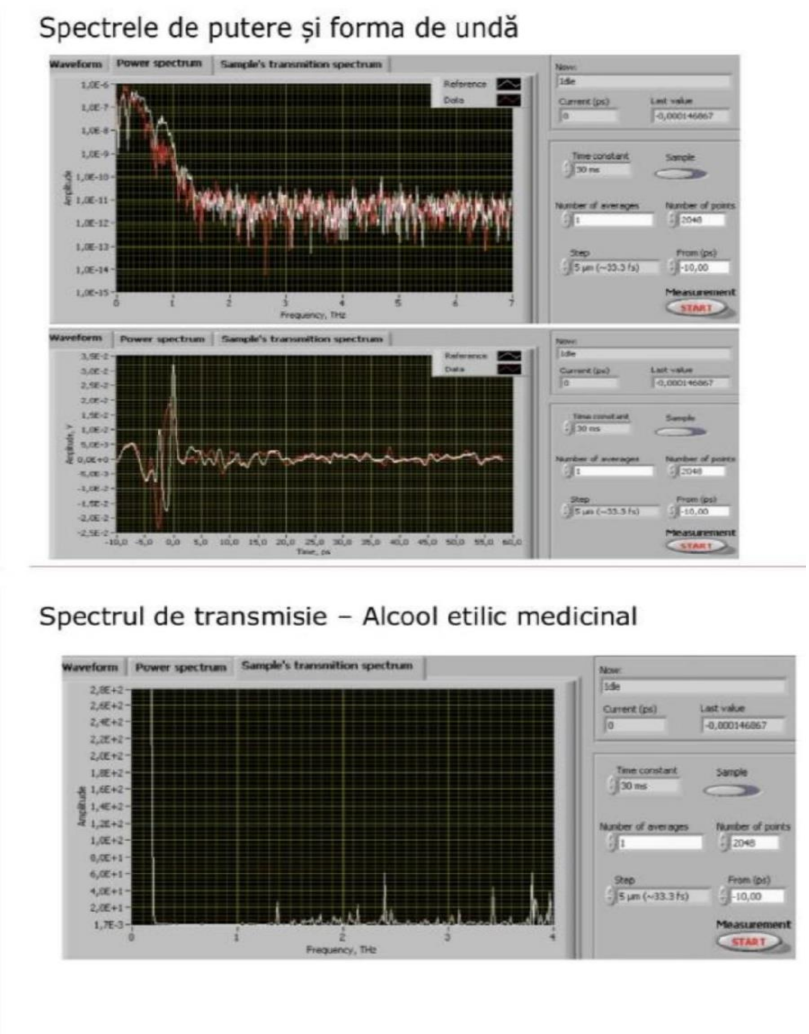


Figura 4. Spectrele obținute

CONCLUZII

Pe baza rezultatelor experimentale se identifică spectrul substanțelor analizate.

Sistemul de măsură este izolat de exterior și se constată o importantă influență a temperaturii și a umidității asupra spectrului înregistrat.

Determinările cât mai exacte necesită menținerea constantă a factorilor de mediu.

Sistemul este sensibil la șocuri, orice mișcare sau atingere a dispozitivelor în timpul experimentului are consecințe asupra măsurătorilor.

BIBLIOGRAFIE

[1] Dăneț,, A.F. (2010). Analiza instrumentală, Editura Universitatii din Bucuresti, Romania,
[2] https://www.academia.edu/6099535/Farmacologie_general%C4%83_1_I_O_A_N_R_A_D_FARMACOLOGIE_GENERALA
[3] https://pdfslide.net/documents/metode-spectrale-in-infrarosu-aplicate-la-medicamente5659b5e058ad8.htm
[4] https://www.azom.com/
[5] http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/
[6] https://webbook.nist.gov

IMPACTUL EXPERIMENTULUI ASUPRA ÎNVĂŢĂRII FIZICII

Sanda-Rodica GÎRBA[1], Carmen-Daniela CĂPITANU[2]

[1]Liceul Sanitar „Vasile Voiculescu”, Oradea, girba.sanda@gmail.com
[2]Universitatea din Oradea, Facultatea de Informatică şi Ştiinţe, Departamentul de Fizică, c.carmen.d@gmail.com

Rezumat.*Lucrarea de faţă îşi propune să împărtăşească din experienţa acumulată de-a lungul anilor la catedră, privind impactul pe care îl are experimentul asupra învăţării fizicii, pornind de la observaţia că, indiferent de capitolul studiat, elevilor li se captează mult mai uşor atenţia, şi corelarea noţiunilor teoretice cu cele practice se realizează mult mai uşor, dacă se efectuează cel puţin un experiment în timpul predării. S-a constatat în practica didactică zilnică faptul că, dacă elevii au posibilitatea să efectueze ei experimentul, conexiunile se realizează mai rapid, deoarece implicarea lor este directă. Se subliniază astfel rolul educativ al experimentelor care-i transpun în lumea reală, acestea fiind binevenite pentru înţelegerea fenomenelor fizice şi însuşirea noţiunilor specifice.*

Cuvinte cheie: Experiment, reflexia luminii, refracţia luminii, reflexie totală

INTRODUCERE

În contextul unei lumi moderne, puternic tehnologizată, în care toate categoriile sociale de oameni şi de toate vârstele, au acces la tehnologie (*smartphones*– care au preluat o parte din rolul televizorului şi al calculatorului), profesorul şi educatorul sunt nevoiţi să se adapteze din mers, să găsească / să inventeze noi metode de captare a atenţiei în procesul de formare a noilor generaţii. Atenţia tinerilor noştri este îndreptată spre această lume virtuală oferită de tehnologie, dar, cu părere de rău, nu fără repercusiuni în formarea intelectului şi caracterului lor aşa cum pune în evidenţă biofizicianul Virgiliu Gheorghe Vlaescu în cartea *„Efectele televiziunii asupra minţii umane şi despre creşterea copiilor în lumea de azi”*. Aici, el nu doar explică foarte bine comportamentul tinerilor din ziua de azi, ci prezintă şi motivul acestei disfuncţionalităţi cu care ne confruntăm în rândul elevilor, poate chiar şi al adulţilor... Virgiliu Gheorghe prezintă diferite studii despre modul în care psihicul şi intelectul omului se adaptează sau nu, la mediul virtual şi care sunt consecinţele alocării unui timp îndelungat acestui mediu [6].

Dr. Erik Peper, cercetător în domeniul testării electroencefalografice, profesor la Universitatea de Stat din San Francisco, subliniază şi el acest fapt [5]: „Pentru a învăţa cu adevărat ceva, trebuie să interacţionezi cu sursa datelor. În cazul televiziunii, nu gândeşti cu adevărat. Ştiu că, în cazul meu, pot să învăţ ceva doar dacă sunt angajat, ca în metoda socratică de predare. Cea mai bună metodă de predare este cea interactivă. De exemplu, unii învaţă mai bine atunci când iau notiţe, fiindcă notiţele reprezintă un sistem feedback. (...) Vizionarea TV presupune numai să primeşti fără să reacţionezi. Nu face decât să-ţi capteze atenţia, iar tu primeşti, nu priveşti. (...) Când ne uităm la televizor, ne antrenăm să nu reacţionăm, şi aşa, mai târziu, facem lucruri fără să ştim de ce le facem şi de unde ne-au venit în minte”. Învăţarea care are loc este foarte puţin cognitivă, greu de reprodus, foarte puţin analizabilă şi puţin bazată pe gândire [4, 5].

Învăţarea trebuie să fie un proces raţional şi conştient, ce presupune un efort de înţelegere, de organizare a cunoştinţelor şi de integrare a lor în orizontul mai larg de cunoaştere a individului. Noile cunoştinţe sunt depozitate în memorie de unde pot fi scoase pentru a fi întrebuinţate în procesul gândirii. În cazul lumii virtuale, cunoştinţele nu sunt nici percepute sau structurate logic şi nici mintea nu este deplin conştientă de ele. De fapt, dacă se poate vorbi de o învăţare prin intermediul televizorului, aceasta nu are caracter logic, deductiv, sintetic, fiindcă aceste procese sunt guvernate de emisfera stângă care, pe timpul vizionării, se află în „amorţire”.

Calculatorul, tehnologia bazată pe inteligenţa artificială, frânând dezvoltarea şi chiar vătămând lobul prefrontal, cel de care depinde desfăşurarea proceselor de conştiinţă, a proceselor mentale superioare, afectează în mod semnificativ capacitatea de concentrare a atenţiei, slăbesc motivaţia, şi favorizează comportamentele instinctive – bulimia, agresivitatea şi pulsiunile sexuale.

Acestea sunt doar câteva din motivele pentru care Academia Americană de Pediatrie, recomandă ca până la doi ani copiii să nu fie lăsaţi să se uite la televizor, iar după această vârstă, pe toată perioada vârstei şcolare, să li se limiteze timpul vizionării (cumulat televizor, video sau calculator) la una, cel mult două ore pe zi. Unii autori opinează ca măcar până la 5-6 ani când se încheie prima perioadă esenţială în dezvoltarea creierului, copiii să fie ţinuţi departe de televizor şi calculator." [6]

În acest context, „raţionamentul matematic, abordarea unor discipline ca fizica, chimia sau, în general, a gândirii ştiinţifice va fi încă una din problemele cu care se vor confrunta generaţiile viitoare, în condiţiile în care nu se va face nimic în vederea eliberării de sub tirania televizualului." [6]

Acestea fiind pericolele datorate tehnologiei avansate şi în ţara noastră, îmi păstrez o doză de optimism şi lupt pentru a capta atenţia elevilor mei, invitându-i permanent la analiză creaţie şi la lucrul în echipă dezvoltându-le intelectul, imaginaţia şi spiritul altruist (punându-i să-şi explice unii altora ceea ce au înţeles – sub atenta mea coordonare).

În contextul lumii moderne puternic tehnologizate, este lesne de înţeles ce se întâmplă în rândul elevilor şi cât de anevoios poate profesorul să capteze atenţia tuturor (unii scriu mesaje pe telefon, alţii se joacă pe telefon, alţii se pregătesc la alte materii – în cazul în care urmează un test, alţii visează cu ochii deschişi, unii îşi permit chiar să pună capul pe bancă – semn că se plictisesc). Eu, ca profesor, sunt nevoită să-i conving că fizica merită toată atenţia, şi sunt nevoită să-i determin să-şi înţeleagă starea de neputinţă datorată petrecerii unui timp foarte îndelungat în mediul virtual – situaţie în care o parte considerabilă din timpul alocat predării se risipeşte. Ţinând cont de problemele cu care ne confruntăm în rândul elevilor, am observat că, aplicând metoda experimentului, reuşesc să captez atenţia lor în proporţie de 80% – dar asta depinde de tipul experimentului şi de spectaculozitatea lui.

Rolul experimentului este fundamental în apariţia fizicii ca ştiinţă. Este uşor de înţeles că fizica s-a dezvoltat urmărind cu atenţie fenomenele naturale sau provocate intenţionat (experimentele) şi analizând relaţiile între proprietăţile materiei şi transformările care au loc. Elevul care întâlneşte noţiunile fizice reuşeşte să le înţeleagă şi să le asimileze mai uşor doar dacă sunt prezentate în strânsă legătură cu fenomenul (experimentul) şi proprietăţile la care fac referire. Se pot da exemple din viaţa cotidiană fără a prezenta experimentul în sine, dezvoltând astfel atenţia şi imaginaţia, dar capacitatea elevilor de a-şi menţine atenţia şi de a-şi imagina fenomenul pe baza unor explicaţii care să implice, eventual, şi un desen, depinde de interesul fiecăruia în parte şi de cât de mult timp petrec în mediul virtual.

PUNEREA PROBLEMEI

Experimentul este o metodă de predare-învăţare a fizicii caracterizată pe larg în literatura de specialitate. Orice experiment începe cu o întrebare care cere un răspuns, cu o problemă de rezolvat, cu o idee de testat. Experimentul de laborator este o metodă euristică de realizare a activităţilor practice de laborator. Prin realizarea experimentului de laborator, elevii sunt puşi în situaţia de a realiza diferite operaţii cu scopul de a observa, de a dovedi, de a verifica, de a descoperi [2]

Experimentul reprezintă o observare provocată, deoarece elevii sunt puşi în situaţia de a concepe şi de a practica ei înşişi un anumit gen de operaţii, cu scopul de a observa, măsura, studia, dovedi şi verifica legi şi rezultate şi din acest motiv metoda poate fi încadrată în categoria metodelor activ-participative de predare-învăţare, deoarece ea presupune o intervenţie activă din partea elevilor pentru a schimba condiţiile de manifestare a obiectelor şi fenomenelor supuse studiului şi pentru a ajunge la descoperirea unor adevăruri [2].

Pe de altă parte, ca şi capitol de studiu al fizicii, optica poate fi considerată „deosebit de experimentală”, pentru că ea operează cu elemente nemijlocit vizuale, care se pretează într-un mod excepţional la efectuarea de experimente.

În aceeaşi ordine de idei, ca şi parte a opticii, optica geometrică foloseşte într-un mod spectaculos de simplu elemente întâlnite în viaţa de zi cu zi, care pot fi conştientizate de către elevi prin experimente uşor de efectuat şi cu rezultate uşor de interpretat.

STUDIU EXPERIMENTAL. MATERIALE ŞI METODE

În cele ce urmează, se vor prezenta câteva experimente care au rolul de a-i ajuta pe elevi să observe şi să caracterizeze două fenomene de bază în optica geometrică: reflexia şi refracţia luminii [1, 3]. Pe baza demersurilor experimentale, ei vor fi capabili să explice şi să interpreteze ceea ce au observat, chiar să formuleze legile matematice ale celor două fenomene şi, desigur, să le identifice în viaţa de zi cu zi.

Experimente realizate pentru studiul reflexiei luminii

Experimentul din figura 1 are rolul de a pune în evidenţă legea întâi a reflexiei: indiferent de poziţia razei incidente (cea care porneşte de la sursa laser), raza reflectată se orientează astfel încât cele două raze şi normala dusă în punctul de incidenţă să aparţină mereu aceluiaşi plan.

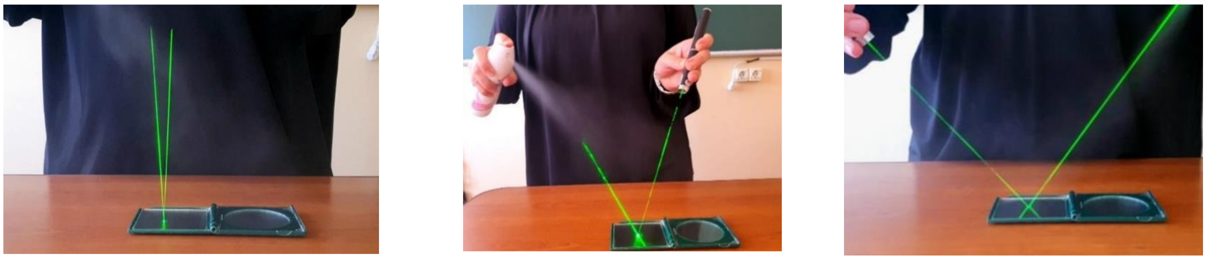


Figura 1. Studiul experimental al reflexiei luminii. Formularea primei legi a reflexiei luminii

Materialele necesare realizării experimentului au fost: o oglindă, o sursă laser punctiformă, un deodorant cu pudră (cu ajutorul căruia se poate pune în evidenţă raza de lumină provenită de la sursa laser particulele fine de pudră făcând vizibil „traseul” fasciculului luminos). Se observă că experimentul a fost realizat folosind unghiuri de incidenţă diferite. Trebuie menţionat faptul că, la repetarea experimentului, este necesară curăţarea oglinzii, deoarece pudra provenită de la deodorant se depune pe oglindă şi aceasta devine opacă.

Legea a II-a reflexiei a fost pusă în evidenţă cu ajutorul experimentului din figura 2, în care a fost folosit un raportor, cu ajutorul căruia se măsoară cele două unghiuri (de incidenţă şi de reflexie).

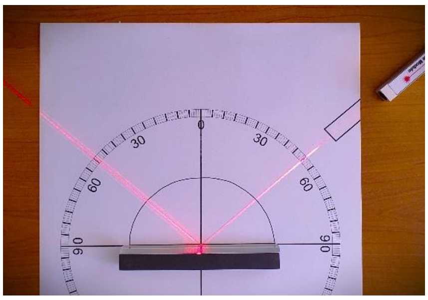


Figura 2. Punerea în evidenţă pe cale experimentală a legii a doua a reflexiei luminii

În cazul acestui experiment este necesară o atenţie sporită la poziţionarea sursei laser şi a oglinzii, deoarece este necesar ca punctul de incidenţă să fie în mijlocul raportorului pentru o măsurătoare corectă.

Materialele necesare efectuării experimentului au fost: o oglindă, un laser cu spotul luminos în formă liniară, un raportor cu valoarea zero pe direcţia normalei şi care măsoară unghiuri cuprinse între 0° şi 90° de o parte şi de cealaltă a normalei. Se observă că unghiul de incidenţă este egal cu unghiul de reflexie.

Experimente realizate pentru studiul refracţiei luminii

În experimentul din figura 3 se poate observa că la suprafaţa de separare dintre aer şi apă paiul pare să fie frânt, iar în apă pare să fie orientat sub un alt unghi decât în aer.

Figura 3. Punerea în evidenţă a refracţiei luminii

Materialele necesare au fost: un pahar cu pereţii netezi şi transparenţi, un pai şi apă.

Experimentul din figura 4 pune în evidenţă două aspecte:

1) reflexia şi refracţia au loc concomitent

2) într-un mediu mai refringent decât aerul, refracţia are loc cu apropiere de normală

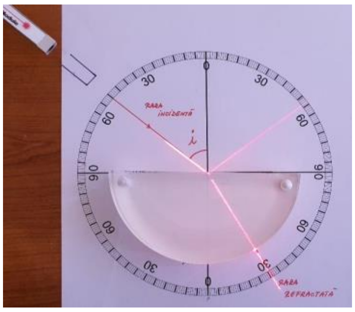


Figura 4. Studiul pe cale experimentală a legilor refracţiei luminii

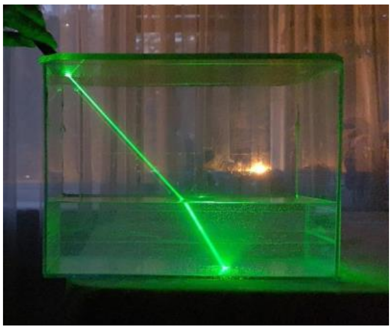
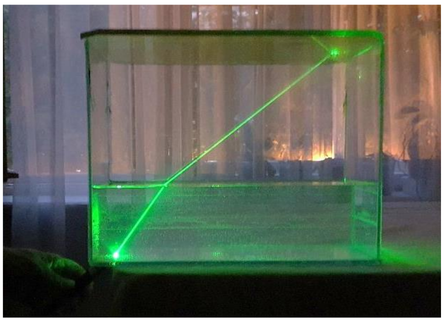
Materialele necesare au fost: un laser cu spotul luminos în formă liniară; o lentilă plan-convexă (material didactic); un raportor împărţit în 4 cadrane, astfel încât pe axa verticală este trecută valoarea zero; iar fiecare cadran măsoară unghiuri cu valori cuprinse între 0° şi 90°.

Pentru desfăşurarea corectă a experimentului şi interpretarea corectă a rezultatelor acestuia, este necesară o atenţie sporită, astfel încât punctul de incidenţă să fie în mijlocul raportorului. Experimentul din figura 5*a* evidenţiază fenomenul de refracţie cu apropiere de normală, la fel cu experimentul anterior, cu menţiunea că este mai spectaculos, iar elevii sunt impresionaţi de acesta.

În acest caz, materialele necesare au fost: un laser cu spotul luminos punctiform, un vas cu apă (un acvariu de 11 litri), apă, lapte, chibrituri, hârtie, o placă transparentă cu rol de capac.

Experimentul necesită unele explicaţii în plus referitoare la modul de lucru.

Se pun în acvariu aproximativ 3 – 4 litri de apă. Pentru ca raza de lumină să fie mai vizibilă, este necesar să adăugăm câteva picături de lapte. Aşa cum în primul experiment s-au folosit particulele de pudră din deodorant pentru a pune în evidenţă fasciculul luminos, tot aşa au fost folosite în situaţia de faţă particulele de fum. Se aprinde puţină hârtie cu ajutorul chibriturilor, iar în momentul următor se stinge flacăra pentru a lăsa hârtia să fumege. Cu ajutorul ei se distribuie puţin fum în interiorul acvariului şi se pune tăblia transparentă pe acesta, astfel încât să se păstreze fumul în interior.

a) *b*)

Figura 5. Punerea în evidenţă a fenomenului de refracţie cu apropiere de normală (*a*), respectiv cu îndepărtare de normală (*b*)

Este necesară următoarea observaţie: nu trebuie să de adauge prea mult lapte în apă şi nici prea mult fum în interiorul acvariului, deoarece, în caz contrar, se opacizează mediile şi raza de lumină nu mai trece dintr-un mediu în altul, sau are o intensitate luminoasă mică, insesizabilă.

Experimentul din figura 5*b*) pune în evidenţă fenomenul de refracţie cu îndepărtare de normală ($n_1 > n_2$). Fasciculul luminos porneşte dintr-un mediu mai refringent (apa) pentru a ajunge într-un mediu cu densitate mai mică (aerul). Este cazul refracţiei în car eunghiul de incidenţă este mai mic decât unghiul limită – situaţie în care raza de lumină iese din apă în aer.

În ambele experimente din figura 5 materialele folosite au fost aceleaşi.

Experimente realizate pentru studiul reflexiei totale

Figura 6 surprinde fenomenul de reflexie totală, în aceleaşi condiţii de lucru ca ale experimentului din figura 5*b*, cu deosebirea că a fost folosit un unghi de incidenţă mai mare decât unghiul limită $(i > l)$. Se observă că de data aceasta în interiorul acvariului, fasciculul luminos nu mai iese în aer, ci se propagă din aproape în aproape, în formă de zig-zag, prin apă. Acelaşi lucru se întâmplă şi în cazul fibrei optice prin care undele electromagnetice se propagă cu o viteză foarte mare pe distanţe de zeci de kilometri.

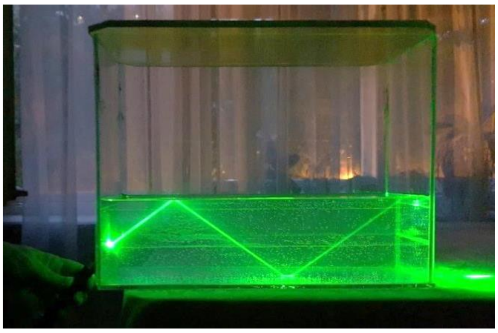
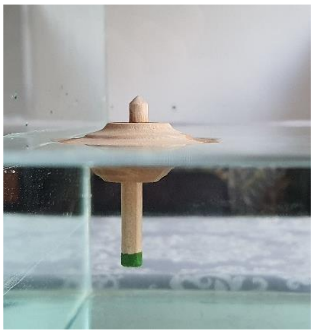


Figura 6. Punerea în evidenţă a fenomenului de reflexie totală $(i > l)$

Acelaşi fenomen (reflexia totală) este surprins în figura 7*b*. Am fost folosit acelaşi acvariu ca în cazul experimentelor anterioare, dar înainte de a introduce laptele în apă. Poza din dreapta surprinde titirezul plutind pe apă – se poate observa că partea din interiorul apei a titirezului este mai lungă şi vopsită în vârf. Privit de jos în sus, sub un unghi mai mare decât unghiul limită, partea mai lungă şi vopsită a titirezului se oglindeşte pe suprafaţa interioară a apei, ca dovadă a existenţei fenomenului de reflexie totală.



a)

b)

Figura 7. Reflexia totală

Studiul noţiunilor de fizică, bazat pe utilizarea experimentelor menţionate, a fost urmat de un chestionar care a avut scopul de a afla preferinţele elevilor referitoare la lecţiile experimentale de fizică. Acesta a cuprins câteva întrebări, dintre care: „Ce cuvinte îţi vin în minte când auzi denumirea acestui domeniu (Fizică)? Scrieţi cel puţin 3 cuvinte", „Ce înseamnă fizica (acest domeniu vast) pentru tine?","Cum apreciezi dificultatea acestui domeniu de studiu?", „Cât de important crezi că este pentru viaţa ta să cunoşti noţiuni de fizică?", „Ce subiecte din fizică prezintă interes pentru tine?".

Demne de reţinut sunt răspunsurile la întrebarea „Ce modalităţi de predare învăţare te-ar ajuta să înţelegi mai bine noţiunile de fizică?" (figura 8), care pun în evidenţă importanţa folosirii experimentului în timpul predării: 80,3% dintre elevi au ales experimentul ca modalitate de predare/învăţare, modalitate care i-ar ajuta să înţeleagă mai bine fenomenele fizice şi să asimileze mai uşor noţiunile specifice.

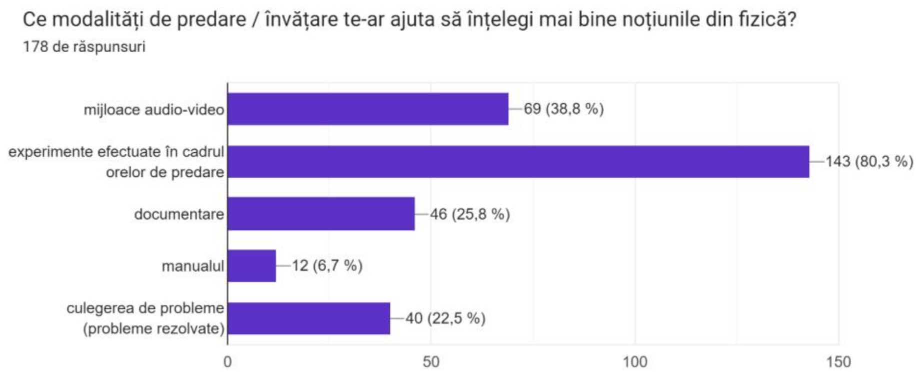


Figura 8. Aprecierea de către elevi a modalităţilor de predare/învăţare a noţiunilor de fizică

Ultima întrebare a chestionarului fost „Ce subiecte din fizică prezintă interes pentru tine?". Din răspunsurile elevilor se observă că subiectele care prezintă interes pentru ei sunt acele capitole din fizică ce permit efectuarea mai multor experimente (optica geometrică, electricitate, electromagnetism). Unii elevi îşi exprimă interesul doar pentru experimente, puţini dintre ei îşi exprimându-şi interesul pentru astrofizică, seismologie şi fizica cuantică.

Toate acestea subliniază deschiderea şi interesul elevului spre metoda experimentului.

DISCUŢII ŞI CONCLUZII

În decursul anilor am observat că, indiferent de capitolul studiat, elevilor li se captează mult mai uşor atenţia şi corelarea noţiunilor teoretice cu cele practice se realizează mult mai uşor, dacă se efectuează cel puţin un experiment (chiar şi demonstrativ) în timpul predării. Dacă au posibilitatea să efectueze ei înşişi experimentul, conexiunile se realizează mai rapid, deoarece implicarea lor este directă. Am întâlnit, însă, şi situaţii în care, chiar dacă am prezentat experimente în timpul predării, unii elevi au rămas pasivi, fiind nevoită să-i mobilizez şi să-i motivez în permanenţă. Dar felul în care elevul reuşeşte să realizeze conexiuni între informaţiile teoretice şi cele practice depinde şi de interesul fiecăruia în parte.

În contextul lumii moderne puternic tehnologizate, este lesne de înţeles ce se întâmplă în rândul elevilor şi cât de anevoios poate profesorul să capteze atenţia tuturor. Ca profesor, depun în permanenţă eforturi să le arăt că fizica merită toată atenţia, o parte din aceste eforturi având şi rolul de a-i determina să-şi conştientizeze starea de neputinţă datorată petrecerii unui timp foarte îndelungat în mediul virtual – situaţie în care o parte considerabilă din timpul alocat predării se risipeşte. Ținând cont de problemele cu care ne confruntăm în timpul activităţilor didactice, am observat că, aplicând metoda experimentului, reuşesc să captez atenţia elevilor în proporţie de 80% (cu toate că acest lucru depinde de tipul experimentului şi de spectaculozitatea lui).

Pentru ca elevii să fie bine ancoraţi în realitate şi pentru a li se dezvolta structurile neuronale responsabile cu gândirea ştiinţifică şi cu raţionamentul matematic, sunt necesare şi lecţii de fizică ce includ parte experimentală. Este de la sine înţeles că metoda experimentului nu exclude celelalte metode de predare utile în dezvoltarea abilităţilor intelectuale ale elevilor. În măsura în care am la dispoziţie materiale didactice şi timp, evit să folosesc mijloacele audio-video şi caut să prezint elevilor cât mai multe experimente „fizice", „reale", „materiale", efectuate în cadrul lecţiilor de fizică. De asemenea, le propun şi lor să creeze mici experimente cu materialele avute la dispoziţie.

Totuşi, nu pot spune că mijloacele audio-video lipsesc cu desăvârşire din activitatea mea de predare, şi nici nu recomand acest lucru. Ele sunt foarte utile acolo unde nu există posibilitatea de a efectua experimentul „real". Le folosesc cu atenţie şi cu multe explicaţii şi întrebări adresate elevilor, pentru a mă asigura că au înţeles ceea ce au vizionat. Se poate observa că procentul imediat următor (38,8%), ca modalitate de predare/învăţare în preferinţele elevilor, îl au mijloacele audio-video şi acest fapt se datorează, din punctul meu de vedere, obişnuinţei elevilor de a folosi telefonul mobil.

În această situaţie în care elevii sunt puternic ancoraţi în lumea virtuală, experimentele care-i transpun în lumea reală sunt bine venite pentru înţelegerea fenomenelor fizice şi însuşirea noţiunilor specifice acestora. *„Pentru a învăţa cu adevărat ceva, trebuie să interacţionezi cu sursa datelor"* spune Dr. Erik Peper, cercetător în domeniul testării electroencefalografice, profesor la Universitatea de Stat din San Francisco.

A-i învăţa cu adevărat ceva pe elevi şi a le dezvolta intelectul şi memoria, a forma oameni responsabili care să fie utili familiei şi societăţii, este scopul nostru, al profesorilor de pretutindeni.

BIBLIOGRAFIE

[1] Căpitanu, C.D. (2020). Bazele opticii geometrice, Editura Pro Universitaria, Bucureşti
[2] Căpitanu, C. D. (2014). Didactica fizicii, Editura Universităţii din Oradea, Oradea
[3] Fălie, V., Mihalache, R. (2018). Fizică. Manual pentru clasa a IX-a, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti,
[4] Mander, J.I. (1978). Four Arguments for the Elimination of Television, Kirkus Reviews
[5] Pepper, E., Harvey, R., Faass, N. (2020). Tech Stress: How Technology is Hijacking Our Lives, Strategies for Coping, and Pragmatic Ergonomics, North Atlantic Books
[6] Vlăescu V. G.(2015). Efectele televiziunii asupra minţii umane şi despre creşterea copiilor în lumea de azi, Editura Institutul de Cercetări Psihosociale şi Bioetică, Bucureşti

IMPORTANŢA CUNOAŞTERII UNOR NOŢIUNI DE MATEMATICĂ PENTRU REZOLVAREA PROBLEMELOR DE FIZICĂ

Camelia MEDREA[1], Carmen-Daniela CĂPITANU[2]

[1]Liceul Teologic Penticostal „Betel”, Oradea, camimoza@yahoo.com
[2]Universitatea din Oradea, Facultatea de Informatică şi Ştiinţe, Departamentul de Fizică, c.carmen.d@gmail.com

Rezumat. *Aptitudinile de rezolvare a problemelor reprezintă o importantă parte a educaţiei. Împreună cu gândirea critică, ea are o importanţă deosebită în studiul fizicii, atât la nivel preuniversitar, cât şi universitar, facilitând aprofundarea şi fixarea noţiunilor caracteristice. Fizica este un domeniu care necesită cunoştinţe de matematică, ceea ce o face să fie considerată o disciplină de studiu de o dificultate aparte.*
Lucrarea de faţă îşi propune să scoată în evidenţă necesitatea cunoaşterii matematicii atunci când este vorba despre rezolvarea unei probleme de fizică, deoarece, pentru descrierea cantitativă a situaţiilor prezentate într-o problemă de fizică sunt necesare instrumente de calcul oferite de matematică. Se constată, însă, că simpla cunoaştere a acestor instrumente nu este suficientă, rezultatele oferite de acestea trebuind interpretate din punctul de vedere al fizicii.
Cuvinte-cheie: rezolvare de probleme, metode matematice, interpretarea fizică a rezultatelor

INTRODUCERE

În sens general, o problemă reprezintă o situaţie nouă pe care o persoană (elevul, studentul, profesorul!) o întâlneşte şi pentru care nu are metode sau instrumente pentru a o rezolva pe loc, instantaneu: deoarece problema este o situaţie nou întâlnită, ea este diferită de un „exerciţiu” sau o „întrebare”. Ea este un proces mental care necesită gândire critică şi creativă, pentru găsirea unor idei alternative şi a unor paşi specifici pentru a depăşi orice obstacole. Rezolvarea problemei reprezintă o situaţie care necesită analiză şi planificare a informaţiilor învăţate; persoana în cauză trebuie să se gândească şi chiar să facă nişte paşi pentru a ajunge la răspuns. Problema este o situaţie complexă, pentru că strategia de rezolvare nu se vede imediat şi, mai mult decât atât, necesită de cele mai multe ori creativitate şi originalitate [2, 6, 12].

Atunci când este vorba despre lucrul cu elevii (sau cu studenţii!), rezolvarea de probleme presupune efectuarea unor operaţii mintale şi motrice cu scopul formării de priceperi, deprinderi şi abilităţi de muncă intelectuală, respectiv: înţelegerea esenţei fizice şi a noţiunilor studiate, aprofundarea cunoştinţelor prin repetarea şi fixarea materiei însuşite, dobândirea încrederii în forţele proprii, formarea deprinderii de a învinge obstacole în cazul rezolvării problemelor cu grad sporit de dificultate, stabilirea de corelaţii între fizică şi ştiinţele înrudite, aprofundarea cunoştinţelor de matematică, dându-le acestora un sens concret, sporirea operativităţii gândirii, familiarizarea cu unităţi de măsură, verificarea rapidă a cunoştinţelor dobândite [3]. Noţiunile de fizică se învaţă şi sunt înţelese deseori prin recunoaşterea, analiza şi construirea unor conexiuni conceptuale proprii, cei care studiază fizica lucrând multe exerciţii şi probleme pentru a înţelege conceptele fizicii [9, 12]

Din punct de vedere metodic, rezolvarea unei probleme presupune culegerea informaţiilor (prin citirea clară a textului problemei, scrierea datelor pe tablă, chiar dictare în întregime a problemei, dacă elevii nu acces direct la problema respectivă), înţelegerea conţinutului problemei, prin încadrarea acesteia într-un anumit capitol al fizicii, analiza conţinutului fizic al problemei (dacă este o problemă complexă, descompunerea ei în probleme mai simple, explicarea unor termeni, clarificarea esenţei fizice a problemei, efectuarea unor transformări de unităţi de măsură, identificarea fenomenelor fizice la care se referă problema, recapitularea cunoştinţelor teoretice necesare rezolvării problemei), rezolvarea propriu-zisă, verificarea şi interpretarea rezultatelor. [3, 8].

Este importantă observarea şi aducerea în discuţie a legăturii dintre fizică şi alte ştiinţe, respectiv alte discipline, dintre care am putea spune că pe primul loc este matematica. Aceasta nu numai că oferă un instrument sensibil pentru descrierile cantitative cu care operează fizica, ci şi ajută la interpretarea rezultatelor obţinute pe diversele căi specifice fizicii.

Rezolvarea de probleme este o metodă de învăţare care cere elevilor să găsească răspunsuri fără o asistenţă specială, ei fiind capabili să găsească noi reguli şi corelaţii folosind câteva abilităţi care includ identificarea acelor elemente din problemele de fizică ce pot fi utilizate la găsirea soluţiei, stabilirea legăturilor matematice dintre ele, utilizarea acelor formule cu respectarea şi recunoaşterea semnificaţiei fizice a simbolurilor care intervin, ceea ce înseamnă efectuarea operaţiilor matematice corespunzătoare, respectarea unităţilor de măsură şi a corelaţiei dintre ele şi, neapărat, interpretarea rezultatelor obţinute [10, 11].

Matematica este un element esenţial al rezolvării problemelor de fizică; în sine, ea este limbajul ştiinţei, un limbaj bogat şi indispensabil pentru a reprezenta adevărul pe care îl relevă fizica. Matematica este nu doar un instrument lingvistic, ci şi un factor constitutiv al cunoaşterii ştiinţifice [1]; matematica utilizată în fizică este un dialect distinct al acestui limbaj, ea este mai mult decât relaţii abstracte, având chiar o semiotică distinctă!

Folosirea matematicii în ştiinţă, în particular în fizică, nu este opţională, deoarece ea are un scop mai profund: ştiinţa modernă a preluat matematica într-un sens profund, care stă la baza metodei ştiinţifice [1, 11]. Scopul ei este să exprime înţelegerea sistemelor fizice, caracteristicile lor, relaţiile matematice şi rezultatele calculelor matematice având întotdeauna semnificaţie fizică atribuită prin interpretarea lor. Astfel, rezolvarea de probleme poate fi privită ca esenţa muncii unui fizician [1, 4, 7].

Majoritatea elevilor (dar şi a studenţilor!) consideră matematica dificilă şi din acest motiv, îşi pierd în timp interesul pentru aceasta. Aceeaşi situaţie se manifestă şi când este vorba despre fizică, elevii experimentând dificultăţi uneori serioase în a o învăţa, mulţi dintre ei chiar pierzându-i interesul pentru această disciplină de studiu. A-i învăţa pe aceştia cum să rezolve problemele şi a-i ajuta să dezvolte o înţelegere a conceptelor fizicii sunt două din scopurile principale ale instruirii la fizică – scopuri dificil de atins [3, 10, 11]. Consecinţa formării deprinderilor de rezolvare a problemelor este o nouă atitudine şi o mai bună înţelegere a fenomenelor fizicii, a principiilor şi a legilor acesteia, ele toate aplicându-se prin intermediul relaţiilor matematice care sunt potrivite pentru problemele respective [11].

Este inutil să mai adăugăm faptul că în ştiinţă şi în matematică rezolvarea de probleme este aptitudinea cel mai dificil de format şi cea mai puţin învăţată. Ea are o latură profund intelectuală; ea este o aptitudine intelectuală de cel mai ridicat grad, care necesită gândire creativă, gândire critică şi luare de decizii. Procesul de gândire pe care îl implică include înţelegerea întrebărilor puse de problemă, abilitatea de a identifica situaţiile-cheie şi variabilele utilizate în rezolvarea problemei, abilitatea de a implementa corect strategia rezolvării şi de a evalua viabilitatea rezultatelor finale [11].

PUNEREA PROBLEMEI

De cele mai multe ori, pe lângă cunoştinţele de specialitate, rezolvarea unei probleme de fizică face apel la o gamă foarte largă de cunoştinţe de matematică. De exemplu, la nivel liceal, sunt foarte utile (chiar indispensabile!) cunoştinţele legate de comportamentul unor funcţii (între care printre „vedete” se numără funcţia de gradul doi şi funcţiile trigonometrice), noţiunile de calcul vectorial, elementele de calcul diferenţial şi integral sau noţiunile de geometrie analitică. Folosirea acestora în contextul aplicării cunoştinţelor de fizică conduce uneori la situaţii surprinzătoare, în sensul că, deşi corecte din punct de vedere matematic, ele nu sunt convenabile din punctul de vedere al situaţiei concrete. Deşi pare a fi o situaţie conflictuală, lucrurile sunt, de fapt, foarte simple: este vorba aici despre interpretarea critică a rezultatelor sau, altfel spus, despre semnificaţia fizică a acestora, ceea ce face ca, în ochii unora, fizica să fie mult mai dificilă decât părea la prima vedere!

DISCUŢII PE STUDIU DE CAZ

Consideraţiile de mai sus vor fi exemplificate cu ajutorul unei probleme de optică geometrică, scoţându-se în evidenţă cunoştinţele de matematică necesare pentru rezolvarea cu succes a acesteia. Se va insista şi pe semnificaţia fizică a rezultatelor obţinute pe parcurs, fiind oferind toate explicaţiile necesare. Nu se vor discuta calculele matematice simple, cum ar fi operaţiile cu fracţii ordinare sau ecuaţiile de gradul I cu o necunoscută.

Astfel, se consideră un sistem optic afocal format din trei lentile sferice subţiri: două lentile divergente L_1 şi L_3, având modulul distanţelor focale f şi respectiv $2f$ şi o lentilă convergentă L_2 având distanţa focală $3f$. Lentila L_2 este plasată între lentilele L_1 şi L_3, ca în figura 1. se cere distanţa d dintre lentilele L_2 şi L_3, astfel încât distanţa *D* dintre lentilele divergente să fie minimă. [5]

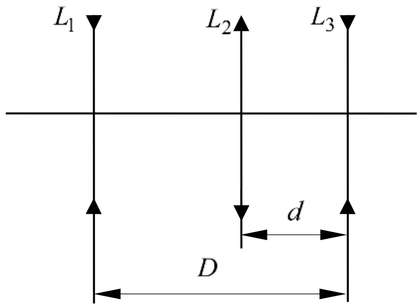


Figura 1. Poziţia relativă a lentilelor, conform datelor problemei

Se observă că în textul problemei se menţionează noţiunea de modul. Ca noţiune matematică, modulul unui număr real *n* se defineşte astfel:

$$|n| = \begin{cases} n, dacă\ n \geq 0 \\ -n, dacă\ n < 0 \end{cases}, \ (\forall) n \in \mathbb{R}$$

Se observă că modulul unui număr real este întotdeauna pozitiv sau egal cu zero, lucru util în rezolvarea problemei, deoarece modulul distanţei focale a celor două lentile fiind *f*, respectiv $2f$, vom avea $f > 0$, $2f > 0$, respectiv $3f > 0$, ceea ce este în concordanţă cu faptul că lentila din mijloc este una convergentă. Făcând mai departe corelaţia cu semnificaţia fizică, trebuie să se ţină cont de faptul că lentilele în cauză sunt divergente, deci au o distanţă focală negativă: $-f$, respectiv $-2f$, semnul „minus” fiind folosit conform convenţiei geometrice de semne.

Pasul următor, de o importanţă aparte, este să se realizeze un desen pe care să se pună în evidenţă mersul razelor de lumină, atât cât este posibil. Poate fi vorba despre un desen orientativ care, în caz de nevoie, conform informaţiilor obţinute pe parcursul rezolvării (poziţii ale obiectelor şi ale imaginilor faţă de lentile), se completează astfel încât să corespundă situaţiei fizice prezentate în problemă (figura 2).

Se studiază formarea imaginilor în prima lentilă şi se obţine:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{x_2^{(1)}} - \dfrac{1}{x_1^{(1)}} = \dfrac{1}{-f} \\ x_1^{(1)} \to \infty \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{x_2^{(1)}} = \frac{1}{-f} \Rightarrow x_2^{(1)} = -f$$

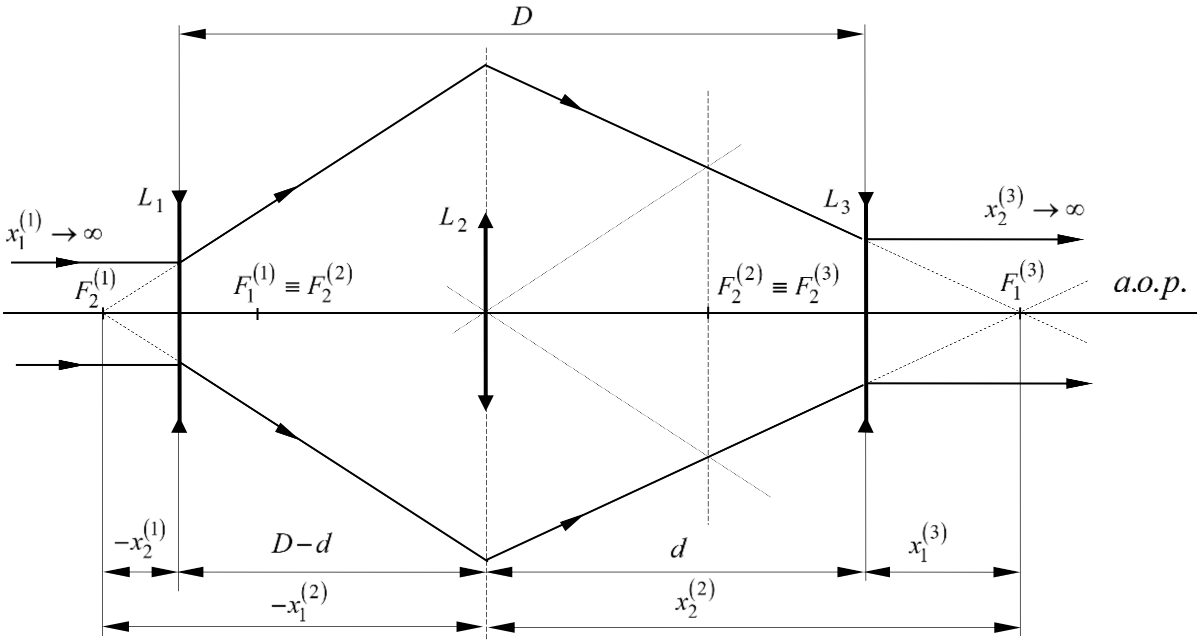


Figura 2. Desen schematic privind mersul razelor de lumină prin sistemul optic format de cele trei lentile

Acest lucru era de aşteptat, întrucât raza incidentă, paralelă fiind cu axa optică principală a sistemului, va trece prin focarul imagine al primei lentile; lentila fiind divergentă, focarele sale sunt virtuale, aşa cum se vede şi în figura 2. Deoarece *f* reprezintă modulul distanţei focale, deci o mărime pozitivă, $-f$ va fi negativ, $-f<0$, deci imaginea se va forma în spaţiul obiect, respectiv focarul imagine va fi în stânga lentilei (focar virtual).

Conform figurii 2:

$$D-d=-x_1^{(2)}-\left(-x_2^{(1)}\right) \Rightarrow D-d=x_2^{(1)}-x_1^{(2)}$$

şi, prin urmare, pentru lentila L_1 se poate scrie:

$$\begin{cases} x_2^{(1)}=-f \\ D-d=x_2^{(1)}-x_1^{(2)} \end{cases} \tag{1}$$

Formarea imaginilor în a doua lentilă poate fi şi ea descrisă cu ajutorul relaţiilor:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x_2^{(2)}}-\dfrac{1}{x_1^{(2)}}=\dfrac{1}{3f} \\ d=x_2^{(2)}-x_1^{(3)} \end{cases} \tag{2}$$

La descrierea formării imaginilor în a treia lentilă trebuie să se ţină cont de faptul că imaginea se formează la infinit, sistemul fiind afocal:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{x_2^{(3)}}-\dfrac{1}{x_1^{(3)}}=\dfrac{1}{-2f} \\ x_2^{(3)} \to \infty \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{x_1^{(3)}}=\frac{1}{2f} \Rightarrow x_1^{(3)}=2f \tag{3}$$

Trebuie determinată o relaţie între *D* şi *d*, în condiţiile în care se cunoaşte $f\,(>0)$; înlocuind relaţia (3) în (2) se obţine:

$$d = x_2^{(2)} - 2f \;\Rightarrow\; x_2^{(2)} = d + 2f \;\Rightarrow\; \frac{1}{d+2f} - \frac{1}{x_1^{(2)}} = \frac{1}{3f} \tag{4}$$

Folosind relaţia (1) sub următoarea formă:

$$D - d = -f - x_1^{(2)} \;\Rightarrow\; x_1^{(2)} = d - D - f$$

expresia (4) devine:

$$\frac{1}{d+2f} - \frac{1}{d-D-f} = \frac{1}{3f}$$

Efectuând calculele, se obţine o ecuaţie de gradul II în *d*:

$$d^2 + d\left(f - D\right) + 7f^2 + fD = 0 \tag{*}$$

În acest punct la rezolvării intervine legătura dintre capacitatea de atribuire a unei semnificaţii fizice unei combinaţii de simboluri fizice şi intuiţia matematică. Pentru început, trebuie menţionat faptul că existenţa şi natura soluţiilor unei ecuaţii de tipul celei de mai sus depind de valoarea discriminantului Δ. Se observă că, mergând pe calea „clasică” de rezolvare a unei ecuaţii de gradul II, s-ar obţine $d = d\left(D\right)$, în condiţiile în care discriminantul este convenabil. O astfel de dependenţă nu este utilă, întrucât ceea ce se cunoaşte despre *D* este doar faptul că este minim şi, să recunoaştem, mai mult încurcă lucrurile. Dar cerinţa problemei este să se determine *d* în anumite condiţii, deci ceea ce trebuie făcut în continuare, este să ne asigurăm că *d* există, iar *d* există numai dacă discriminantul este pozitiv sau nul:

$$\Delta \geq 0$$

$$\Delta = \left(f - D\right)^2 - 4\left(7f^2 + fD\right) = D^2 - 6fD - 27f^2 \geq 0$$

Urmează determinarea acelor valori ale lui *D*, pentru care funcţia $\Delta\left(D\right) = D^2 - 6fD - 27f^2$ are valori pozitive sau este nulă. Pentru aceasta, sunt utile cunoştinţele legate de semul funcţiei de gradul II. Astfel, dată fiind o funcţie $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g\left(x\right) = ax^2 + bx + c$, cu $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, semnul acesteia se va stabili conform tabelului 1:

Tabelul 1. Semnul funcţiei de gradul II când discriminantul este pozitiv

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$g\left(x\right)$	*semnul lui a*	0	*semn opus lui a*	0	*semnul lui a*

unde x_1 şi x_2 sunt rădăcinile ecuaţiei asociate funcţiei *g*, în condiţiile în care discriminantul este pozitiv.

Prin urmare, se calculează discriminantul ecuaţiei de gradul II asociate funcţiei $\Delta\left(D\right)$:

$$\Delta' = 36f^2 + 4 \cdot 27f^2 = 144f^2 > 0 \;\Rightarrow\; D_{1,2} \in \mathbb{R}$$

şi se obţin soluţiile ecuaţiei:

$$D_1 = \frac{6f + 12f}{2} \Rightarrow D_1 = 9f$$

$$D_2 = \frac{6f - 12f}{2} \Rightarrow D_2 = -3f$$

Se observă că, din punctul de vedere al rezolvării matematice, există două soluţii, însă $D_2 < 0$ nu are semnificaţie fizică, întrucât *D* nu se supune convenţiei de semne (deci nu poate fi pozitiv sau negativ, aşa cum pot fi de exemplu distanţele focale sau distanţele lentilă-obiect sau lentilă-imagine) şi nici nu poate fi negativ, distanţele care nu se supun unor reguli privind asocierea semnelor putând fi exprimate doar prin numere pozitive.

Astfel, valorile lui *D* pentru care $\Delta \geq 0$ se citesc din tabelul 2:

Tabelul 2: Semnul funcţiei $\Delta(D) = D^2 - 6fD - 27f^2$

D	$-\infty$				$-3f$						$9f$				$+\infty$
Δ	+	+	+	+	0	-	-	-	-	-	0	+	+	+	+

Se observă următoarele (şi aici intervine din nou corelarea dintre rezultatul matematic şi semnificaţia fizică a mărimilor care intervin; cu alte cuvinte, interpretarea fizică a rezultatului):

- intervalul $(-\infty, -3f]$ nu convine deoarece nu are semnificaţie fizică, *D* fiind negativ (o lungime nu se poate exprima printr-un număr negativ)

- intervalul $(-3f, 9f)$ nu convine, deoarece aici Δ este negativ, ceea ce contrazice condiţia de la care am pornit

- intervalul $[9f, +\infty)$ corespunde condiţiei $\Delta \geq 0$, deci este soluţie

Prin urmare, iată interpretarea fizică a celor menţionate mai sus: pentru orice valori ale lui *D*, mai mari de $9f$ sau egale cu acesta, sistemul este afocal.

Problema cere, însă, determinarea acelei valori a lui *d*, pentru care *D* să ia valoarea minimă; această valoare se determină din intervalul-soluţie, $[9f, +\infty)$, în care se identifică cea mai mică valoare a lui *D*:

$$D_{min} = 9f$$

- înlocuind în relaţia (*) se obţine din nou o ecuaţie de gradul II:

$$d^2 - 8fd + 16f^2 = 0 \Leftrightarrow (d - 4f)^2 = 0 \Rightarrow d = 4f$$

Se poate menţiona, ca observaţie, că rezolvarea de mai sus este accesibilă unui elev de clasa a IX-a, clasă în care el dobândeşte toate cunoştinţele necesare de matematică.

Se va aduce în discuţie o altă cale de rezolvare a problemei, care se bazează pe cunoştinţe de analiză matematică accesibile unui absolvent de clasa a XI-a. Deoarece se poate considera că mersul problemei conduce în mod firesc la relaţia (*), va fi folosită aceasta, dar scrisă sub o altă formă, care să pună în evidenţă dependenţa $D = D(d)$:

$$d^2 + d(f - D) + 7f^2 + fD = 0 \Rightarrow D(d) = \frac{1}{d - f}\left(fd + 7f^2 + d^2\right) \qquad (**)$$

Condiţia de obţinere a lui D_{min} este o condiţie de extrem, care s scrie astfel:

$$\frac{dD}{dd} = 0 \Rightarrow \frac{(f + 2d)(d - f) - \left(fd + 7f^2 + d^2\right)}{(d - f)^2} = 0$$

şi de unde rezultă:

$$d^2 - 2fd - 8f^2 = 0$$

adică o ecuaţie de gradul doi în *f*, pentru a cărei rezolvare se respectă algoritmul cunoscut:

$$\Delta = 4f^2 + 32f^2 = 36f^2$$

Desigur că discriminantul fiind pozitiv, ecuaţia va avea două soluţii:

$$d_1 = \frac{2f + 6f}{2} \Rightarrow d_1 = 4f > 0 (f > 0)$$

$$d_2 = \frac{2f - 6f}{2} \Rightarrow d_1 = -2f < 0 (f > 0)$$

Din nou trebuie respectată semnificaţia fizică a soluţiilor matematice; astfel, cea de a doua soluţie nu convine, distanţa *d* fiind negativă, soluţia acceptată fiind cea în care $d = 4f$, acesta fiind şi răspunsul la cerinţa formulată în problemă. În cazul în care se doreşte, în plus, determinarea lui D_{min}, se foloseşte dependenţa $D = D(d)$:

$$D_{min} = D(4f) = \frac{f \cdot 4f + 7f^2 + 16f^2}{4f - f} = 9f$$

CONCLUZII

A fost propusă o problemă de fizică pentru a cărei rezolvare au fost folosite mai multe metode matematice.

Din punctul de vedere al fizicii, au fost necesare cunoştinţe privind noţiunea de sistem optic afocal, reprezentarea lentilelor subţiri, natura focarelor lentilelor divergente, respectiv convergente, mersul razelor de lumină prin lentile divergente/convergente, formula fundamentală a lentilelor subţiri.

Din punctul de vedere al matematicii implicate, prima metodă s-a bazat pe cunoaşterea comportamentului funcţiei de gradul II, accesibilă unui elev declasa a IX-a, iar cea de a doua a făcut apel la cunoştinţe de analiză matematică, dobândite în clasa a XI-a. Aplicarea acestora a dus la obţinerea unor rezultate corecte din punct de vedere matematic, dar inacceptabile din punct de vedere fizic (de exemplu, exprimarea unei distanţe printr-un număr negativ).

Această situaţie scoate în evidenţă necesitatea gândirii critice în timpul rezolvării problemei, gândire capabilă să interpreteze rezultatele unor calcule din punct de vedere fizic sau, cu alte cuvinte, să le atribuie acestora o semnificaţie fizică.

Se constată că, indiferent dacă sunt calcule simple sau sunt necesare cunoştinţe puţin mai avansate de matematică, aceasta este omniprezentă atunci când se pune problema rezolvării unei probleme de fizică!

BIBLIOGRAFIE

[1] Caccamo, M.T., Serpe, A. (2023). Mathematics in Physics Problem-Solving a Kinematics Study in High School, Atti Accad.Pelorit. Pericol. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. Vol 101, No. 1, A2

[2] Çalişkan, S., Selçuk, G.S. (2009). Instruction of Problem Solving Strategies: Effects on Physics Attitude, e-Journal of New World Sciences Academy, Volume 4, Number:2, Article Number 1C0023, 281-295

[3] Căpitanu, C.D. (2014). Didactica fizicii, Editura Universităţii din Oradea

[4] Kriek, J., Koontse, R.D. (2017). First Year Physics Student's Expectations of the Role of Mathematics in Physics, International Journal of Innovation in Science and Mathematics Education, Vol. 25(2), pp.1-16

[5] Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului, Centrul Naţional de Evaluare şi Examinare, Concursul pentru ocuparea posturilor didactice/catedrelor declarate vacante/rezervate în unităţile de învăţământ preuniversitar, 2 august 2012, model

[6] Muttaqien, A., Rini, A.D.P. (2020). Apuanor, Wibowo, T., Supian, M., Hadianur, M., Istadi, Construction Representations of Student on Solving Word Problems Inconsistent Comparison, Advances in Social Science, Education and Humanities Research, volume 479, pp. 31-36

[7] Redish, E.F. (2005). Problem Solving and the Use of Math in Physics Courses, Invited talk presented at the conference World View on Physics Education in 2005: Focusing on Change, Delhi, August, pp. 21-26

[8] Rojas, S. (2010). On the teaching and learning of physics problem solving, Revista Mexicana de Física 56 (1) 22-28

[9] Santosa, I.E., (2021). Analysing Student's problem Solving Skills on the Topics of Modern Physics, The 10th National Physics Seminar (SNF 2021), Journal of Physics: Conference sSeries, IOP Publishing

[10] Silaban, B., Nainggolan, J. (2022). The Mastery of Science Concepts in Solving Physics Problems for Junior High School Students, Jurnal Pendidikan Indonesia, Vol. 11, nr. 4, Tahun, pp. 618-625

[11] Wanya, C.S. (2016). Performance and Determinants of Problem Solving Among College Physics Students, International Journal of Advanced Research in Management and Social Sciences, Vol. 5, No. 6, June, pp. 830-854

[12] Wijaya, A.P., Asnawati, R. (2018). The solving of Calculus problem base don Polya's steps: An investigation on pre-service teachers with low self-eficacy, International Conference on Multidisciplinary Academic (ICMA)

STUDIUL OSCILAȚIILOR CUPLATE UTILIZÂND COORDONATELE NORMALE

Daniel-Cristian POJOCA[1], Darius-Maximilian MANGRA[2], Adina-Monica TODERAŞ[3], Cristian-Dorin HOREA[3]

[1]Universitatea din Oradea, Facultatea de Informatică şi Ştiinţe student Fizică Medicală, anul III, pojocadanielcristian@gmail.com
[2]Universitatea din Oradea, Facultatea de Informatică şi Ştiinţe student Fizică Fizica Explorărilor şi terapiilor Biomedicale
[3]Universitatea din Oradea, Facultatea de Informatică şi Ştiinţe, Departamentul de Fizică

Rezumat. *Orice mişcare care se repetă la intervale de timp egale reprezintă o mişcare periodică. Dacă o particulă aflată în mişcare periodică se deplasează în vecinătatea poziţiei sale de echilibru stabil, mişcarea este oscilatorie. Deoarece forţele de frecare disipează energia mişcării, distanţa maximă la care se poate deplasa particula descreşte în timp, oscilaţia devenind amortizată. O oscilaţie proprie nedisipativă este neamortizată, iar o oscilaţie proprie disipativă este amortizată. Lucrarea a urmărit studiul oscilațiilor amortizate și cuplate, având în vedere un caz particular de cuplaj, cel a două resorturi identice care sunt legate la un resort de cuplaj, acesta având o constantă elastică mult mai mică.*

Cuvinte cheie: oscilații cuplate, oscilații amortizate, fenomenul de bătăi

INTRODUCERE

Două resorturi, legate prin intermediul unui resort de cuplaj, formează un sistem cuplat. Elongaţiile y_1 şi y_2 corespunzătoare celor două resorturi se vor măsura luând ca reper starea în care resorturile erau în echilibru (se va lua cu semnul „+” pentru alungire şi cu „-” pentru comprimare). Resortul de cuplaj „γ” va fi alungit sau comprimat în funcţie de semnul termenului y_1+y_2.

Metoda oscilaţiilor normale revine la separarea ecuaţiilor în două ecuaţii de tip oscilator armonic, ce pot fi rezolvate independent. Aceasta poate fi făcută prin adunarea şi respectiv scăderea celor două relaţii obţinându-se sistemul

$$\begin{cases}(\ddot{y}_1+\ddot{y}_2)+\omega^2(y_1+y_2)+2\omega'^2(y_1+y_2)=0\\(\ddot{y}_1-\ddot{y}_2)+\omega^2(y_1-y_2)=0\end{cases}$$

unde ω este pulsaţia proprie a resorturilor, iar ω‘pulsaţia proprie a resortului de cuplaj. Se introduc cele două coordonate normale

$$\begin{cases}q_1=y_1+y_2\\q_2=y_1-y_2\end{cases}$$

Noile coordonate nu mai au aceeaşi semnificaţie cu cele vechi (de elongaţie) dar au aceeaşi dimensiune. În plus, ele caracterizează întregul sistem, având avantajul că scrierea ecuaţiilor se face identic cu cazul în care am avea doi oscilatori independenţi. În noile coordonate cele două pulsaţii normale sunt

$$\begin{cases}\Omega_1^2=\omega^2+2\omega'^2 & \Rightarrow\quad \Omega_1=\sqrt{\omega^2+2\omega'^2}\\\Omega_2^2=\omega^2 & \Rightarrow\quad \Omega_2=\omega\end{cases}$$

Aşa după cum s-a specificat la definirea coordonatelor normale q_1 şi q_2, cele două moduri normale de oscilaţie corespund cazului când elongaţiile se adună (deci iniţial ambele corpuri sunt deviate în acelaşi sens faţă de poziţia de echilibru cu aceeaşi amplitudine) primul mod, şi respectiv celui când elongaţiile se scad (deci când iniţial corpurile sunt deviate în sensuri opuse cu aceeaşi amplitudine) cel de-al doilea mod. Din acest motiv Ω_1 se numeşte pulsaţie simetrică, iar Ω_2 pulsaţia antisimetrică.

Peste mişcarea oscilatorie a fiecărui resort, se suprapune o mişcare oscilatorie a amplitudinii, în sensul că şi amplitudinile celor două resorturi vor varia periodic cu pulsaţia Ω_b, astfel încât atunci când amplitudinea primului resort este maximă amplitudinea celui de-al doilea este minimă (zero). În restul timpului, pe măsură ce amplitudinea primului resort scade cea a celui de-al doilea creşte până când situaţia se inversează.
Acest proces este practic un proces de transfer de energie la rezonanţă între cele două subsisteme ale unui sistem oscilant. Prezenţa frecărilor va duce la amortizarea oscilaţiilor. Se mai spune că oscilaţia sinusoidală cu pulsaţia $\Omega`=(\Omega_1+\Omega_2)/2$, ce caracterizează fiecare resort în parte, este modulată în amplitudine cu pulsaţia $\Omega_b=(\Omega_1-\Omega_2)/2$, sau perioada $T_b=2\pi/\Omega_b$. Acest fenomen este numit bătăi.

MATERIALE ŞI METODE

Montajul experimental (figura 1) constă dintr-un cadru metalic, de care sunt suspendate cele două resorturi identice de constante elastice $k_1=k_2=k$. De cele două resorturi se atârnă două corpuri de mase identice $m_1=m_2=m$. Pentru realizarea sistemului cuplat, cele două corpuri se unesc prin intermediul unor scripeţi cu un resort de cuplaj de constantă k' în formă de γ. Timpii de oscilaţie se măsoară cu ajutorul unui cronometru.

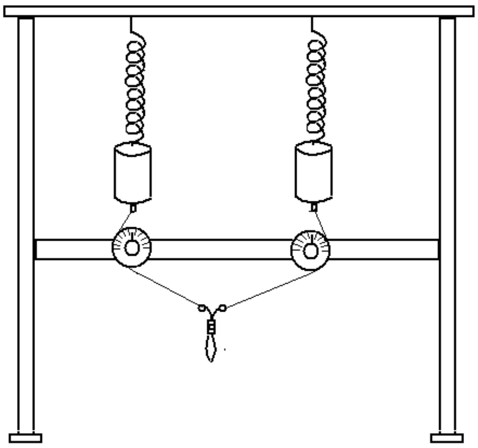


Figura 1. Schema montajului experimental pentru studiul oscilaţiilor cuplate ($k_1=k_2=k$; $m_1=m_2=m$)

Modul de lucru şi interpretarea rezultatelor

1. Oscilaţiile proprii

Pentru studiul oscilaţiilor proprii se parcurg următoarele etape:

– Se atârnă de primul resort unul din corpurile cu masa egală $m_1=m_2=m=2.215$kg, şi se îndepărtează fie prin alungire fie prin comprimare, resortul de poziţia de echilibru. Se lasă corpul să oscileze liber şi se măsoară timpul t_1, necesar efectuării a 20 oscilaţii complete. De aici se determină perioada oscilaţiilor pentru primul resort: $T_1=t_1/10$ (s).

– Se determină pulsaţia proprie $\omega_1=2\pi/T_1$ (rad/s). Se repetă aceste operaţii de cel puţin două ori obţinându-se o valoare medie $\overline{\omega}_1$.

– Se repetă aceleaşi operaţii şi pentru resortul al doilea determinându-se astfel T_2 şi $\overline{\omega}_2$.

Se determină constanta elastică a celor două resorturi egale $k_1=k_2=k=m\omega^2$

Observaţie: deoarece resorturile nu sunt perfect identice se va considera pulsaţia proprie $\omega=(\overline{\omega}_1+\overline{\omega}_2)/2$.

2. Oscilaţiile parţiale

Pentru studiul oscilațiilor parțiale se parcurg următoarele etape:

– Se leagă cele două corpuri prin intermediul scripeţilor cu resortul de cuplaj de tip „γ”.

– Se menţin pe rând câte unul din corpuri fixe în poziţia de echilibru, celălalt fiind lăsat să oscileze liber. Se repetă această operaţiune de câte cinci ori pentru fiecare corp. La fiecare determinare se măsoară timpul t_p a câte 10 oscilaţii, se determină perioada conform formulei $T_p=t_p/10$ şi pulsaţia parţială $\omega_p=2\pi/T_p$, calculându-se pentru fiecare resort valoarea medie, $\overline{\omega}_p$. Se va lua $\omega_p = (\overline{\omega}_{p1} + \overline{\omega}_{p2})/2$. Se determină constanta k' a resortului de cuplaj de tip „γ”

$$k` = k_p - k:$$

– Se determină pulsaţia proprie ω‘ a resortului de cuplaj de tip „γ” : $\omega'^2 = \frac{k'}{m}$

3. Oscilaţiile normale

În acest caz ambele resorturi vor fi deformate cu aceeaşi amplitudine în acelaşi sens (cazul $q_1=y_1+y_2$ şi $A_1=A_2$), respectiv ambele resorturi vor fi deformate cu aceeaşi amplitudine, dar în sensuri diferite. (cazul $q_2=y_1-y_2$ şi $A_1=-A_2$). Pentru efectuarea măsurătorilor se vor parcurge următoarele etape:

Resorturile (1) şi (2) cuplate prin intermediul resortului „γ” se deformează cu aceeaşi amplitudine în acelaşi sens şi se lasă sistemul liber. Se realizează astfel prima oscilaţie normală (cea simetrică).

– Se măsoară timpul necesar efectuării a 10 oscilaţii complete t_{n1} din care se determină perioada unei oscilaţii normale conform relaţiei $T_{n1}=t_{n1}/10$.

– Se repetă aceste operaţii de cel puţin cinci ori, în final calculându-se o valoare medie $\overline{T}_{n1}$. Se calculează $\Omega_1^{exp} = 2\pi/\overline{T}_{n1}$, prima pulsaţie normală (cea simetrică) şi se compară această valoare cu valoarea ce ar fi trebuit obţinută din considerente teoretice

$$\Omega_1^{teoretic} = \sqrt{\omega^2 + 2\omega'^2}$$

cu ω şi ω‘ determinate în etapele anterioare

– Se deformează resorturile în sensuri opuse cu aceeaşi amplitudine. Se pune din nou sistemul în oscilaţie pornind de la această situaţie iniţială, realizându-se astfel cea de-a II-a oscilaţie normală (cea antisimetrică).

– Se măsoară timpul t_{n2} necesar pentru 10 oscilaţii din care se determină T_{n2} conform relaţiei $T_{n2}=t_{n2}/10$. Acest lucru se repetă de cel puţin de cinci ori, determinându-se în final o valoare medie pentru T_{n2} notată cu $\overline{T}_{n2}$.

– Se determină pulsaţia normală antisimetrică, din punct de vedere experimental, conform formulei $\Omega_2^{exp} = 2\pi/\overline{T}_{n2}$ şi se compară valoarea cu cea dată de teorie $\Omega_2^{teoretic} = \omega$.

4. Fenomenul de bătăi

Pentru a evidenţia fenomenul de bătăi, trebuie realizată de la început condiţia de amplitudini defazate cu π/2, între cele două resorturi. Acest lucru se realizează cel mai uşor deformând unul dintre resorturi până la o valoare ce va constitui amplitudinea oscilaţiei, în timp ce celălalt este lăsat nedeformat.

Pentru studiul oscilațiilor proprii se parcurg următoarele etape:

– Se lasă libere concomitent cele două resorturi. Se va observa transferul de energie între ele şi variaţia de amplitudine specifică bătăilor, observând că, după câteva oscilaţii resortul ce fusese deformat cu elongaţia maximă ajunge în poziţia de echilibru, iar celălalt oscilează cu o elongaţie egală cu cea maximă avută de primul la început. Schimbul energetic continuă permanent, cele două resorturi trecând pe rând prin cele două stări. În absenţa frecărilor, procesul ar continua la infinit, dar în cazul real după un timp oarecare fenomenul se amortizează.

– Se determină perioada bătăilor T_b^{exp}, ca fiind timpul necesar corpului care avea iniţial amplitudinea 0 să revină în aceeaşi stare. Se inversează configuraţia iniţială de pornire şi se repetă măsurătoarea.

– Se repetă apoi aceste măsurători de cel puţin cinci ori pentru fiecare configuraţie iniţială. Se calculează valoarea medie a perioadei bătăilor din punct de vedere experimental şi se notează cu $\overline{T}_b^{exp}$.

– Se determină pulsaţia bătăilor conform formulei $\Omega_b^{exp} = 2\pi / \overline{T}_b^{exp}$

– Se compară valorile experimentale ale $\overline{T}_b^{exp}$ şi Ω_b^{exp} cu valorile teoretice calculate pe baza datelor obţinute la etapa anterioară, $\Omega_b^{exp} = (\Omega_1 - \Omega_2)/2$, iar perioada $\overline{T}_b^{exp} = 2\pi/\Omega_b$

REZULTATE ŞI DISCUȚII

Rezultatele obținute pentru oscilațiile proprii se regăsesc în tabelul 1:

Tabelul 1. Calculul pulsației proprii pentru resorturile 1 și 2

Resortul 1			
t(s)	T(s)	$\omega(rad/s)$	$\overline{\omega}$(rad/s)
3,94	0,394	15,93	15,655
4,03	0,403	15,44	
3,95	0,395	15,55	
3,96	0,396	15,45	
3,97	0,397	15,50	
3,98	0,398	15,48	
3,99	0,399	15,86	
4,02	0,402	15,78	
4,04	0,404	15,90	

Resortul 2			
t(s)	T(s)	$\omega(rad/s)$	$\overline{\omega}$(rad/s)
4,31	0,431	14,57	15,003
4,05	0,405	15,50	
4,25	0,425	14,77	
4,10	0,410	14,60	
4,23	0,423	15,41	
4,21	0,421	15,34	
4,12	0,412	14,88	
4,29	0,429	14,78	
4,15	0,415	15,19	

$\omega = \frac{15{,}655+15{,}003}{2} = 15{,}329$ rad/s, astfel că se obține: k=518,67 N/m

Rezultatele obținute pentru oscilațiile parțiale sunt prezentate în tabelul 2:

Tabelul 1. Calculul pulsației parțiale și a pulsației corespunzătoare resortului de cuplaj

ω(rad/s)	k(N/m)	k_p(N/m)	k_p(N/m)	k'(N/m)	ω'(rad/s)
15,3	518,67	15,74	548,76	30,09	3,68

Rezultatele obținute pentru oscilațiile normale se regăsesc în tabelul 3:

Tabelul 3. Calculul celor două tipuri de pulsații normale

Resortul 1				
t_1(s)	T_n(s)	$\overline{T_{n_1}}$	Ω_1^{exp}	Ω_1^{teor}
3,91	0,391	0,4442	14,137	16,161
4,01	0,401			
3,61	0,361			
4,02	0,402			
3,99	0,399			
3,92	0,392			
3,62	0,362			
3,97	0,397			
3,88	0,388			
3,76	0,376			

Resortul 2				
t_2(s)	T_n(s)	$\overline{T_{n_2}}$	Ω_2^{exp}	Ω_2^{teor}
4,16	0,416	0,4122	15,235	15,3
4,19	0,419			
4,17	0,417			
4,13	0,413			
4,11	0,411			
4,10	0,410			
4,12	0,412			
4,09	0,409			
4,07	0,407			
4,08	0,408			

Rezultatele obținute pentru fenomenul de bătăi se pot observa în tabelul 4

Tabelul 4. Calculul perioadei bătăilor

T_b^{exp}(s)	$\overline{T_b^{exp}}$(s)	Ω_b^{exp}	Ω_b^{teor}	T_b^{teor}
6,4	6,45	0,97	0,462	13,59
6,6				
6,4				
6,3				
6,5				
6,3				
6,6				
6,2				
6,7				
6,5				

CONCLUZII

Pentru efectuarea studiului, s-a apelat la metoda oscilațiilor normale, prin care se separă modurile de oscilație cu ajutorul a două coordonate independente. S-au efectuat calcule pentru oscilațiile proprii ale resorturilor, apoi pentru oscilațiile parțiale, pentru aflarea constantelor elastice ale celor trei resorturi, precum și a pulsațiilor aferente. Apoi s-au efectuat măsurători pentru două cazuri particulare (oscilațiile în fază și în antifază). Fenomenul de bătăi a constituit baza următoarelor măsurători prin care s-a evidențiat fenomenul de transfer al energiei de la un oscilator la altul, dar și disiparea energiei în urma amortizării mișcării sistemului cuplat.

Rezultatele obținute sunt în bună concordanță cu calculele teoretice efectuate. Sursele de erori sunt multiple – frecarea cu aerul, firul de legătură nu e inextensibil etc. De asemenea, aprecierea momentelor de maxim și minim a oscilațiilor nu este lipsit de erori.

BIBLIOGRAFIE

[1] Filip, S., Horea, C., Macocian, E., Toderaş, M. (2006). Mecanică clasică. Îndrumător de laborator, Tipografia Universităţii din Oradea

[2] Filip, S., Marcu, L. (1998). Mecanică fizică, Editura Universităţii din Oradea

[3] Hristev A. (1984). Mecanică fizică şi acustică, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti

[4] Kittel, Ch., Knight, W. (1981). Curs de fizică, Berkeley, vol. I, Mecanică, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti

[5] Luca, D., Stan, C. (2004). Mecanică fizică. Partea I: Mecanica punctului material, Ed. Tehnopres, Iaşi

RADIOPROTECȚIA ÎN ANGIO- COMPUTER TOMOGRAFIA

Alexandru TODERAȘ[1], Monica GHIOCEL[2], Raluca LEZEU[3], Adina-Monica TODERAȘ[4], Sanda-Monica FILIP[4]

[1]Liceul Tehnologic Băile Felix, Oradea - profesor
[2]Liceul Teoretic Aurel Lazăr, Oradea - profesor
[3]Universitatea din Oradea, Facultatea de Informatică şi Ştiinţe - studentă master FETB
[4]Universitatea din Oradea, Facultatea de Informatică şi Ştiinţe, Departamentul de Fizică

***Rezumat**: Radioprotecția acoperă toate măsurile luate pentru a asigura protecția omului și a mediului împotriva efectelor radiațiilor ionizante. Conceptul de radioprotecție a fost dezvoltat de la descoperirea radioactivității in secolul XX.*
Cuvinte cheie: angiografia, radioprotecție

INTRODUCERE

Angio-computer tomografia, denumită și Angio-CT, reprezintă o investigație medicală radiologică care combină tehnologia clasică a tomografiei computerizate cu cea a angiografiei convenționale, pentru a crea imagini detaliate a cartografiei vaselor sangvine din corp. Angiografia este o procedură medicală minim invazivă, nedureroasă, care utilizează razele X pentru a vizualiza vasele de sânge ale corpului, fiind utilizată pentru diagnosticarea, examinarea și tratamentul bolilor vasculare. Aceasta intervenție poate investiga arterele sau venele care prezintă patologii și malformații – vasele pot fi îngustate, blocate sau mărite în diverse zone ale corpului, cum ar fi creierul, inima, abdomenul, membrele, gâtul sau pieptul, inclusiv cele asimptomatice.

CT-ul, sau tomografia computerizată, este o metodă de investigație imagistică de înaltă precizie, atraumatică și foarte rapidă, care folosește razele X pentru a obține imagini detailate și de înaltă rezoluție ale diverselor structuri anatomice ale corpului, care sunt prelucrate ulterior de către un soft inteligent computerizat.

Angio-CT combină astfel tehnologia tomogafiei computerizată cu angiografia convențională.

NOȚIUNI TEORETICE

În cadrul angiografiilor nu există timp de expunere. Trebuie luat în considerare faptul că această metodă necesită prezența personalului medical, ceea ce implică riscuri suplimentare de expunere la radiații secundare (împrăștiate) din partea acestuia. Așadar, radioprotecția în angiografie este esențială atât pentru protejarea pacientului, cât și a personalului medical, pentru optimizarea calității imaginilor și reducerea dozei de radiații pentru pecienți. În domeniul fluoroscopiei, precum și în toate tehnologiile de imagistică cu raze X, expunerea la radiații trebuie redusă la minimum necesar. Din cauza duratei relativ mari a timpilor de expunere necesari pentru formarea seriilor de imagini, atât pacientul, cât și personalul medical sunt expuși la riscuri proporționale. Doza de radiație este estimată între 20-50 mGy/min la suprafața pielii. Radiația ionizantă este capabilă să producă o serie de efecte biologice în funcție de doza radiației și radiosensibilitatea țesuturilor. Cu cât mai multe mitoze au loc într-un țesut, cu atât acesta este mai radiosensibil.

REZULTATE ȘI DISCUȚII

Luând în considerație efectele biologice ale radiațiilor ionizante, de-a lungul timpului au fost elaborate diverse măsuri de protecție, măsuri ce implică protecție fizică, chimică și biologică. Protecția fizică include câteva elemente de bază cum ar fi reducerea timpului de expunere, creșterea distanței față de sursă, ecranarea surselor de radiație, precum și o serie de măsuri de organizare bine stabilite.

Principiul ALARA (as low as reasonably achievable) este factorul principal care stă la baza stabilirii unui program de protecţie împotriva radiaţiilor ionizante

1. Timpul de expunere este direct proporțional cu doza de radiație primită, un timp mai lung fiind direct asociat cu creşterea dozei. De aceea reducerea la minim a timpului în care o persoană se află sub acțiunea radiațiilor ionizante este o componentă importantă a modernizării protocoalelor imagistice pentru diverse investigații, a planificării și a structurii unităților ce dețin surse de radiații ionizante, precum și a instruirii personalului acestor unități.

2. Distanța de la sursa de iradiere are, de asemenea, o importanță deosebită, aceasta fiind relatată și prin legea pătratului distanței, conform căreia intensitatea fasciculului de raze X emis de o sursă punctiformă este invers proporțională cu pătratul distanței de la sursă. Datorită răspândirii în toate direcțiile, razele ionizante sunt redistribuite pe o arie mult mai mare odată cu creșterea distanței de la sursă.

3. Ecranarea se referă la utilizarea diverselor materiale și ecrane protectoare capabile să oprească radiațiile ionizante sau să diminueze semnificativ capacitatea de penetrare a acestora. Exemple includ ecranarea sau carcasarea surselor generatoare de radiații, utilizarea perdelelor și paravanelor mobile radioprotectoare, a pereților întăriți cu folii de plumb, a geamurilor cu săruri de plumb, precum și a mijloacelor individuale de protecție împotriva radiației precum șorțuri sau veste din cauciuc plumbat, ochelari radioprotectori, mănuși din cauciuc plumbat, gulere speciale din cauciuc plumbat pentru protecția glandei tiroide sau a gonadelor etc.

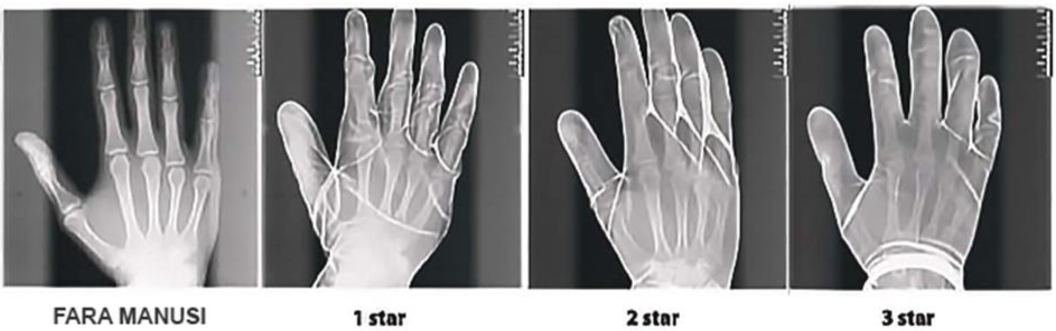


Figura 1. Radiografie mâinii fără manuși radioprotectoare și cu mănuși radioprotectoare cu diferite grade de atenuare a radiațiilor în funcție de calitatea mănușilor, [1]

4. Măsurile de organizare includ o serie de mijloace de securitate în diverse domenii precum producerea și utilizarea substanțelor radioactive, eliminarea deșeurilor, planificarea și construcția încăperilor și departamentelor ce produc sau utilizează radiații ionizante, elaborarea și implementarea normativelor regulatorii în domeniu, utilizarea semnelor de avertizare de pericol de radiaţii, instructajul personalului etc.

5. Protecția chimică se realizează prin administrarea înainte de iradiere a unor preparate chimice radioprotectoare, care măresc rezistența organismului la radiații.

6. Protecția biologică se realizează prin administrarea imediat după iradiere a unor preparate și macromolecule biologice precum sânge sau plasmă, care au potențial de refacere celulară. Unii pacienți pot necesita și transplant de celule viabile de măduvă roșie pentru restaurarea funcţiei hematopoietice. [2-4]

BIBLIOGRAFIE:

[1]https://medprice.ro/produse-medicale/radiologie-imagistica/protectie-radiatii/manusi-radioprotectie-sterile/
[2] Georgescu Ș. et all. (2009). Radiologie și imagistică medicală. Editura universitară "Carol Davila", București
[3] Bushberg J et al. (2002). The essential physics of medical imaging. Lippincott Williams & Wilkins Philadelphia, PA, USA
[4] https://www.medlife.ro/articole-medicale/angiografie-afectiuni-diagnosticate-cum-se-realizeaza-riscuri

ANEVRISME CEREBRALE

Alexandru TODERAŞ[1], Raluca LEZEU[2], Darius-Maximilian MANGRA[2], Adina-Monica TODERAŞ[3], Eugen-Victor MACOCIAN[3]

[1]Liceul Tehnologic Băile Felix, Oradea - profesor
[2]Universitatea din Oradea, Facultatea de Informatică şi Ştiinţe - studentă master FETB
[3]Universitatea din Oradea, Facultatea de Informatică şi Ştiinţe, Departamentul de Fizică

***Rezumat**: Un anevrism este o „umflătură" a unui vas de sânge cauzată de o slăbiciune a peretelui vasului sangvin, de obicei acolo unde se ramifică. Pe măsură ce sângele trece prin vasul de sânge slăbit, tensiunea arterială face ca o zonă mică să se umfle spre exterior ca un balon.*

Cuvinte cheie: anevrisme, CT, angio-CT

INTRODUCERE

Anevrismele se pot dezvolta în orice vas de sânge din organism, dar cele mai frecvente două locuri sunt: artera care transportă sângele departe de inimă către restul corpului (aorta abdominală) și creierul. Termenul medical pentru un anevrism care se dezvoltă în interiorul creierului este anevrism intracranian sau cerebral. Anevrismele cerebrale reprezintă ***dilatații anormale ale vaselor de sânge intracraniene***, fiind o afecțiune cu potențial grav, ce poate duce la sângerare și consecințe neurologice severe.

NOȚIUNI TEORETICE

Anevrismele cerebrale apar de-obicei în locații predilecte, cum ar fi bifurcațiile arterelor cerebrale sau pe arterele comunicante anterioare și posterioare. Ele sunt în principal saculare, fiind constituite dintr-o zonă de subțiere a peretelui vascular și o dilatație saculară care poate conține sau nu un cheag de sânge, numit și tromb.

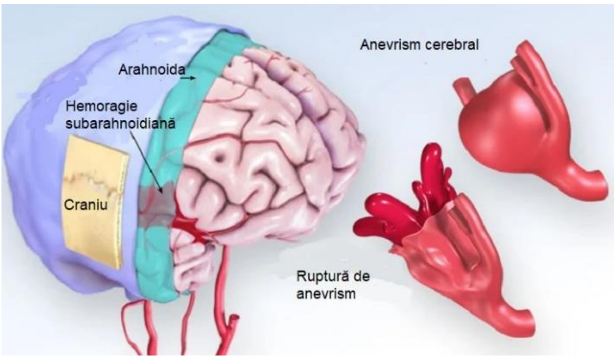


Figura 1. Anevrism cerebral, [1]

Anevrismele cerebrale pot varia în dimensiune și formă, de la cele mai mici protuzii asimptomatice până la dilatații mari și complexe. Formele comune includ sacciforme (berry), fusiforme și laterale. Ele prezintă un risc de sângerare, iar dimensiunea și forma anevrismului sunt factori importanți în determinarea acestui risc.

REZULTATE ȘI DISCUȚII

Motivul exact al dezvoltării anevrismelor este încă incert, însă au fost identificați câțiva factori care ajută la dezvoltarea lor, cum ar fi hipertensiunea arterială, fumatul, vârsta, istoricul familial și prezența anumitor boli genetice (de exemplu sindromul Marfan, care este o tulburare a țesutului conjunctiv, cu afectarea sistemului scheletal, cardiovascular, ocular și tegumentar). În unele cazuri, anevrismele pot apărea din cauza unor defecte congenitale din naștere de slăbire și subțiere a vaselor de sânge.

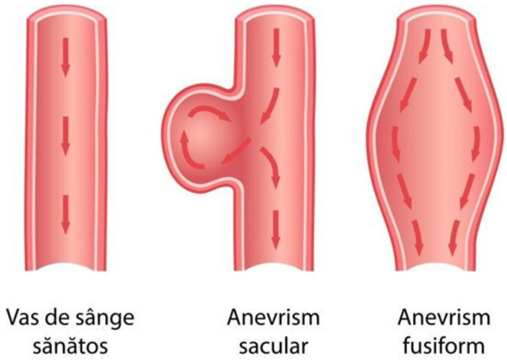


Figura 2. Tipuri de anevrisme, [1]

În imagistica medicală, angiografia cu raze X este considerată metoda de diagnostic de referință pentru anevrismele cerebrale.

Tomografia computerizată și rezonanța magnetică pot fi utilizate pentru detectarea anevrismelor și evaluare leziunilor secundare, cum ar fi sângerarea subarahnoidiană. Examenul CT cerebral este prima investigație care se face și care arată severitatea hemoragiei subarahnoidiene.

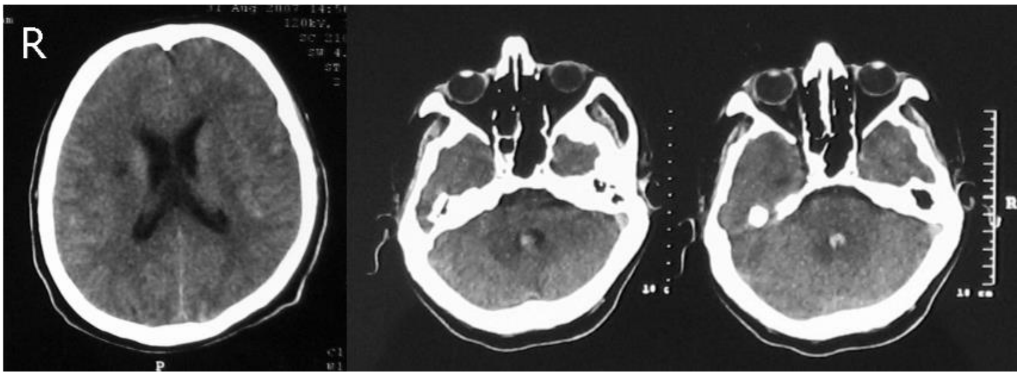


Figura 3. CT cerebral ilustrând hemoragia subarahnoidiană post anevrismală, [2]

Se efectuează, apoi, o angiografie cerebrală care pune un diagnostic de precizie al anevrismului si al localizării sale. Se mai folosesc în scop diagnostic angiografia prin rezonanță magnetică nucleară sau angio-CT.

Angiografia prin rezonanță magnetică (MRA) și angiografia prin tomografie computerizată (CTA) sunt metode non-invazive de imagistică medicală care pot fi utilizate pentru a evalua anevrismele cerebrale. Aceste tehnici pot furniza informații despre structura și fluxul sanguin în vasele cerebrale.

Când vine vorba de simptomatologie, majoritatea anevrismelor cerebrale provoacă simptome vizibile doar dacă se sparg. Acest lucru duce la hemoragie subarahnoidiană, în care sângerarea cauzată de anevrismul rupt poate provoca leziuni cerebrale și simptome extinse.

Simptomele rupturii unui anevrism cerebral pot fi: durere de cap subită și infernal de dureroasă – a fost descrisă ca o „durere de cap în lovituri de tunet”, similară cu o lovitura bruscă în cap, rezultând într-o durere orbitoare, diferită de oricare altă experiență precedentă, rigiditate a gâtului, greață și vărsături, fotosensibilitate (durere la privirea la lumină). Evident, ruptura unui anevrism cerebral este o urgență medicală ce necesită intervenire promptă.

În cazul depistării unui anevrism cerebral înainte de a se rupe, tratamentul poate fi recomandat pentru a preveni ruperea acestuia în viitor. Majoritatea anevrismelor nu se rup, așa că tratamentul este urmat doar în cazul în care există o probabilitate destul de mare de a se rupe în viitor. Pentru anevrismele mici și asimptomatice, monitorizarea atentă poate fi opțiunea preferată. Pacientului îi sunt recomandate vizitele regulate la medic și adresate sfaturi pentru prevenția ruperii acestuia, cum ar fi renunțatul la fumat.

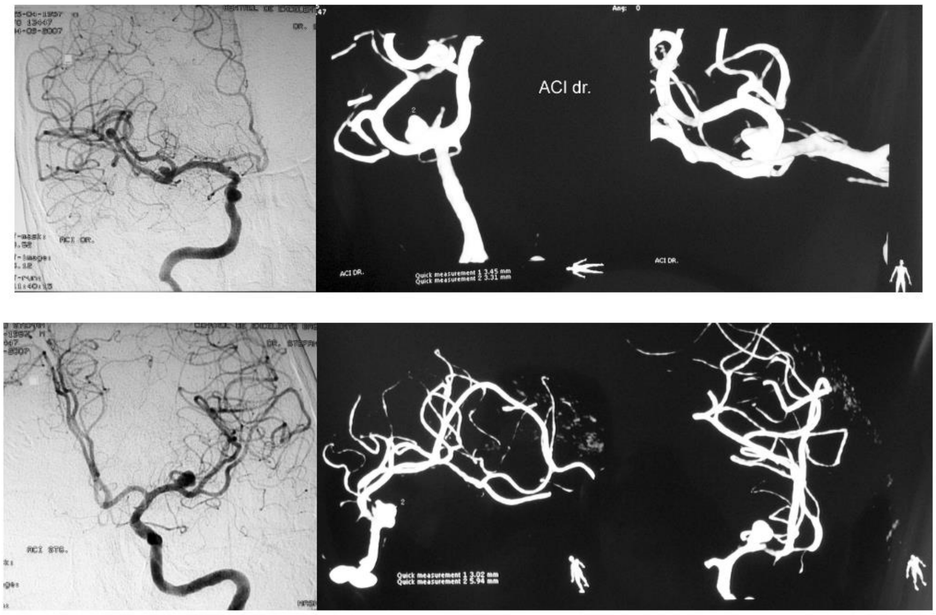


Figura 4. Angiografie cerebrală- 4 vase la un pacient cu anevrism de ACM bilaterală, [2]

Dacă este recomandat tratamentul, acesta poate să fie de două tipuri: tratament endovascular și tratament chirurgical.

Procedurile endovasculare, cum ar fi embolizarea cu spirale sau stenturi intracraniene, pot fi utilizate pentru a bloca fluxul de sânge către anevrism. Aceste tehnici minim invazive pot reduce riscul de sângerare și pot fi utilizate atât cu scop preventiv, cât și în tratamentul anevrismelor rupte.

Tratamentul chirurgical implică de-obicei fie umplerea anevrismului cu niște materiale metalice minuscule (coiling), fie o intervenție chirurgicală deschisă pentru sigilarea acestuia cu un mic clips metalic (surgical clipping) aplicat la gâtul anevrismului pentru a opri sângerarea. Acest tratament poate fi indicat în cazurile de anevrism rupt sau în anevrisme de dimensiuni mari sau complexe, [3-9].

CONCLUZII

Este greu de estimat cu exactitate câți oameni sunt afectați de anevrismele cerebrale pentru că de-obicei trec nedepistate și sunt asimptomatice. Unii experți susțin că numărul ar putea ajunge și la 1 din 20 de oameni, în timp ce alții consideră ca numărul cazurilor este mult mai scăzut, in jur de 1 din 100 de oameni.

Numărul anevrismelor care se rup este și mai mic. Doar 1 din 15.000 de oameni sunt depistați anual în Anglia. Anevrismele cerebrale pot apărea la orice vârstă, dar s-a constatat o pondere mai mare între persoanele de peste +40 de ani, cu precădere femei.

Anevrismele cerebrale reprezintă o afecțiune cerebrovasculară complexă, cu potențial grav de sângerare și complicații neurologice.

Diagnosticul precoce și managementul adecvat sunt esențiale în prevenirea sângerării și în evitarea consecințelor nefavorabile. În funcție de dimensiunea, forma și starea anevrismului, opțiunile de tratament pot include monitorizarea conservatoare, proceduri endovasculare sau intervenții chirurgicale. Colaborarea multidisciplinară între neurologi, neurochirurgi și radiologi este esențială pentru o abordare individualizată și optimă a pacienților cu anevrisme cerebrale

BIBLIOGRAFIE:

[1] https://smartliving.ro/anevrism-cerebral-o-bomba-cu-ceas-simptome-tratament/
[2] https://www.neurochirurgie4.ro/index.php/anevrisme-cerebrale
[3] Bederson, J.B., Awad, I.A., Wiebers, D.O., et all (2009). Recommendations for the management of patients with unruptured intracranial aneurysms: A statement for healthcare professionals from the Stroke Council of the American Heart Association. Stroke, Vol.40(3), pp. 994-1025
[4] Brisman, J.L., Song, J.K., & Newell, D.W. (2006). Cerebral aneurysms. The New England Journal of Medicine, Vol.355(9), pp. 928-939.
[5] Connolly, E.S., Rabinstein, A.A., Carhuapoma, J.R., et all. (2012). Guidelines for the management of aneurysmal subarachnoid hemorrhage: A guideline for healthcare professionals from the American Heart Association/American Stroke Association. Stroke, Vol.43(6), pp. 1711-1737.
[6] Lawton, M.T., & Vates, G.E. (2017). Subarachnoid hemorrhage. The New England Journal of Medicine, Vol.377(3), pp. 257-266.
[7] Molyneux, A., Kerr, R., Stratton, I., et all (2005). International Subarachnoid Aneurysm Trial (ISAT) of neurosurgical clipping versus endovascular coiling in 2143 patients with ruptured intracranial aneurysms: A randomised trial. Lancet, Vol.366(9488), pp. 809-817.
[8] Rinkel, G.J.E. (2011). Natural history, epidemiology, and screening of unruptured intracranial aneurysms. Journal of Neurology, Neurosurgery, and Psychiatry, Vol.82(4), pp.396-400.
[9] Wiebers, D.O., Whisnant, J.P., Huston III, J., et all (2003). Unruptured intracranial aneurysms: Natural history, clinical outcome, and risks of surgical and endovascular treatment. The Lancet, Vol. 362(9378), pp.103-110

CALCULUL CONSTANTEI REȚELEI DE DIFRACȚIE

Gabriela-Diana TOMȘE[1], Cristian-Dorin HOREA[2], Florian-Georgian BEIUȘEANU[2]

[1]Universitatea din Oradea, Facultatea de Informatică şi Ştiinţe studentă la master FETB, anul II, tomsegabriela17@gmail.com
[2]Universitatea din Oradea, Facultatea de Informatică şi Ştiinţe, Departamentul de Fizică

Rezumat. *Lucrarea are ca scop realizarea unei aplicații a teoriei şi principiilor fizicii folosind mijloace de laborator. S-a investigat difracția luminii pe o rețea de difracție pentru a determina lungimea de undă a radiației laser. S-au folosit filtre de impurități pentru a constitui rețele de difracție. S-au obținut rezultatele pentru constanta rețelei de difracție pentru două lungimi de undă diferite. Cele două seturi de rezultate sunt foarte apropiate, diferențele se încadrează în erorile de măsurare din condițiile de laborator.*
Cuvinte cheie: difracția luminii, rețea de difracție, radiația laser

INTRODUCERE

Laserii se bazează pe câteva fenomene fizice fundamentale, care permit generarea și amplificarea radiației coerente. Principalele proprietăţi caracteristice radiaţiei laser sunt: monocromaticitatea, direcţionalitatea, coerenţa şi intensitatea.

Aparenta schimbare a direcţiei de propagare a luminii sau împrăştiere a acesteia poartă numele de *difracţie* . Lumina pătrunde în spatele obstacolelor şi a fantelor, deci se abate de la propagarea rectilinie. Frontul de undă se deformează şi lumina se propagă şi în zonele de umbră geometric, fiecare punct al frontului de undă poate fi considerat ca sursă secundară de unde sferice coerente. Noul front de undă reprezintă înfăşurătoarea fronturilor de undă secundare.

Reţeaua de difracţie este un dispozitiv alcătuit dintr-un număr foarte mare de fante paralele, egal distanţate, care permit difracţia multiplă şi care „desface” fascicolul incident în componentele sale, producând un spectru.

MATERIALE ŞI METODE

Aparatura prezentată se află în dotarea Laboratorului de Electricitate şi magnetism al Departamentului de Fizică, Facultatea de Informatică şi Ştiinţe, Universitatea din Oradea. Aparatura de lucru constă în:

- Un laser cu fascicul de lumină verde cu lungimea de undă de λ = 532 nm
- Un laser de măsurare a distanțelor, cu lumină roșie cu lungimea de undă de λ = 670 nm
- Un stativ pentru fixarea dispozitivului laser și două filtre de impurități, cu diametre de ordinul sutelor de micrometri
- O riglă de măsurare a distanțelor, fixată pe o coală de hârtie pe care se va forma figura de difracție la o distanță de 5-6 metri de lasere

Procedura de lucru a constat în următoarele etape:

1. S-a fixat pe câte un suport cilindric de carton (de diametru cu ceva mai mare decât cel al dispozitivului laser) câte o bucată din filtrele de cele două tipuri
2. S-a măsurat distanța de la laserul fixat în suport până la coala de hârtie cu ajutorul dispozitivului laser de măsurare a distanțelor
3. S-a fixat suportul de carton cu filtrul de culoare galbenă și s-a format figura de difracție pentru laserul cu fascicul de lumină verde cu lungimea de undă de λ = 532 nm
4. S-a măsurat distanța dintre maximul central și primul maxim secundar, aceasta constituind interfranja pentru rețeaua 1 și λ = 532 nm (figura 1)

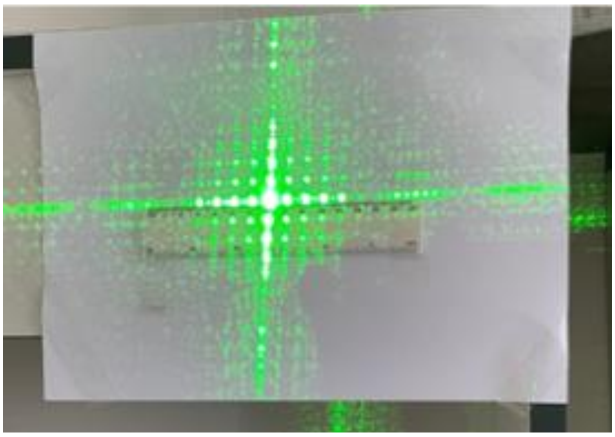


Figura 1. Măsurarea interfranjei pentru rețeaua 1 și λ = 532 nm

5. S-a format figura de difracție pentru laserul cu fascicul de lumină roșie cu lungimea de undă de λ = 670 nm

6. S-a măsurat distanța dintre maximul central și primul maxim secundar, aceasta constituind interfranja pentru rețeaua 1 și λ = 670 nm (figura 2)

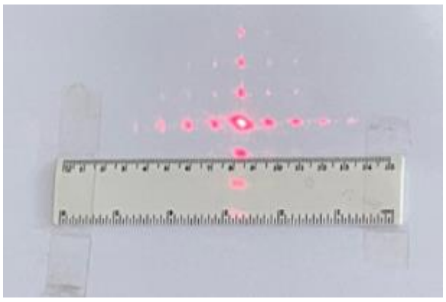


Figura 2. Măsurarea interfranjei pentru rețeaua 1 și λ = 670 nm

7. S-a fixat suportul de carton cu filtrul de culoare albastră și s-a format figura de difracție pentru laserul cu fascicul de lumină verde cu lungimea de undă de λ = 532 nm

8. S-a măsurat distanța dintre maximul central și primul maxim secundar, aceasta constituind interfranja pentru rețeaua 2 și λ = 532 nm (figura 3)

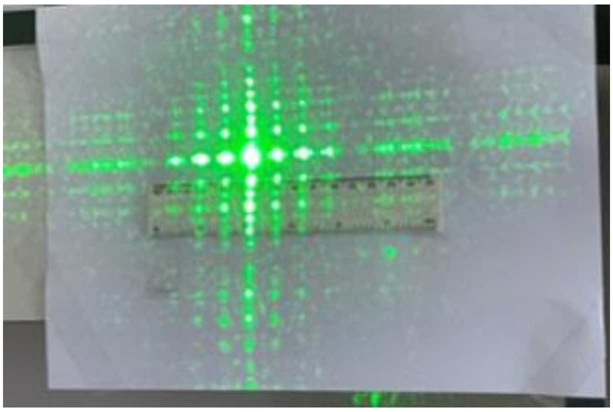


Figura 3. Măsurarea interfranjei pentru rețeaua 2 și λ = 532 nm

9. S-a format figura de difracție pentru laserul cu fascicul de lumină roșie cu lungimea de undă de λ = 670 nm

10. S-a măsurat distanța dintre maximul central și primul maxim secundar, aceasta constituind interfranja pentru rețeaua 2 și λ = 670 nm (figura 4)

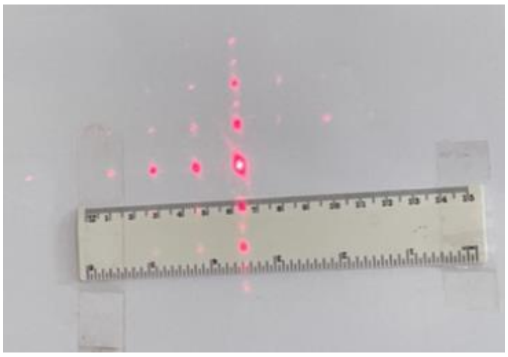


Figura 4. Măsurarea interfranjei pentru rețeaua 2 și λ = 670 nm

REZULTATE ŞI DISCUŢII

Calculul constantei reţelei pentru ambele rețele de difracție s-a efectuat în modul prezentat mai jos.

Minimele de intensitate din figura de difracţie pot fi determinate cu ajutorul relaţiei:

$$d\left(\sin i \pm \sin\alpha\right) = \left(2k+1\right)\frac{\lambda}{2},\ k = 0,\pm 1,\pm 2,...$$

Maximele de intensitate din figura de difracţie pot fi determinate cu ajutorul relaţiei:

$$d\left(\sin i \pm \sin\alpha\right) = 2k\frac{\lambda}{2} = k\lambda,\ k = 0,\pm 1,\pm 2,...$$

unde: d: constanta reţelei, adică distanţa dintre două trăsături succesive ale reţelei, i: unghiul de incidenţă, α : unghiul de difracţie, λ : lungimea de undă a radiaţiei folosite

În cazul nostru, incidența e normală (i=0)

$$d sin\alpha = k\lambda$$

Pentru distanța de la maximul central la primul maxim secundar k=1 și:

$$sin\alpha = \frac{i}{D}$$

și rezultă formula de calcul a constantei d a rețelei:

$$d = \frac{\lambda D}{i}$$

Rezultatele obținute s-au trecut în tabelul 1

Tabelul 1 Rezultate experimentale

Rețeaua	D (m)	λ (nm)	i (cm)	d (μm)
1	5,586	532	0.9	330.19
		670	12	311.88
2		532	14	212.26
		670	18	207.92

Pentru laserul cu o intensitate mai mare (cel cu λ = 532 nm) dar și cu un spot mai mare, figura de difracție are maxime mai bine diferențiate unele de altele, iar pentru laserul cu o intensitate mai mică (cel cu λ = 670 nm), figura de difracție are maxime mai puțin intense dar de o dimensiune mai mică a spotului maximelor

S-au obținut rezultatele pentru constanta rețelei de difracție pentru două lungimi de undă diferite.

Cele două seturi de rezultate sunt foarte apropiate, diferențele se încadrează în erorile de măsurare din condițiile unui laborator didactic.

CONCLUZII

Radiația laser are două caracteristici importante care o face potrivită pentru determinarea constantei unei rețele de difracție: este coerentă și este monocromatică. De asemenea, intensitatea mare și direcționalitatea fascicolului laser sunt argumente în plus pentru a susține acest demers experimental.

Pentru laserul cu o intensitate mai mare (cel cu λ = 532 nm) dar și cu un spot mai mare, figura de difracție are maxime mai bine diferențiate unele de altele, iar pentru laserul cu o intensitate mai mică (cel cu λ = 670 nm), figura de difracție are maxime mai puțin intense dar de o dimensiune mai mică a spotului maximelor

BIBLIOGRAFIE

[1]Popescu, I. M. (2000). Fizica si ingineria laserelor, Ed. Tehnică, Bucuresti
[2]Pohoață, V. (2020). Introducere în fizica sistemelor laser, Ed. Ștef
[3]Milea I., (1998). Optica, Vol. I şi II, Editura Universităţii din Oradea
[4]Milea, I. , Filip, S., Sbârciog C. (1996). Optica. Lucrări de laborator pentru uzul studenţilor, Universitatea din Oradea

STUDIU COMPARATIV AL PROPRIETĂȚILOR FASCICULELOR DE RADIAȚIE ÎNTRE DOUĂ ACCELERATOARE LINIARE CLINICE

Ionuț VARGA[1]

[1]Universitatea din Oradea, Facultatea de Informatică şi Ştiinţe - student Fizică Medicală

Rezumat. *Această lucrare are ca scop evidențierea diferențelor și asemănărilor existente între două acceleratoare liniare clinice, Siemens și Elekta. Proprietățile celor două fascicule de radiație sunt ilustrate prin compararea lor din punctul de vedere al dozimetriei absolute respectiv al dozimetriei relative. Acceleratoarele liniare clinice au același scop, și anume acela de a trata pacientul. În funcție de tehnologia de la baza acestor aparate, prezintă și anumite diferențe, însă acestea nu reprezintă un obstacol în performanța sau acuratețea lor.*

Cuvinte-cheie: acceleratoarele Elekta și Siemens, dozimetrie, debitul dozei

INTRODUCERE. PREZENTAREA ACCELERATOARELOR ELEKTA SI SIEMENS

În cazul acceleratorului Siemens care este un accelerator compact ceea ce ii permite să aibă o îndoire mult mai largă a magnetului până la 270º (acromatic) comparativ cu acceleratorul Elekta are în compoziția sa un braț lung, având o îndoire mult mai scurtă a magnetului de până la 112.5º (slalom).

Filtrele de netezire (pentru fotoni) și foliile de împrăștiere (pentru electroni) sunt montate pe un ansamblu rotativ numit carusel pentru a ușura poziționarea mecanică a fasciculului. O altă diferență esențială care există între cele două acceleratoare este modalitatea de parcurgere a caruselului, care în cazul acceleratorului liniar clinic Siemens este perfect liniar, iar în cazul acceleratorului Elekta este circular, fiind parcurs întreg circuitul până la destinația țintă. Lamelele de colimare sunt diferite între ele în cazul acceleratoarelor Siemens și Elekta, ca și asemănare se poate observa gruparea foarte strânsă a acestora în ambele cazuri dar și diferența formei geometrice pe care o au, astfel încât proeminențele acestora minimizează scurgerea radiațiilor printre lamele.

Acceleratoarele Siemens și Elekta diferă semnificativ din punctul de vedere al grosimii MLC-urilor cât și al poziției pe care o ocupă în capul de tratament. Aplicatorul este constituit din multiple diafragme care diferă ca număr iar distanța până la sursă este de asemenea diferită între acceleratorul Siemens și Elekta. Este important de menționat că unele diafragme sunt tăiate pe linia de divergență, astfel câmpul luminos nu lovește fiecare diafragmă prezentă [1].

Tabelul 1. Compararea componentelor și a sistemelor celor două acceleratoare

	ELEKTA	SIEMENS
Nr. lamele	160 MLC 5mm lățime	160 MLC 5mm lățime
Energii	Fotoni 6 MV 15 MV / Electroni 6 MeV 8 MeV 9MeV 12MeV 15 MeV	Fotoni 6 MV 15MV / Electroni 6 MeV 8 MeV 9 MeV 12 MeV 15 MeV
Deschiderea maximă a câmpului	40x40 cm^2	40x40 cm^2
MLC	Sistem Agility Transmisie lamelară <0.5% Viteza maximă a lamelei: 3.5 cm/s (6.5 cm/s cu leaf guide)	Sistem standard Transmisie lamelară <0.75% Viteza maximă a lamelei: 4 cm/s
Operarea masei de tratament	Mișcările sunt coordonate direct din sistemul Mosaiq iar masa se mută automat cu ajutorul consolei de comandă sau a telecomenzii	Mutarea manuală cu ajutorul telecomenzii, mișcare pe coordonate standard

În concluzie acceleratoarele Siemens și Elekta au unele asemănări precum numărul lamelelor, energiile cu care efectuează planurile de tratament, deschiderea maximă a câmpului de 40x40 cm^2, dar și diferențe în sistemul de acționare a MLC-urilor, având o transmisie lamelară și viteză diferită cât și diferența ușurinței operării masei de tratament (tabelul 1). Însă este important de precizat faptul că acceleratorul Siemens este semnificativ mai vechi comparativ cu cel Elekta, având astfel un dezavantaj din punct de vedere al tehnologiei pe care îl deține. Spre deosebire de prezența acestei diferențe, ambele acceleratoarele performează eficient fiind utilizate în același institut pentru tratarea pacienților.

COMPARAȚIE ÎNTRE PROPRIETĂȚILE FASCICULELOR DE RADIAȚIE PRODUSE DE SIEMENS ȘI ELEKTA

Dozimetria absolută constă în măsurarea directă a unei cantități de radiație în condiții standard cu ajutorul unui instrument metrologic de o calitate foarte înaltă al acurateței, care permite determinarea valorii câmpului de radiație examinat.[2]

Cantitățile principale măsurate de doza absolută sunt expunerea (X), KERMA (K) aerului și doza absorbită de aer și de apă. Toate aceste măsurători sunt făcute luând în considerare procesele de interacțiune dintre fasciculul de radiație și detector pe parcursul procedurii de măsurare, eliminându-se astfel chiar și cea mai mică incertitudine asupra dozei livrate.[2]

În mediile clinice în care este prezentă radioterapia, se efectuează diferite măsurători în condiții de non-referință unde utilizarea coeficientului de calibrare (y) nu este necesară. Aceste măsurători se numesc relative, și sunt reprezentate de: dozimetria altor câmpuri de radiație (valorile măsurate sunt comparate cu câmpul de referință, factori de output), factorul pentru filtrul wedge (raportul dintre citirile efectuate cu și fără filtru pe aceeași geometrie), măsurători ale dozei de adâncime (normalizate la valorile obținute la punctul de doză maximă pentru același câmp de radiație specific și tipul de fascicul).[2]

În aceste cazuri, există o varietate de detectoare care pot fi utilizate fără a compromite faptul că valorile lor sunt legate de valoarea reală a cantității. De exemplu: diode, TLD-uri, micro-camere, matrice de detectoare, alanina, film fotografic, MOSFET (tranzistor metal-oxid-siliciu cu efect de câmp) printre altele, fiecare dintre aceste detectoare având caracteristici diferite, ca de exemplu: sensibilitate, repetabilitate pe termen scurt, stabilitate pe termen lung, angularitate, debitul de doză și dependența de energie, dimensiunea detectorului, scurgerile de radiație, estomparea semnalului care trebuie de asemenea luată în considerare.[3]

În următoarele tabele sunt expuse Buletinele de verificare ale dozimetriei pentru acceleratoarele liniare ELEKTA (tabelul 2) și SIEMENS ARTISTE (tabelul 3), raportul fiind focalizat pe dozimetria absolută a acestor acceleratoare.

Acest raport este realizat luând în calcul mai mulți factori precum: Denumirea operațiilor, Condițiile de lucru, Valoarea impusă, Valoarea măsurată și Valoarea calculată, scopul acestuia fiind verificarea completă a funcționării corespunzătoare a acceleratorului liniar în cauză.

Denumirea operațiilor constă in precizarea operațiilor (Debitul dozei, Energia fotonilor și a electronilor, Planeitatea, Simetria, Dimensiunea câmpurilor X și Y, Penumbra, MLC-uri etc) care sunt calculate, fiind precizată și energia folosită (6 MV, 15MV, 6MeV, 8MeV, 9MeV, 12MeV, 15MeV) dar și valoarea factorului de corecție al calității fasciculului (Kq).

Este esențială prezentarea condițiilor de lucru în care s-a efectuat calculul valorilor obținute, precizând numărul unitaților de monitor (MU), acestea reprezentând:

Factorul de corecție a calității fasciculului (K_q), are rolul de a corecta diferența pentru rezultatul oferit de camera de ionizare din comparația calității fasciculului de referință și cea clinică, fiind o parte integrantă a dozimetriei radioterapiei. Incertitudinea pentru K_q este una dintre cele mai semnificative surse de incertitudine în determinarea dozei.[3]

În aceste două rapoarte de verificare camera monitorului citește 100 MU pentru fiecare măsurătoare, însemnând că doza absorbită de 1 Gy este livrată într-un punct la adâncimea dozei maxime într-un fantom de apă a cărui suprafață se află în izocentrul acceleratorului (SSD=100 cm) cu o dimensiune a câmpului la suprafață de 10x10 cm.

Valoarea impusă reprezintă un număr aproximativ în care numărul valorii calculate să fie încadrat pentru a respecta normele impuse pentru funcționarea corectă a acceleratorului și a asigura siguranța personalului cât și al pacienților prezenți in mediul clinic.

Valoarea măsurată este compusă din 4 măsurători diferite (M1, M2, M3, M4) pentru a asigura o acuratețe cât mai mare dar și pentru a reduce riscul unei posibile erori ce poate avea loc în cazul unei defecțiuni al aparaturii folosite.

Valoarea calculată (D) reprezintă produsul dintre valoarea măsurată (M) și factorul de corecție al calității fasciculului (K_q), acesta fiind rezultatul final al măsurătorilor. În cazul în care această valoare nu se află în parametrii indicați de către valoarea impusă, se denotă existența unei probleme a acceleratorului fiind necesară reluarea măsurătorilor până la obținerea unei valori satisfăcătoare condiției impuse.

<u>Exemplu</u>:
În aceste exemple au fost incluse măsurători ale dozei provenite de la un fascicul fotonic de energie 6 MV în cazul ambelor acceleratoare.

<u>Acceleratorul Siemens Artiste</u>

(1) K_q=0.99 Valoare impusă D=1.000+/-2%

M1=1.004 ; M2=1.004 ; M3=1.005 ; M4=1.004

M=M1+M2+M3+M4= $\frac{M1+M2+M3+M4}{4} = \frac{4.017}{4}$ =1.004

D= M*K_q = 1.004*0.99 = 0.994

0.980<0.994<1.020 => rezultatul valorii obținute satisface condiția dată de valoarea impusă

<u>Acceleratorul Elekta</u>

(2) K_q=0.99 Valoare impusă D=1000+/-2%

M1=1.002 ; M2=1.002 ; M3=1.002 ; M4=1.002

M=M1+M2+M3+M4=$\frac{M1+M2+M3+M4}{4} = \frac{4.008}{4} = 1.002$

D=M*K_q = 1.004*0.99 = 0.991

0.980<0.991<1.020 => rezultatul valorii obținute satisface condiția dată de valoarea impusă.

Tabelul 2. Dozimetria absolută pentru acceleratorul Siemens Artiste

Nr.	DENUMIREA OPERAȚIILOR	CONDIȚII DE LUCRU	VALOARE IMPUSĂ	VALOARE MASURATĂ	VALOARE CALCULATĂ (D=M*Kq)
DOZIMETRIE ABSOLUTĂ					
1	DEBITUL DOZEI 6 MV K_q=0.99	100 MU 10x10 SSD=98.5cm 1.5cm	D=1.000+/-2%	M1=1,004	D=0,994
				M2=1,004	
				M3=1,005	
				M4=1,004	
2	DEBITUL DOZEI 15MV K_q=0.972	100MU 10x10 SSD=97cm 3cm	D=1.000+/-2%	M1=1,026	D=0,997
				M2=1,025	
				M3=1,025	
				M4=1,025	
3	DEBITUL DOZEI 6 MeV K_q=0.942	100MU Aplicator 15 SSD=100 cm 1.27 cm	D=1.000+/-3%	M1=1,069	D=1,008
				M2=1,070	
				M3=1,070	
				M4=1,070	
4	DEBITUL DOZEI 8 MeV K_q=0.931	100 MU Aplicator 15 SSD=100 cm 1.73 cm	D=1.000+/-3%	M1=1,074	D=1,001
				M2=1,073	
				M3=1,074	
				M4=1,076	
	DEBITUL DOZEI 9 MeV	100MU Aplicator 15		M1=1,075	
				M2=1,077	

5	K_q=0.927	SSD=100 cm 1.94 cm	D=1000+/-3%	M3=1,074 M4=1,075	D=0,997
6	DEBITUL DOZEI 12 MeV K_q=0.916	100 MU Aplicator 15 SSD=100 cm 2.67 cm	D=1.000+/-3%	M1=1,093 M2=1,093 M3=1,092 M4=1,091	D=1,001
7	DEBITUL DOZEI 15 MeV K_q=0.906	100 MU Aplicator 15 SSD=100 cm 3.45 cm	D=1.000+/-3%	M1=1,103 M2=1,103 M3=1,106 M4=1,104	D=1,000

În privința dozimetriei relative a acceleratorului Siemens, toate testele au fost realizate cu succes și încadrate în corespondență cu normele impuse cu excepția testării energiei de electroni, unde a avut loc o contaminare cu raze X cu aplicatorul 15 la un SSD de 100 cm, în cazul energiei electronice de 15 MeV norma impusă de maximum 3.0% fiind depășită cu 0,39%.

Deși condiția impusă a fost depășită cu o valoare foarte mică fiind chiar marginală, siguranța personalului cât și a pacientului este esențială fiind nevoie de o verificare și recalibrare continuă până la încadrarea valorii în condiția de siguranță și protecție impusă. Astfel de probleme pot interveni oricând, iar în cazul acestui accelerator mici probleme sunt de așteptat din cauza vechimii pe care o are, de aceea este vitală verificarea constantă a funcționării corecte a acceleratoarelor.

Tabelul 3. Dozimetria absolută a acceleratorului Elekta

Nr.	**DENUMIREA OPERAȚIILOR**	**CONDIȚII DE LUCRU**	**VALOARE IMPUSĂ**	**VALOARE MASURATĂ**	**VALOARE CALCULATĂ (D=M*Kq)**
		DOZIMETRIE ABSOLUTĂ			
1	DEBITUL DOZEI 6 MV K_q=0.99	100 MU 10x10 SSD=90 cm 10 cm	D=1.000+/-2%	M1=1,002 M2=1,002 M3=1,002 M4=1,002	D=0,991
2	DEBITUL DOZEI 15MV K_q=0.972	100MU 10x10 SSD=90 cm 10 cm	D=1.000+/-2%	M1=1,024 M2=1,024 M3=1,024 M4=1,024	D=0,995
3	DEBITUL DOZEI 6 MeV K_q=0.942	100MU Aplicator 10 SSD=100 cm 1.40 cm	D=1.000+/-3%	M1=1,070 M2=1,070 M3=1,070 M4=1,070	D=1,007
4	DEBITUL DOZEI 8 MeV K_q=0.931	100 MU Aplicator 10 SSD=100 cm 1.80 cm	D=1.000+/-3%	M1=1,070 M2=1,070 M3=1,070 M4=1,070	D=0,996
5	DEBITUL DOZEI 9 MeV K_q=0.927	100MU Aplicator 10 SSD=100 cm 2.00 cm	D=1000+/-3%	M1=1,079 M2=1,078 M3=1,078 M4=1,078	D=0,999
6	DEBITUL DOZEI 12 MeV K_q=0.916	100 MU Aplicator 10 SSD=100 cm 2.50 cm	D=1.000+/-3%	M1=1,091 M2=1,091 M3=1,091 M4=1,091	D=0,999
7	DEBITUL DOZEI 15 MeV K_q=0.906	100 MU Aplicator 10 SSD=100 cm 2.70 cm	D=1.000+/-3%	M1=1,102 M2=1,103 M3=1,102 M4=1,102	D=0,998

Toate valorile măsurate în cadrul dozimetriei absolute (tabelul 3) se încadrează în cerințele expuse pentru asigurarea funcționării corecte a acceleratorului liniar Elekta, fiecare testare având loc cu succes pentru energiile fotonice și electronice folosite în aplicarea planurilor de tratament.

În cazul dozimetriei relative rezultatele testelor realizate s-au încadrat în valorile impuse normei de funcționare corectă a acceleratorului, rezultatele între cele două acceleratoare fiind asemănătoare. Deși în cazul acestor testări nu a avut loc o contaminare comparativ cu acceleratorul Siemens, este important de menționat faptul că acceleratorul Elekta este semnificativ mai nou și performant fiind astfel mai puțin susceptibil la apariția unor astfel de probleme și erori.

BIBLIOGRAFIE

[1] Van Battum, L.J., Van der Zee, W., Huizenga, H. (2003). Scattered radiation from applicators in clinical electron beams. Phys Med Biol.Vol.48(15), pp.2493-507.

[2] De Almeida, Salata, C. (2021). Absolute, reference, and relative dosimetry in radiotherapy. Intech open.

[3] Tikkanen, J., Zink, K., Pimpinella, et all (2020). Calculated beam quality correction factors for ionization chambers in MV photon beams. Phys Med Biol.Vol.65, pp.075003.

STUDIUL DERIVABILITĂȚII ÎN R^n

Constantin ALEXE

Student anul III, Matematică, Facultatea de Informatică și Științe, Universitatea din Oradea
alexeconstantin27@gmail.com

Rezumat: *In aceasta lucrare se prezinta principalele aspect legate de functii, limite si continuitate, pe de-o parte , precum si aplicatiile acestora in studiul interdependentei fenomenelor din natura. Totodata, materialul cuprinde si studiul derivabilitatii functiilor.*

Cuvinte cheie: limită, derivată

Definitia 1. Fie f o functie definite pe X $\subseteq$ R ,cu valori in R, f : X $\to$ R, $\boldsymbol{x_0}$ un punct de acumulare al multimii X. Se spune ca un numar $\boldsymbol{y_0} \in$ R este limita functiei f in punctul $\boldsymbol{x_0}$ daca pentru orice vecinatate U a lui $\boldsymbol{y_0}$ exista o vecinatate V a lui $\boldsymbol{x_0}$ astfel incat, oricare ar fi x $\neq \mathbf{x_0}$ din V $\cap$ X, sa avem f (x) $\in$ U si se scrie $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$

Se citeste " limita lui f (x) cand x tinde catre x_0 este egale cu y_0"

Observatii

1) Punctul x_0 nu este necesar sa apartina multimii de definitie X.Trebuie sa fie insa **punct de acumulare** al multimii de definitie. Daca x_0 este un punct exterior sau punct izolat al multimii X, problema existentei limitei functiei in punctul x_0 nu are sens, deoarece, in acest caz, V $\cap$ X – { x_0 } = 0.
2) Atat numarul x_0 cat si numarul y_0 pot fi finite sau infinite, vecinatatile V si U fiind definite corespunzator.
3) Numarul y_0 nu este totdeauna valoarea functiei in punctul x_0, f(x_0). Din definitie rezulta ca x_0 poate sa nu **apartina** domeniului de definitie. In procesul de trecere la limita ne intereseaza **comportarea functiei** in jurul lui x_0 si **nu** in punctul x_0; prin urmare, trebuie sa existe x $\neq x_0$ oricat de vecine de x_0, de unde urmeaza ca x_0 trebuie sa fie punct de acumulare al multimii de definitie.

Exemplu

Sa se calculeze $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ pentru f (x) = $\sqrt{1 - x^2}$, 0 $\leq$ x $\leq$ 1 si

$x_0 = \frac{1}{2}$, x_0 = 1 , x_0 = 2

a) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

b) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = 0$;

c) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x)$ nu are sens, deoarece functia nu este definite pe x >1 ;

d) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

Nu are sens, deoarece in vecinatatea lui 2 functia nu este definita.

Definitia2. Fie f : X $\to$R si $\mathbf{x_0}$ un punct de acumulare a lui X. Se spune ca f (x) are limita $\mathbf{y_0}$ in punctul $\mathbf{x_0}$.

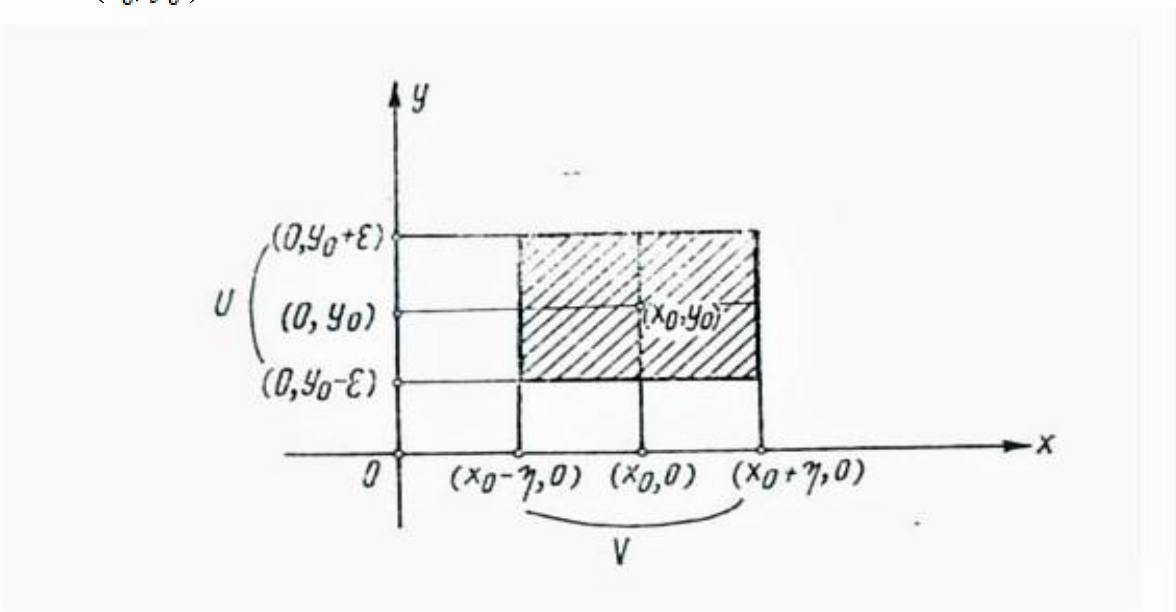
Daca pentru orice $\boldsymbol{\varepsilon} > 0$ exista un numar $\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\varepsilon}) > 0$ astfel incat sa avem

$|f(x) - \mathbf{y_0}| < \boldsymbol{\varepsilon}$ pentru orice $|x - \mathbf{x_0}| < \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\varepsilon})$, x $\in$ X.

Numerele x_0 si $y_0$sunt considerate finite.

Observatii

1) Definitia 2 , numita si definitia cu ajutorul lui ε , este de fapt echivalenta cu definitia cu ajutorul vecinatatilor, daca x_0 si y_0 sunt finite, deoarece vecinatatile U si V sunt inlocuite cu **vecinatatile simetrice** $|f(x) - y_0| < \varepsilon$ si $|x - x_0| < \eta(\varepsilon)$,respectiv.
2) Numarul η depinde de , din care cauza scriem $\eta(\varepsilon)$,dupa cum si vecinatatea V depinde de U.
3) O imagine geometrica a definitiei 2 este cea din figura de mai jos.
   Daca luam pe axa Oy intervalul ($y_0 - \varepsilon$, $y_0 + \varepsilon$) , $\varepsilon > 0$ fiind dat, putem gasi un interval pe axa Ox ($x_0 - \eta$, $x_0 + \eta$) sa existe y = f (x) cu y ∈ ($y_0 - \varepsilon$, $y_0 + \varepsilon$) , adica punctul M (x,y) sa se gaseasca in dreptunghiul hasurat, de laturi 2 ε si 2 η , cu central in punctul
   (x_0, y_0).



Exemplu

$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{x} = \frac{1}{x_0}$, $x_0 \neq 0$.

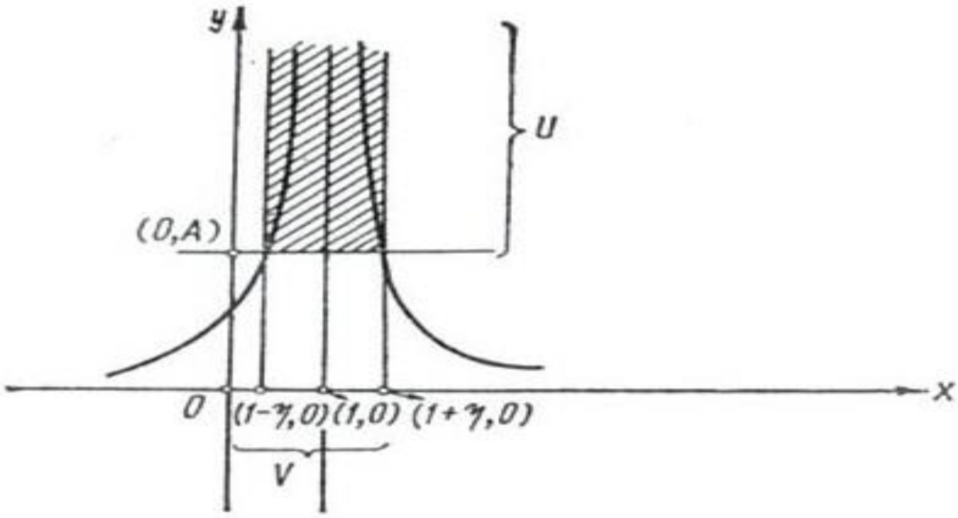
Pentru cazul cand unul sau amandoua numerele x_0 si y_0 nu sunt finite, avem urmatoarele definitii :

1) Functia f (x) are limita + ∞ in punctul x_0 finit daca pentru orice numar A exista un numar η (A) > 0 astfel incat sa avem
   F (x) > A daca $|x - x_0| < \eta(A)$ si se scrie $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$.

Exemplu

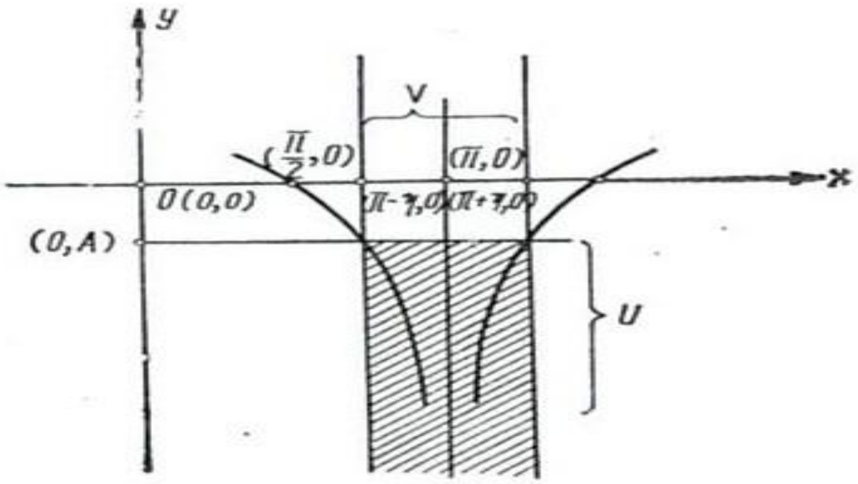
$\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$. Punctul (x, f (x)) se gaseste in domeniul hasurat

2) Functia f (x) are limita - ∞ in punctul x_0 daca pentru orice numar A exista un numar η(A)>0 astfel incat sa avem f (x) < A, daca $|x - x_0| < \eta(A)$ si se scrie $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$



Exemplu

$\lim\limits_{x\to\pi} \ln(1+\cos x)$) se gaseste in domeniul hasurat din Figura de mai jos.



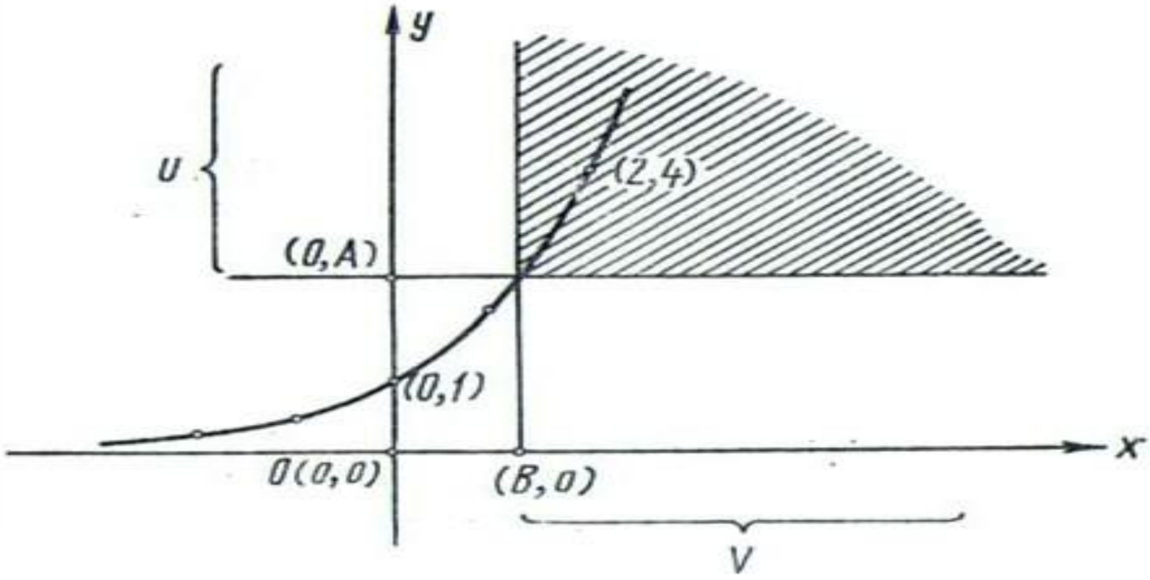
3) Functia y = f (x) are limita + ∞ cand x →+ ∞

Daca pentru orice numar A exista un numar B (A) astfel incat sa avem f (x) > A daca x > B (A) si se scrie $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Exemplu

$\lim\limits_{x\to+\infty} 2^x = +\infty$.

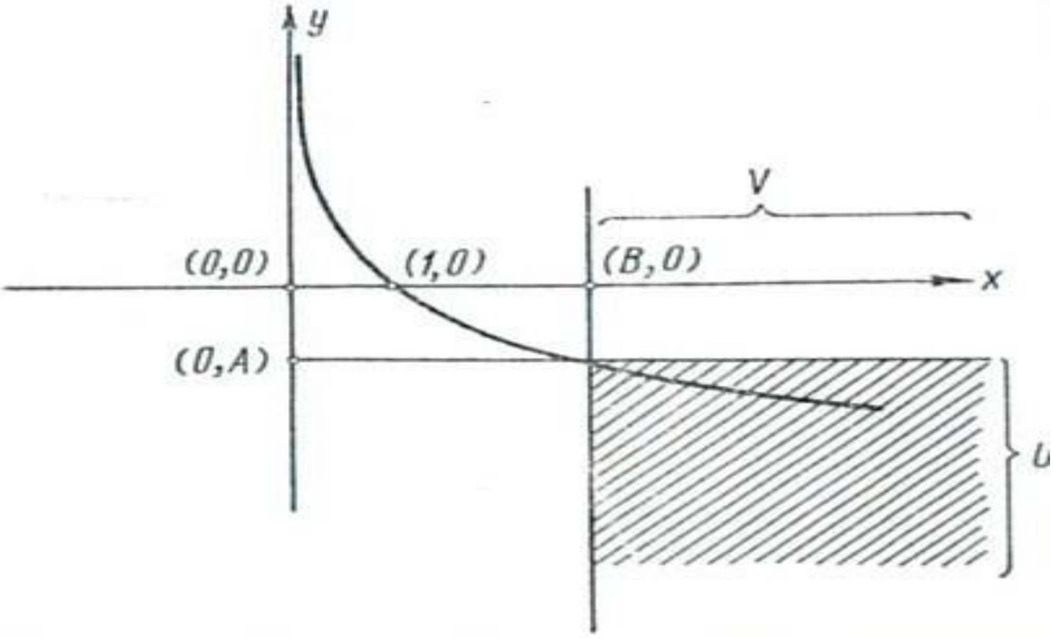
Punctul (x , 2^x) , x > B (A) , f (x) > A , se gaseste in domeniul hasurat din figură



4) Functia f (x) are limita - ∞ cand x →+ ∞ daca pentru orice numar A exista un numar B (A) astfel incat sa avem f (x) < A daca x > B (A) si se scrie $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ = - ∞

Exemplu

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\frac{1}{x}$ = - ∞.In acest exemplu, B (A) = e^{-A}.



5) Functia f(x) are limita + ∞ cand x → - ∞ daca pentru orice numar A exista un numar B(A) astfel incat sa avem f (x) > A daca x < B(A)
si se scrie $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ = + ∞

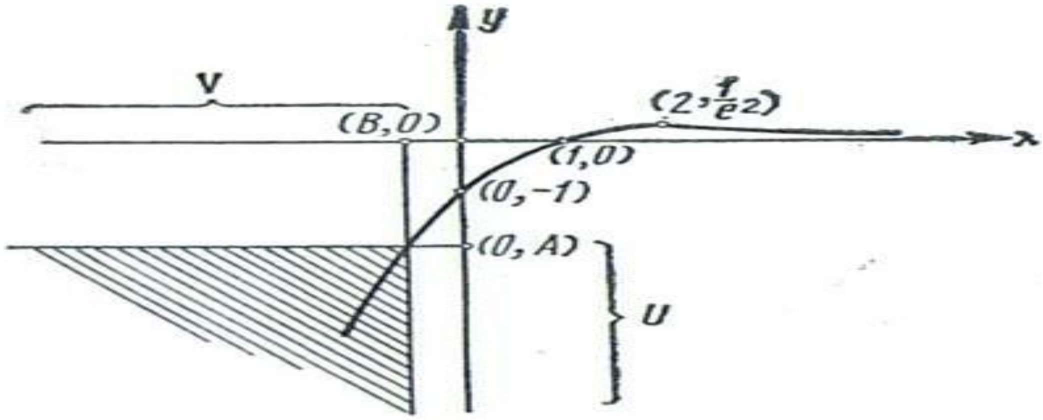
Exemplu

$\lim\limits_{x \to -\infty} a^{-x}$ = + ∞ daca a > 1

6) Functia f (x) are limita - ∞ cand x → - ∞ daca pentru orice numar A exista un numar B(A) astfel incat sa avem f (x) < A daca x < B (A) si se scrie $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Exemplu

$\lim\limits_{x\to-\infty} (x-1)e^{-x} = -\infty$. In regiunea hasurata f (x) < A , x < B (A).

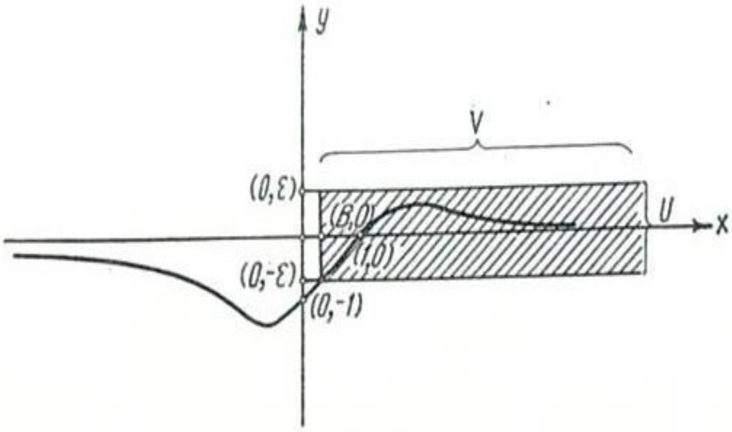


7) Functia f (x) are limita y_0 (finita) cand x →+ ∞ daca pentru orice numar $\varepsilon > 0$ exista un numar B (ε) astfel incat sa avem

| f (x) - y_0 | < ε daca x > B (ε) si se scrie $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = y_0$

Exemplu

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-1}{x^2+1}$ = 0. In domeniul hasurat | f (x) < ε, x > B (ε) .



8)Functia f (x) are limita y_0 cand x → - ∞ daca pentru orice $\varepsilon > 0$ exista un numar B (ε) astfel incat sa avem

| f (x) - y_0 | < ε daca x < B (ε) si se scrie $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = y_0$

Exemplu

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$

Observatie

Sirurile numerice sunt functii cu domeniul de definitie multimea numerelor naturale N. Definitiile 3, 4, 7 cuprind drept cazuri particulare limitele de siruri si anume 3 si 4 cand sirurile sunt divergente si 7 cand sirurile sunt convergente.

Definitia 3 . Se spune ca functia f : X → R are limita $\mathbf{y_0}$ (finite sau infinita) in punctul $\mathbf{x_0}$ (punct de acumulare al lui X) daca pentru orice sir ($\mathbf{x_n}$) convergent catre $\mathbf{x_0}$ ($\mathbf{x_n} \in X$, $\mathbf{x_n} \neq \mathbf{x_0}$)
sirul valorilor (f ($\mathbf{x_n}$)) este convergent catre $\mathbf{y_0}$.

Definitia data se numeste **definitia limitei cu siruri.**

Sa aratam ca definitia cu ajutorul sirurilor este echivalenta cu definitia I cu ajutorul vecinatatilor.

Sa presupunem ca $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$, deci pentru orice vecinatate U a lui y_0 exista o vecinatate V a lui x_0 astfel incat, daca $x \in V$, $f(x) \in U$; sirul (oarecare) (x_n) fiind convergent catre x_0 si $x_n \in X$ exista un numar N astfel incat pentru n > N, $x_n \in V \cap X$, deci $f(x_n) \in U$ pentru n > N, adica $f(x_n) \to y_0$.

Reciproc, sa presupunem ca pentru toate sirurile $x_n \to x_0$ ($x_n \in X$, $x_n \neq x_0$) sirurile corespunzatoare ale valorilor f (x_n) au limita comuna y_0 si sa presupunem prin absurd y_0 nu este limita functiei in punctul x_0 ; aceasta inseamna ca exista o vecinatate U_0 a lui y_0 cu proprietatea ca , oricare ar fi vecinatatea V a lui x_0, exista un punct $\xi \neq x_0$, $\xi \in V \cap X$, astfel incat $f(\xi) \notin U_0$. Sa luam un sir de vecinatati (V_n) de forma $V_n = (x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n})$, $n \in N$, x_0 finit.

In vecinatatea V_n exista $\xi_n \in V_n \cap X$ astfel incat $f(\xi_n) \notin U_0$.

Insa sirul $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ este convergent catre x_0 , deoarece $|\xi_n - x_0| < \frac{1}{n}$.

Conform ipotezei $f(\xi_n) \to y_0$, deci in vecinatatea lui U_0 se gasesc toti termenii sirului $f(\xi_n)$, cu exceptia unui numar finit,, ceea ce este in contradictie cu $f(\xi_n) \notin U_0$, pentru orice n > N .

Prin urmare , $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$.

Observatie

1) Daca $x_0$nu este finit se ia $V_n = (n, +\infty)$, daca $x_0 = +\infty$, sau $V_n = (-\infty, -n)$, daca $x_0 = -\infty$, si rationamentul se continua in acelasi mod ; neegalitatile $|\xi_n - x_0| < \frac{1}{n}$ se transforma in $\xi_n > n$ sau $\xi_n < -n$, respective.
2) Daca cel putin pentru un sir $x_n \to x_0$ ($x_n \in X$, $x_n \neq x_0$) sirurile valorilor f (x_n) nu au limita, rezulta ca functia f (x) nu are limita in punctul x_0.
3) Daca pentru doua siruri $x'_n \to x_0$, $x''_n \to x_0$ (x” , $x'_n \in X$, x''_n, $x'_n \neq x_0$) limitele sirurilor f (x_n) si f (x''_n) exista , insa sunt diferite, spunem ca functia f (x) nu are limita in punctul x_0.

Exemplu

Functia $\sin\frac{1}{x}$ nu are limita in punctul $x_0 = 0$. Intr –adevar, pentru sirul $x'_n = \frac{1}{2n\pi}$, $n \in N$, sirul valorilor f (x'_n) = $\sin(2n\pi)$ este 0, 0, 0, …, 0,… deci are limita zero, in timp ce pentru sirul $x''_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$, $n \in N$, sirul valorilor f (x''_n) = $\sin(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)$ este 1, 1, 1, …, 1,… deci are limita numarul 1.

BIBLIOGRAFIE

[1] Rosculet,M. (1957). Analiza matematica, vol 1 si 2. Editura Didactica si Pedagogica , Bucuresti
[2] Siretchi, G. (1985). Calculul diferential si integral , vol.1 si 2. Editura Stiintifica si Enciclopedica , Bucuresti
[3] Marinescu, G. (1983). Tratat de analiza matematica, vol.1 .Editura Academiei, Bucuresti
[4] Niculescu, M., Dinculeanu, N., Marcus, S. (1971). Analiza matematica vol. 1 si 2 , Editura Didactica si Pedagogica , Bucuresti
[5] Colojoara, I. (1983).Analiza matematica , Editura Didactica si Pedagogica, Bucuresti

APLICAȚII ALE GEOMETRIEI SFERICE ÎN ASTRONOMIE

Ioana – Ana ARDELEAN (ȚÎRTEA)

Școala Gimnazială „Puiu Sever” Ineu, jud. Bihor, profesor de matematică,
tioanaana@yahoo.com

Rezumat: *Matematica este un limbaj universal, care explică în general, sub formă abstractă starea de existență a obiectelor și evoluția fenomenelor cunoscute din Univers. Printre cele mai importante structuri investigate de către matematică îl constituie astronomia. Pentru calculele astronomice este importantă cunoașterea formulele fundamentale ale trigonometriei sferice, formulele lui Gauss. Aceste formule corespund într-o anumită măsură relațiilor trigonometrice ce determină triunghiurile plane cum sunt teorema sinusurilor sau teorema cosinusului. În această lucrare sunt prezentate aplicații ale trigonometriei sferice în astronomie.*

Cuvinte cheie: triunghi geodezic, coordonate

1. Laturile unui triunghi geodezic exprimate liniar și unghiular

Dacă R este raza unui cerc și α numărul de radiani al unui arc al acelui cerc, atunci lungimea arcului este

$$\mathbf{1=R\,\alpha} \qquad (1.1)$$

Pentru a găsi lungimea arcului de $1''$ să notăm cu ω numărul de radiani al unei secunde.Valoarea lui ω se obține prin regula de trei simplă .

La 180x60x60 secunde corespunde π rad.

$$1''\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \omega rad$$

de unde

$$\omega = \frac{\pi}{180\cdot 60\cdot 60} = \frac{1}{\frac{684000}{3{,}14159}} = \frac{1}{206\,265}$$

Deoarece unghiul de $1''$ este foarte mic, valoarea lui în radiani (ω) poate fi înlocuită prin sinusul unghiului .

$$\omega \cong \sin 1'' \cong \frac{1}{206265} \qquad (1.2)$$

Rezultă că lungimea arcului de $1''$ este

$$l_0 = R\omega \cong \frac{R}{206265} \qquad (1.3)$$

Dacă lungimea unei laturi a triunghiului lui sferic o notăm cu a_m și măsura aceleeași laturi în secunde prin a'' atunci

$$a_m = a''R\omega \cong a''\frac{R}{206265} \qquad (1.4)$$

Unitățile în care se obține a_m sunt aceleași ca și unitățile în care se măsoară R.

Dacă se cunoaște lungimea unei laturi, din (1.4) se deduce măsurarea ei în secunde.

$$a'' = \frac{a_m}{R\omega} \cong \frac{206265\, a_m}{R} \qquad (1.5)$$

Când măsurătorile se fac pe suprafața Pământului (geodezice) și se ia ca lungime a meridianului 40 000 km atunci lungimea arcului de o secundă se calculează împărțind lungimea meridianului la numărul de secunde ale unui cerc.

$$R\omega = \frac{40000000}{360\times 60\times 60}m = \frac{10000}{324}\ m \qquad (1.6)$$

Lungimea laturii „*a*„ a unui triunghi sferic de pe suprafața Pământului este

$$a_m = a''\cdot\frac{10000}{324}\ m \qquad (1.7)$$

și reciproc, măsurarea ei în secunde

$$a'' = a_m \frac{324}{10000}$$

Știind că mila marină corespunde arcului de un minut, din (1.7) rezultă

1 milă marină $=60'' \times \frac{10000}{324}$=1851,85m$\cong 1852m.$ [1]

2. Distanța dintre două puncte de pe suprafața Pământului când se cunosc coordonatele lor geografice

Fie T centrul Pământului, pp$'$ axa polilor și qq$'$ - ecuatorul terestru. Considerăm două puncte de pe suprafața terestră dată prin coordonatele lor geografice $O_1(L_1, \varphi_1), O_2(L_2, \varphi_2)$(Fig.1.1).

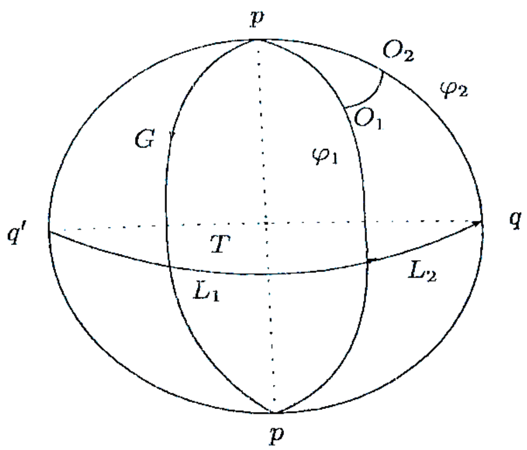


Fig.1.1

În triunghiul sferic p O_1 O_2, în care:

$$\hat{p} = L_2 - L_1, \ pO_1 = 90^\circ - \varphi_1, \ pO_2 = 90^\circ - \varphi_2$$

Aplicăm formula lui Gauss pentru latura O_1 O_2 pe care dorim să o determinăm

$$\cos(arcO_1O_2) = \cos(90^\circ - \varphi_1)\cos(90^\circ - \varphi_2) + \sin(90^\circ - \varphi_1)\sin(90^\circ - \varphi_2)\cos(L_2 - L_1)$$

sau

$$\cos(arcO_1O_2) = \sin\varphi_1 sin\varphi_2 + \cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos(L_2 - L_1)$$

de unde

$$\text{arc}O_1O_2 = arccos[\sin\varphi_1 sin\varphi_2 + \cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos(L_2 - L_1)]$$

3. Aria triunghiului format de trei puncte situate pe suprafața Pământului când se cunosc coordonatele lor geografice.

În cazul unui triunghi sferic de pe suprafața Pământului (triunghiul geodezic) determinat de trei puncte date prin coordonate geografice A(L_1, φ_1); B(L_2, φ_2); C(L_3, φ_3), se consideră că meridianul ce trece prin punctul C este situat în intervalul fusului sferic ce conține pe A și B (Fig.1.2).

În triunghiurile PAB, PBC, PCA se cunosc câte două laturi și unghiul cuprins între ele .

Spre exemplu, în triunghiul sferic PAB avem:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Arc(PA)}= 90^\circ - \varphi_1 \\ &\mathrm{Arc(PB)}= 90^\circ - \varphi_2 \\ &\widehat{APB}=L_2 - L_1 \end{aligned} \qquad (1.8)$$

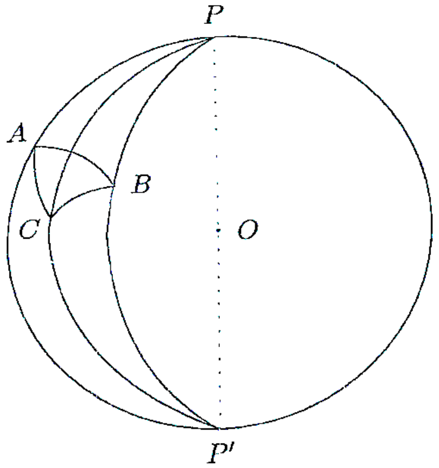


Fig.1.2

Aplicând formula lui Neper în acest triunghi obținem:

$$tg\frac{\widehat{PAB}+\widehat{PBA}}{2} = \frac{\cos\frac{arc(PB)-arc(PA)}{2}}{\cos\frac{arc(PB)+arc(PA)}{2}}\cdot ctg\frac{\widehat{APB}}{2} = \frac{\cos\frac{90^\circ-\varphi_2-90^\circ-\varphi_1}{2}}{\cos\frac{90^\circ-\varphi_2-90^\circ-\varphi_1}{2}}\, ctg\,\frac{L_2-L_1}{2}$$

Deoarece în membrul drept toate mărimile sunt cunoscute rezultă:

$$\frac{\widehat{PAB}+\widehat{PBA}}{2} = \gamma, cunoscut \qquad (1.9)$$

În mod analog, din triunghiul PBC și PAC se obțin respectiv:

$$\frac{\widehat{PBC}+\widehat{PCA}}{2} = \alpha \qquad (1.10)$$

$$\frac{PCA+\widehat{PAC}}{2} = \beta \qquad (1.11)$$

Adunând membru cu membru egalitățile (1.10) și (1.11) și scăzând (1.9) avem:

$$\frac{(\widehat{PBC}-\widehat{PBA})+(\widehat{PAC}-\widehat{PAB})+(\widehat{PCA}+\widehat{PCB})}{2} = \alpha + \beta - \gamma$$

În figura 1.2 se observă că

$$\widehat{PAC} - \widehat{PAB}=\mathrm{A}\,,$$
$$\widehat{PCB} - \widehat{PBA}=\mathrm{B}\,,$$
$$\widehat{PCA} + \widehat{PCB}=\mathrm{C}\,,$$

Unde A, B, C sunt unghiurile triunghiului sferic ABC. [2]

Deci,

$$\frac{A+B+C}{2} =\alpha + \beta - \gamma$$

sau

$$\mathrm{A+B+C}=2(\alpha + \beta - \gamma),$$

de unde

$$\mathrm{A+B+C}-180^\circ=2(\alpha + \beta - \gamma)-180^\circ,$$

care este tocmai valoarea excesului sferic

$$\varepsilon =2(\alpha + \beta - \gamma)-180^\circ, \qquad (1.12)$$

Având în vedere excesul sferic ε și cunoscând raza Pământului

$S_{ABC} = \varepsilon R^2$ sau $S_{ABC} = \frac{\pi R^2}{180^\circ}\cdot\varepsilon$

ne dă aria triunghiului geodezic ABC:

$$s_{ABC} = \frac{\pi R^2}{180^\circ} \cdot \varepsilon$$

4 Aplicații

1. Să se determine distanța dintre Iași (27°35'20''E,47°09'44''N), și Pașcani (26°43'38''E,47°14'58''N).

Soluție :

Notăm: longitudinea $=L$

Latitudinea $= \varphi$

$L_I = 27^\circ 35'20'' = 27{,}5888^\circ$

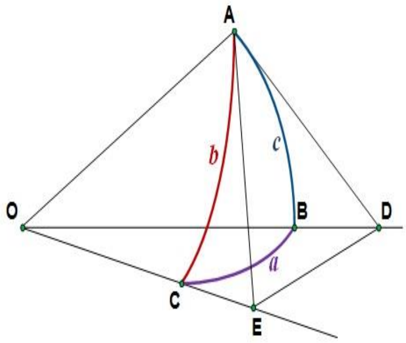
$\varphi_I = 47^\circ 09'44'' = 47{,}1622^\circ$

$L_P = 26^\circ 43'38'' = 26{,}7271^\circ$

$\varphi_P = 47^\circ 14'58'' = 47{,}2494^\circ$

Vom aplica teorema cosinusului laturii triunghiului sferic:

$\cos a = \cos c \cdot \cos b + \sin c \sin b \cos A$



$$\cos(arc(PI)) = \cos(90^\circ - \varphi_P)\cos(90^\circ - \varphi_I) + \sin(90^\circ - \varphi_P)\sin(90^\circ - \varphi_I)\cos(L_I - L_P)$$

=sin

$\varphi_P \cdot sin\varphi_I + cos\varphi_P \cdot cos\varphi_I \cos(L_I - L_P) = 0{,}7343 \cdot 0{,}7332 + 0{,}6788 \cdot 0{,}6799 \cdot 0{,}9998 = 0{,}5383 + 0{,}4614 = 0{,}9997$

m(arc(PI))=arccos(0,9997)=0,58989°

Raza Pământului: R$\cong 6371\ km$

IP$= \frac{2\pi R}{360^\circ} \cdot 0{,}58989 = 65{,}592775 \cong 65{,}59\ km$

2. Să se calculeze perimetrul și aria triunghiului Bermudelor.

Miami: 25°48'47'' N, 80°08'03'' V;

***San Juan: 18°27'00'' N,* 66°04′00′′ V;**

***Bermuda:* 32°17′35′′ N, 64°46′55′′ V**

Miami: $M_1(L_1 = 80^\circ 08'03'' = -80{,}134167^\circ$

$\varphi_I = 25^\circ 48'47'' = 25{,}813056^\circ)$

San Juan: $M_2(L_2 = 66^\circ 04'00'' = -66{,}195374^\circ$

$\varphi_2 = 18{,}231960^\circ$

Bermuda: $M_3(L_3 = 64^\circ 46'55'' = -64{,}781944^\circ$

$\varphi_3 = 32^\circ 17'35'' = 32{,}293056^\circ)$

$\cos(arc(M_1M_2))=$

$= \cos(90^\circ - \varphi_1)\cos(90^\circ - \varphi_2) + \sin(90^\circ - \varphi_1)\sin(90^\circ - \varphi_2)\cos(L_2 - L_1)$

=sin $\varphi_1 \cdot sin\varphi_2 + cos\varphi_1 \cdot cos\varphi_2 \cos(L_1 - L_2)$ =0,966082
arc(M_1M_2)=14,965305°; M_1M_2=1664,074636 km

$\cos(arc(M_1M_3))$=

$= \cos(90^\circ - \varphi_1)\cos(90^\circ - \varphi_3) + \sin(90^\circ - \varphi_1)\sin(90^\circ - \varphi_3)\cos(L_1 - L_3)$
=sin $\varphi_1 \cdot sin\varphi_3 + cos\varphi_1 \cdot cos\varphi_3 \cos(L_3 - L_1)$ =0,966457
arc(M_1M_2)=14,881842°; M_1M_2=1654,793926 km

$\cos(arc(M_1M_2))$=

$= \cos(90^\circ - \varphi_2)\cos(90^\circ - \varphi_3) + \sin(90^\circ - \varphi_2)\sin(90^\circ - \varphi_3)\cos(L_3 - L_2)$

=sin $\varphi_2 \cdot sin\varphi_3 + cos\varphi_2 \cdot cos\varphi_3 \cos(L_3 - L_2)$ =0,969794
arc(M_2M_3)=14,118400°; M_2M_3=1569,902608 km

$$\alpha = arctg\left(ctg\frac{L_3 - L_2}{2} \cdot \frac{cos\frac{\varphi_2 - \varphi_3}{2}}{cos\frac{\varphi_2 + \varphi_3}{2}}\right) = 89{,}3560263^\circ$$

$$\beta = arctg\left(ctg\frac{L_3 - L_1}{2} \cdot \frac{cos\frac{\varphi_1 - \varphi_3}{2}}{cos\frac{\varphi_1 + \varphi_3}{2}}\right) = 83{,}2696532^\circ$$

$$\gamma = arctg\left(ctg\frac{L_2 - L_1}{2} \cdot \frac{cos\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}}{cos\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}}\right) = 83{,}525873^\circ$$

$$\varepsilon = 180^\circ - 2(\alpha - \beta + \gamma) = 0{,}7860793^\circ$$

$$s_{M_1M_2\,M_3} = \frac{\pi R^2}{180^\circ} \cdot \varepsilon = 55691\ km^2$$

,

BIBLIOGRAFIE

[1] https://ro.m.wikipedia.org, pp.1
[2] Pȧ,l A. , Ureche, V. (1983). Astronomie, Editura Didactică București, pp.1-5
[3] Ureche V., Universul, (1983). Vol I, Astronomie, Editura Dacia, Cluj-Napoca, pp. 1-5
[4] Pal, A., Pop, V., Ureche, V. (1998). Astronomie, Culegere de probleme, Presa Universitară Clujeană
[5] Pop, V., Pop, D. (2003). Trigonometrie plană și trigonometrie sferică, Presa Universitară Clujeană,

TRASEE METODOLOGICE UTILIZATE ÎN CONSTRUIREA NOŢIUNILOR MATEMATICE

Mirela Ramona BALA [1], Emilia BALA [2]

[1,2] Liceul tehnologic „Felix“ Sânmartin, jud. Bihor, profesor pentru învățământul primar
[1] ramonabala18@yahoo.com, [2] ema_bala@yahoo.com

Rezumat: *Pornind de la creativitate şi modernitate în lumea educaţiei, ne propunem să evidenţiem metode moderne de predare-învăţare-evaluare, prin activităţi flexibile şi trasee metodologice în construirea noţiunilor matematice.*
Cuvinte cheie: exerciții, probleme, jocuri, creativitate.

Un sistem de exerciții și probleme pentru o unitate de învățare în școala primară are o dublă valoare:

- formează reprezentări şi noţiuni matematice;
- fixează, antrenează și dezvoltă competențe matematice specifice Sistemele de exerciții și probleme sunt structurate pe două pagini pentru fiecare unitate de învățare (o oră de predare, o oră de consolidare).

Pentru timpul de predare, sistemul de exerciții și probleme este structurat astfel:

- un context problematic care servește drept punct de plecare în descoperirea noii achiziții cognitive
- exercitii si probleme pentru asigurarea retentiei si transferului.

Pentru timpul de consolidare sistemul de exerciții și probleme este structurat pe trei niveluri, fiecare asigurând atingerea obiectivelor care vizează unul dintre domeniile cognitive:

- nivelul 1, fixare: domeniul cunoașterii și înțelegerii
- nivel 2, pregătire: domeniu de aplicare
- nivel 3, dezvoltare: domeniul integrarii

Astfel, învăţătorul are posibilitatea de a lucra diferit cu elevi care demonstrează niveluri diferite de performanță. Sistemele de exerciții și problemele din manualele de matematică din școala primară nu trebuie abordate cu rigiditate. Acesta trebuie să le adapteze la nivelul și nevoile reale ale clasei specifice de elevi. Pentru aceasta, el trebuie să valorifice întregul bagaj metodologic acumulat, să cunoască profund ritmul de învățare și nivelul clasei, să folosească creativ literatura metodologico-matematică și să acționeze în conformitate cu principiile specifice de structurare. Sistemul de exerciții și probleme care conțin sarcini de același tip se numește stereotip. Stereotiparea are efectul:

- pozitiv: asigură formarea capacităților aplicative de durată;
- negativ: scade atentia si interesul; gândirea devine treptat mecanică; crește riscul de a face greșeli.

Pentru a păstra efectul pozitiv și a anihila efectul negativ al stereotipului, se recomandă utilizarea altor principii de structurare a sistemelor stereotipe. Conform principiului repetiției continue, sarcinile repetitive sunt incluse în sistemul stereotip. Scopul acestor incluziuni consta în creşterea atentiei, activarea elevilor, anihiland astfel efectul negativ al stereotipului. Totodată, se realizează repetarea continuă a conţinuturilor învăţate anterior. Astfel, sistemul primește structura: T1, T2, T3, R1, T4, T5, R2, T6, T7…, unde prin T se notează sarcinile stereotipe din noua temă, iar prin R - sarcinile de repetare. Cerințele metodologice pentru un astfel de sistem sunt:

- gruparea sarcinilor stereotipe pe noua temă câte 2-3, ceea ce permite elevilor mai slabi să dobândească noua abilitate, iar elevilor mai buni să nu-și piardă permanent atenția și interesul;

- sarcinile de repetare se aleg aparent asemanatoare cu cele din noua tema, pentru a stimula gândirea constienta a elevilor

Principiul confruntării presupune alternarea de exerciții și probleme care tind să fie confundate de către elevi sau care se află într-o strânsă legătură pe care dorim să le evidențiem. De exemplu, elevii confundă sensurile „mai jos/mai înalt" și „mai jos/mai înalt". De aceea se creează exerciții și probleme în care aceste fraze apar simultan, în confruntare, iar elevii sunt puși în situația de a alege conștient operația de rezolvare.

Aceeași situație apare cu problemele:

- să găsească două numere după suma și raportul lor și să găsească două numere după suma și diferența lor;
- a găsi o fracțiune dintr-un întreg și a găsi întregul după o fracțiune a acestuia.

Dacă, de exemplu, ne interesează evidențierea legăturii dintre adunare și scădere, aceste noțiuni sunt introduse concomitent, în confruntare, descoperindu-le asemănările, deosebirile și relațiile în rezolvarea de exerciții și probleme.

Prin contraexemplu didactic se înțelege orice exercițiu sau problemă care, determinând elevii să greșească, permite elucidarea și prevenirea neînțelegerilor. Contraexemplele sunt întocmite de către profesor după observarea și analizarea greșelilor făcute de elevi la evaluare. Această activitate necesită o îndrumare atentă de către învățător, deci se realizează în clasă și în niciun caz nu este recomandată pentru munca independentă.

Contraexemplul este văzut de copii ca pe un joc și le permite acestora să fie educați. De exemplu, formând capacitatea de a împărți numerele naturale cu restul (clasa a II-a), propunem elevilor exerciții rezolvate, dintre care unele conțin greșeli:

34: 8 = 4, restul 2
36: 5 = 6, restul 6
28: 3 = 7, restul 4
22: 4 = 5, restul 2.

Elevii analizează exercițiile propuse, descoperă greșelile, le corectează argumentat. Se spune că sistemul de exerciţii şi probleme respectă principiul plenitudinei, dacă se asigură însuşirea conţinutului învăţării şi se exclude formarea de asocieri eronate.

Primele zece numere sunt fundamentul pe care se va dezvolta ulterior întregul edificiu al gândirii matematice a copilului. Acesta este primul contact al copiilor cu matematica atunci când încep să folosească cuvinte pentru a denumi numere și numere pentru a le scrie. Proiectul tematic de perspectivă la matematică pentru clasa I prevede predarea fiecărui număr din primele zece timp de două ore. În prima lecţie este relevat aspectul cardinal al numărului natural, iar în a doua lecţie este relevat relația de ordine a numărului respectiv cu numerele învățate anterior. În formarea conceptului de număr natural, acțiunea precede intuiția, modelul didactic presupunând următoarea dinamică:

- activităţi şi acţiuni cu seturi de obiecte (fază concretă);
- schematizarea acţiunii şi reprezentarea grafică a mulţimilor (faza reprezentărilor) etc.

Relația dintre aceste etape se schimbă treptat pe parcursul evoluției de la intuitiv la logic, de la concret la abstract. La început se va acorda prioritate activităților concrete, după care, treptat, se vor folosi corespondențele grafice de pe tablă și pe fișe individuale. Numerotarea este conţinutul central al cursului primar de matematică. Conţinutul studiului de numerotare este organizat în principal după un model liniar, cu orientări sensibile spre constituirea modelelor spiralate. Extindeți treptat numerele naturale în numere de până la 10, apoi până la 20, 30, 100, 1.000, 1.000.000, 1.000.000.000 după ce au însuşit conceptul de numere naturale, au construit progresiv şirul 0-10 şi au cercetat şi memorat conştient toate posibilităţile de compunere/descompunere a numerelor 0-10. Și anume acestea din urmă constituie baza predării-învățării adunării numerelor naturale 0-10. Următoarele trei sunt folosite pentru a forma noțiunea de asamblare fază:

- faza concretă (acțiuni concrete cu obiecte concrete), al cărei scop este de a îndruma elevii să înțeleagă sensul concret al ansamblului: rezultatul adunării a două numere au tot atâtea elemente cât numerele care se adună
- faza semi-abstractă (a reprezentărilor) în care obiectele concrete sunt reprezentate prin simboluri practice, abstract-intuitive: elevii desenează seturi cu astfel de simboluri pe caiete sau folosesc rigle
- saltul la conceptul matematic de adunare prin care elevii scriu cu numere şi semne (+, =) operatia de adunare si numesc numerele la adunare (termeni si suma).

Etapa de reprezentare este foarte importantă în procesul cognitiv și implică valențe importante, inclusiv pentru înțelegerea proprietății de simetrie a relației de egalitate (3 + 4 = 7 și 7 = 3 + 4). Această proprietate exprimă faptul că un număr poate fi descompus ca sumă a două numere și va fi folosit mai târziu în diferite tehnici de calcul.

Limbajul matematic legat de operația de adunare se îmbogățește progresiv prin traducerea simbolică cu ajutorul adunării unor operații concrete, exprimate verbal prin operații „mărește cu", „adună", „în total", „împreună" etc., operații care sunt exprimate și prin reunirea mulțimilor finite disjunctive. Tabelul de scădere și adunare nu se învață pe de rost, ci este urmat de o memorare conștientă în urma unui sistem de activități:

- rezolvarea de exercitii si probleme simple cu sau fara suport intuitiv;
- rezolvarea ecuatiilor implicite;
- jocuri educative;
- competitii pentru echipe si individuale.

În formarea noțiunii de înmulțire și împărțire, intuiția nu mai are un rol predominant (ca și la asamblare), deoarece elevii au dobândit cunoştințele și deprinderile legate de asamblare și învăţătorul se va baza pe acestea în predarea noii operaţiuni. Dar mijloacele intuitive nu vor fi complet abandonate. Succesul în atingerea obiectivelor de predare-învățare a geometriei în şcoala primară depinde de un complex de factori, printre care metodele de predare joacă un rol predominant. Perechea de metode care trebuie să aibă cea mai mare pondere este problematizarea și învățarea prin descoperire, prin care elevii sunt conduși la descoperirea unor adevăruri geometrice necunoscute lor prin propriile eforturi. Astfel, vom contribui foarte mult la dezvoltarea spiritului de investigație, imaginație și creativitate a elevilor.

Urmărind în principal dezvoltarea gândirii, inteligenței, spiritului de observație, exersarea operațiilor de analiză, sinteză, comparație, generalizare, matematică este o bază reală pentru înțelegerea conceptelor logice și nu numai.

Odată cu vârsta, jocurile devin din ce în ce mai complexe pe măsură ce implică din ce în ce mai mulți participanţi. Capacitatea copiilor de a se integra în grup crește odată cu vârsta, reușind să controleze interacțiunea cu un număr tot mai mare de copii. În intervalul de vârstă 3-4 ani, copiii dezvoltă jocul simbolic. Adică transformă anumite obiecte în jucării (de exemplu, o eșarfă este transformată în pelerina lui Batman) sau imită anumite comportamente ale părinților sau ale altor adulți (de exemplu, își duc mâna la ureche de parcă ar avea un telefon în mână și vorbește cu altcineva). Capacitatea de a interacționa cu mai mulți copii simultan evoluează de-a lungul timpului prin expunerea repetată la jocurile cooperative în care schimburile de replici ilustrează preocuparea comună pentru un anumit joc. Ca urmare a dezvoltării abilităților lingvistice, copiii devin din ce în ce mai conștienți de rolul de organizatori ai jocului, în sensul că își propun jocuri, indică roluri, precum și acțiuni care trebuie incluse în joc. La vârsta de 6 ani, copiii se implică nu numai în jocuri simbolice, ci și în jocuri cu reguli precum „Nu te supăra frate", care devin frecvente după ce copiii ating vârsta școlară. Jocurile didactice asigură un mediu favorabil învățării active, participative, stimulând inițiativa și creativitatea elevului.

Obiectivele instructiv-educative ale fiecărui obiect de studiu pot fi atinse mai bine prin folosirea jocului. Ea, prin însăși natura sa, conține o motivație intrinsecă: să mobilizeze resursele psihice ale copiilor, să le asigure participarea creativă, să le capteze interesul, să-i angajeze emoțional și atitudinal. Elementele jocului: descoperire, ghicire, simulare, competiție, surpriză, așteptare vor asigura mobilizarea propriului efort în descoperirea soluțiilor, în rezolvarea problemelor, stimularea puterii investigațiilor și a interesului continuu. Creativitatea ca structură definitorie a personalității are, din punct de vedere evolutiv, un caracter procedural supus influențelor mediului. La nivelul claselor preşcolare, în structura metodelor activ-participative (brainstorming, cubului etc.) își găsesc locul cu maximă eficiență, jocuri didactice, care constituie o punte între jocul ca tip dominant de activitate în care copilul este integrat în perioada şcolară, şi activitatea specifică şcolii - învăţare.

Copiii pot învăța să folosească bine informațiile, timpul, spațiul și materialele puse la dispoziție, își pot dezvolta spiritul de observație, spiritul critic și autocritic, capacitatea de anticipare-predicție, divergența și convergența gândirii, flexibilitatea și fluența. Se poate solicita capacitatea elevilor de a se orienta într-o anumită situație, de a propune soluții, de a analiza și opta pentru cea optimă, de a extrapola consecințele unei anumite situații concrete, de a interpreta și evalua anumite experiențe, fenomene, situații.

Manifestând creativitate, învățătorul va determina impulsul libertății și creativității copiilor, va echilibra preocupările pentru formarea gândirii logice, raționale, flexibile, fluide, creative, depășind înțelegerea îngustă, eronată, conform căreia libertatea de manifestare și creație a copiilor se dezvoltă spontan. Prin aplicarea cu pricepere a jocului didactic, învățătorul trebuie să fie capabil să valorifice unele dintre bogatele sale resurse formativ-educative în angajarea personalității copilului pentru a desfășura o activitate care necesită efort susținut, dar într-o atmosferă de bunăvoință, cooperare, înțelegere.

BIBLIOGRAFIE

[1] Alb Lupaş, A. (2013). Predarea matematicii în învăţământul primar. Aspecte metodice, Editura Universităţii din Oradea

[2] Ana, D. (2005). Metodica predării matematicii la clasele I-IV, Editura Carminis, Piteşti

[3] Atanasiu Gh., Purcaru M. A. P. (2002). Metodica predării matematicii la clasele I-IV, Editura Universităţii „Transilvania" din Braşov, Braşov

[4] Cîrjan, F. (2002). Didactica matematicii, Editura Corint, Bucureşti

[5] Dăncilă, E. Dăncilă, I. (2002). Matematica pentru bunul învăţător, Editura Erc Press, Bucureşti

TEOREMA LUI LAGRANGE- APLICAȚII

Mihaela BĂGUȚ, Ciprian BĂGUȚ

Liceul Teoretic ” Aurel Lazăr” Oradea, profesori de matematică, bagut.mihaela@gmail.com

***Rezumat**: În această lucrare prezentăm teorema lui Lagrange însoțită de aplicații.*
Cuvinte cheie: Lagrange, Rolle

Teorema lui Lagrange:

Fie f : [a, b]→**R**, a,b numere reale cu a < b.
Dacă f este continuă pe intervalul închis [a, b] și este derivabilă pe intervalul deschis (a, b), atunci există cel puțin un punct c din intervalul deschis (a, b) astfel încât are loc relația
f (b) – f (a) = f `(c)(b-a).

Demonstrație

Vom considera funcţia auxiliară $F: [a, b] \to \mathrm{R}, F(x) = f(x) + kx$. Vom determina constanta k astfel încât $F(a) = F(b)$

Din $\mathrm{f(a) + ka = f(b) + kb} \Rightarrow -\mathrm{k} = \frac{f(b) - f(a)}{\mathrm{b - a}}, a \neq b$

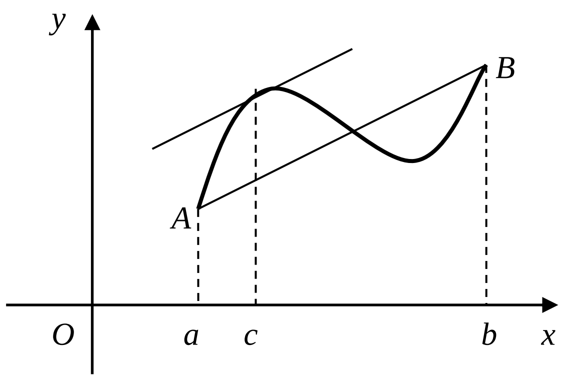
Pentru acest k, funcţia F verifică condiţiile teoremei lui Rolle şi, ca atare, există un punct $c \in (a, b)$ în care $F'(c) = 0$.

Pe de altă parte $F'(x) = f'(x) + k, (\forall) x \in (a, b)$, deci $f'(c) + k = 0$, adică $f'(c) = -k$. De aicirezultă $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$,

deci $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$

Interpretare geometrică:

Aceasta rezultă din interpretarea geometrică a derivatei şi anume: în condiţiile teoremei, există cel puţin un punct $c \in (a, b)$ pentru care tangenta la graficul lui f în $(c, f(c))$ este paralelă cu "coarda" determinată de punctele $(a, f(a))$, $(b, f(b))$.



Aplicații:

1. Să se arate că :

$\pi < 3\sqrt{3}\ln\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) < \pi\sqrt{3} < 6\sqrt{3}\,ln\sqrt{3} < 2\pi.$

Soluție: Aplicăm Teorema lui Lagrange pentru funcția f(x) =lntg x, pe intervalul $\left(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{12}\right)$. Pe acest interval f(x) îndeplineşte condițiile teoremei, deci exixtă c din $\left(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{12}\right)$ astfel încât

$$\frac{\ln tg\frac{5\pi}{12}-\ln tg\frac{\pi}{3}}{\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{tg c\cdot cos^2c}\Rightarrow \ln tg\frac{5\pi}{12}-\ln tg\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{12}\cdot\frac{2}{sin2c}.$$

Dar $tg\frac{5\pi}{12}=2+\sqrt{3}$

Deci vom avea $ln\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{12}\cdot\frac{2}{sin2c}$ (1)

Dar c$\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{12}\right)\Rightarrow 2c\in\left(\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right)$, de unde pe baza monotoniei funcției sinus obținem :

$$\frac{1}{2}<\sin 2c<\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\frac{2}{\sqrt{3}}<\frac{1}{sin2c}<\frac{1}{2}\Big|\frac{2\pi}{12}\Rightarrow\frac{\pi}{3\sqrt{3}}<\frac{\pi}{12}\cdot\frac{2}{sin2c}<\frac{\pi}{3}\overset{(1)}{\Rightarrow}\frac{\pi}{3\sqrt{3}}<\ln\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}<\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow\pi<3\sqrt{3}\,ln\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}<\pi\sqrt{3}\quad(2)$$

Pentru aceeaşi funcție aplicăm teorema lui Lagrange pe intervalul $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3}\right]$

$$\frac{ln\,tg\frac{\pi}{3}-ln\,tg\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}}=\frac{2}{sin\,2c}\Rightarrow ln\sqrt{3}-ln\,1=\frac{\pi}{12}\cdot\frac{2}{sin\,2c}\quad(3)$$

Dar c$\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right)\Rightarrow 2c\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right)$, de unde pe baza monotoniei funcției sinus obținem :

$$sin\,2c\in\left(\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}<sin\,2c<1\Rightarrow 1<\frac{1}{sin\,2c}<\frac{2}{\sqrt{3}}\Big|\frac{\pi}{6}\Rightarrow\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{12}\cdot\frac{2}{sin\,2c}<\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

$$\overset{(3)}{\Rightarrow}\frac{\pi}{6}<ln\sqrt{3}<\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\Rightarrow\pi\sqrt{3}<6\sqrt{3}\,ln\sqrt{3}<2\pi\quad(4)$$

Atunci din relațiile (2) și (4) rezultă relația cerută.

2. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(n+1)^2}{n+1}\left(e^{\frac{1}{n^2}}+e^{\frac{1}{(n+1)^2}}\right)$$

Soluție: Aplicăm Teorema lui Lagrange pentru funcția f(x) =e^x, pe intervalul $\left[\frac{1}{(n+1)^2};\frac{1}{n^2}\right]$Pe acest interval f(x) îndeplineşte condițiile teoremei, deci exixtă c din $\left(\frac{1}{(n+1)^2};\frac{1}{n^2}\right)$ astfel încât

$$\frac{f\left(\frac{1}{n^2}\right)-f\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)}{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}}=f'(c)\Rightarrow\left(e^{\frac{1}{n^2}}-e^{\frac{1}{(n+1)^2}}\right)\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{2n+1}=e^c\quad(1)$$

Dar $\frac{1}{(n+1)^2}<c<\frac{1}{n^2}\Rightarrow e^{\frac{1}{(n+1)^2}}<e^c<e^{\frac{1}{n^2}}$ (e^x fiind o funcție crescătoare) (2)

Din relațiile (1) și (2) $\Rightarrow e^{\frac{1}{(n+1)^2}}<\frac{n^2(n+1)^2}{2n+1}\left(e^{\frac{1}{n^2}}-e^{\frac{1}{(n+1)^2}}\right)<e^{\frac{1}{n^2}}\ \Big|\cdot\frac{2n+1}{n+1}$

$$\Rightarrow\frac{2n+1}{n+1}\cdot e^{\frac{1}{(n+1)^2}}<\frac{n^2(n+1)^2}{n+1}\left(e^{\frac{1}{n^2}}-e^{\frac{1}{(n+1)^2}}\right)<\frac{2n+1}{n+1}\cdot e^{\frac{1}{n^2}}\quad(3)$$

Aplicăm teorema cleştelui relației (3) și rezultă $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(n+1)^2}{n+1}\left(e^{\frac{1}{n^2}}+e^{\frac{1}{(n+1)^2}}\right)=2$

3. Fie f : I → I, unde I este un interval, o funcție derivabilă astfel încât $m\le|f'(x)|\le M$, oricare ar fi $x\in I$. Atunci oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$ avem inegalitățile:

$$m^k|x_1-x_2|\le\left|f^{[k]}(x_1)-f^{[k]}(x_2)\right|\le M^k|x_1-x_2|,\forall x_1,x_2\in I, unde\ f^{[k]}=f{\circ}f{\circ}f\ldots{\circ}f\ de\ k\ ori$$

Soluție: $f^{[k]}$ fiind compunere de k funcții derivabile atunci este și ea derivabilă și conform regulii de derivare a funcțiilor compuse rezultă egalitățile: $(f^\circ f)'(x) = f'(f(x))f'(x)$; $(f^\circ f^\circ f)'(x) = f'((f^\circ f)(x))(f^\circ f)'(x) \dots \left(f^{[k]}(x)\right)'(x) = f'\left(f^{[k-1]}(x)\right)\left(f^{[k-1]}\right)'(x)$. Din ipoteză avem relația $m \leq |f'(x)| \leq M$ (1) , oricare ar fi $x \in I$. Dar f : I → I deci f(x) $\in I$ și are loc relația $m \leq |f'(f(x))| \leq M$ (2) .

Înmulțind relațiile (1) și (2) rezultă $m^2 \leq |f'(x)f'(f(x))| \leq M^2$, adică $m^2 \leq |(f^\circ f)'(x)| \leq M^2$. La fel arătăm că $m^3 \leq |(f^\circ f^\circ f)'(x)| \leq M^3$ .... $m^k \leq |(f^{[k]})'(x)| \leq M^k$, oricare ar fi $x \in I$. (1)

Aplicând teorema lui Lagrange funcției $f^{[k]}(x)$, care îndeplinește condițiile din ipoteza teoremei, pe intervalul [x_1,x_2], unde x_1,x_2 sunt fixate în I rezultă că există c din (x_1,x_2) astfel încât $\frac{f^{[k]}(x_1)-f^{[k]}(x_2)}{x_1-x_2} = \left(f^{[k]}\right)'(c)$ (2)

Din relațiile (1) și (2) rezultă relația cerută.

4. Se consideră funcția f : [a,b] → **R** derivabilă. Să se demonstreze că oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, există numerele $c_1 < c_2 < c_3 < \cdots < c_n$ din (a,b) astfel încât $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f'(c_1)+f'(c_2)+\cdots+f'(c_n)}{n}$

Soluție: Împărțim intervalul [a,b] în n părți egale astfel x_0=a, x_k=b și $x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n}$. Aplicăm succesiv teorema lui Lagrange funcției f(x) pe intervalele de forma [x_{k+1},x_k] deci există $c_1 \in (x_0, x_1)$ astfel încât $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = f'(c_1) \Rightarrow f(x_1) - f(x_0) = \frac{b-a}{n} f'(c_1)$

$\exists c_2 \in (x_1, x_2)$ astfel încât $f(x_2) - f(x_1) = \frac{b-a}{n} f'(c_2)$

$\exists c_3 \in (x_2, x_3)$ astfel încât $f(x_3) - f(x_2) = \frac{b-a}{n} f'(c_3)$

....

$\exists c_n \in (x_{n-1}, x_n)$ astfel încât $f(x_n) - f(x_{n-1}) = \frac{b-a}{n} f'(c_n)$

Adunând relațiile $\Rightarrow f(x_n) - f(x_0) = \frac{b-a}{n}\left(f'(c_1) + f'(c_2) + \cdots + f'(c_n)\right)$

dar x_n=b și x_0=a $\Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f'(c_1)+f'(c_2)+\cdots+f'(c_n)}{n}$

5. Se consideră funcția $f: [-1; 1] \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă cu derivata crescătoare. Să se arate că $\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \leq f(-1) + f'(1)$

Soluție: Fie $x \in [-1; 1]$. Aplicăm funcției din ipoteză teorema lui Lagrange pe intervalul (-1;x). $\exists c \in (-1, x)$ astfel încât $\frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = f'(c)(*)$

Dar $x \in [-1; 1] \Rightarrow c \leq 1 \Rightarrow f'(c) \leq f'(1)$ (din ipoteză derivata este crescătoare). Atunci conform relației $(*) \Rightarrow f(x) - f(-1) = (x+1)f'(c) \leq (x+1)f'(1)$ și integrând relația obținem $\int_{-1}^{1}[f(x) - f(-1)]\,dx \leq \int_{-1}^{1}(x+1)f'(1)\,dx \Rightarrow$

$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx - xf(-1)|_{-1}^{1} \leq \frac{(x+1)^2}{2} f'(1)|_{-1}^{1} \Rightarrow \int_{-1}^{1} f(x)\,dx - 2f(-1) \leq 2f'(1) \Rightarrow$
$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \leq f(-1) + f'(1)$

BIBLIOGRAFIE:

[1] Schneider, V., et all. (2007). Matematică, Exerciții și probleme pentru clasa a XI-a, Editura Valeriu, Craiova
[2] Pârșan, L. Ionescu-Țin, C. (1979). Probleme de matematică pentru elevii de liceu din clasele XI și XII, Editura Facla, Timișoara

[3] Sirețchi, G. (1985). Calcul diferențial și integral, vol II, Editura Științifică și Pedagogică, București,
[4] Andreescu, T., Andrica D. (2002). 360 de probleme de matematică pentru concursuri, Editura Gil, Zalău

ASPECTE METODICE PRIVIND DIFERITE METODE DE REZOLVARE A PROBLEMELOR

Bianca Paula BIRTA

Școala Gimnazială „Oltea Doamna" Oradea, județul Bihor, profesor pentru învățământul primar, bianca_paula94@yahoo.com

Rezumat: *Lucrarea îşi propune să orienteze cititorul prin metodele de rezolvare a problemelor, să aplice algoritmi şi să ofere strategii de rezolvare a acestora*.
Cuvinte cheie: metode de rezolvare a problemelor

Pornind de la faptul că matematica prin MEM (matematica și explorarea mediului) a fost introdusă în programa pentru Concursul Național de titularizare, de asemenea aceasta se regăsește și la Examenul Național de Definitivare în învățământ, voi aborda în această lucrare câteva probleme și diferite metode de rezolvare, atât la nivel primar cât și gimnazial. Problemele propuse au fost alese din programa specifică examenelor amintite mai sus, fiind selectate din literatura de specialitate, manuale şcolare și din culegeri care cuprind aceste subiecte. Amintim aici că problemele se pot rezolva utilizând mai multe metode și că acestea se predau elevilor încă din clasele primare, iar pe parcursul anilor strategiilor de rezolvare se adaugă și alte moduri de abordare. Această lucrare se dorește a fi un ghid pentru studenti, profesorii debutanți care vor preda sau vor participa la examenele din învățământ cât și pentru perfecționare.

Pentru a rezolva probleme elevii sunt conduși prin diverse mijloace spre a alege algoritmi sau strategii corespunzătoare rezolvării lor. Prezentăm metodele de rezolvare a problemelor într-o ordine aleatoare, apoi le vom rezolva prin prisma elevilor din ciclul primar în paralel cu metodele specifice gimnaziului.

1. Metoda reducerii la unitate
2. Metoda comparaţiei
3. Metoda figurativă
4. Metoda mersului invers
5. Metoda falsei ipoteze

1. O persoană cumpără 6 kg de mere şi plăteşte 18 lei. Cât plăteşte dacă doreşte să cumpere 8 kg.

Metoda reducerii la unitate

1. Cât costă un kg de mere?
   $18:6=3$
2. Cât costă 8 kg de mere?
   $3\cdot 8=24$
   Deci 8 kg vor costa 24 lei.

Metoda-regula de trei simplă

$6kg......................18lei$

$8kg.......................xlei$

$$x=\frac{8\cdot 18^{(6}}{6}=8\cdot 3=24$$

Obținem acelaşi rezultat 24 lei.

2. 5kg de piersici și 6 kg de mere costă 54 lei. 2 kg de piersici și 4 kg de mere costă 28 lei. Cât costă câte un kilogram din fiecare fruct?

Metoda comparației

5kg piersici………………6 kg mere………………54 lei $|\cdot 2$

2 kg piersici………………4kg mere………………28 lei $|\cdot 3$

Obținem

10 kg piersici……………12kg mere……………108 lei

6 kg piersici…………….12 kg mere…………… 84 lei

Prin scădere obținem
4 kg piersici……………………………………..24 lei
Deci 1 kg de piersici va costa 24:4= 6 lei
Vom calcula cât costă 1 kg de mere: 54-30=24
$\Rightarrow$ 24:6=4 lei
Rezolvarea problemelor cu ajutorul sistemelor liniare de 2 ecuații cu 2 necunoscute, unde notăm p cât costă 1 kg de pere și cu m cât costă 1 kg de mere.

$$\begin{cases} 5\cdot p+6\cdot m=54 \\ 2\cdot p+4\cdot m=28 \end{cases}$$

Aplicăm metoda substituției, dar împărțim prima ecuație cu 2

$$\begin{cases} 5\cdot p+6\cdot m=54 \\ p+2\cdot m=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\cdot p+6\cdot m=54 \\ p=14-2\cdot m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\cdot(14-2\cdot m)+6\cdot m=54 \\ p=14-2\cdot m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 60-10\cdot m+6\cdot m=54 \\ p=14-2\cdot m \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 60-4\cdot m=54 \\ p=14-2\cdot m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\cdot m=60-54 \\ p=14-2\cdot m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\cdot m=16 \\ p=14-2\cdot m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=4 \\ p=14-2\cdot m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=4 \\ p=14-2\cdot 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} m=4 \\ p=14-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=4 \\ p=6 \end{cases}$$

1 kg de pere costă 6 lei, iar 1 kg de mere costă 4 lei.

3. Suma a patru numere consecutive pare este 228. Determinați cele patru numere.

Metoda grafică

2a
2a+2
2a+4
2a+6

1. Determinăm segmental 2a:
(228-12):4=216:4=54
Numerele sunt: 54, 56, 58 și 60

Metoda algebrică

2a primul numar par
2a+(2a+2)+(2a+4)+(2a+6)=228
2a$\cdot$ 4+12=228
2a$\cdot$ 4=216
2a=54 primul număr
Numerele căutate sunt: 54, 56, 58 și 60

4. Mă gândesc la un număr din care scad 20, rezultatul îl impart la 5, adun 40 la câtul obţinut şi suma o impart la trei. Dacă la final obţin 150, care este numărul la care m-am gândit?

Metoda mersului invers

150$\cdot$ 3=450
450-40=410
410$\cdot$ 5=2050
a=2050+20
a=2070

Rezolvarea problemei cuajutorul ecuațiilor, notând cu a numărul necunoscut
[(a-20):5+40]:3=150 (înmulțim cu 3)
(a-20):5+40=450 (scădem 40)
(a-20):5=410 (înmulțim cu 5)
a-20=2050 (adunăm 20)
a=2070

5. Ina are 65 de lei în bancnote de 5 lei si 10 lei, în total 9 bancnote. Determinați numărul bancnotelor de 5 lei.

Metoda falsei ipoteze
Presupunem că toate bancnotele sunt de 5 lei deci
$5\cdot 9=45$
Calculăm diferența dintre numărul total și presupunerea făcută
$65-45=20$
Vom calcula diferența dintre bancnotele de 5 lei și cele 10 lei, adică

$10-5=5$

Câte bancnote de 10 lei sunt?

$20:5=4$

Câte bancnote de 5 lei sunt?

$9-4=5$

Rezolvarea problemelor cu ajutorul sistemelor liniare de 2 ecuații cu 2 necunoscute

Vom scrie sistemul de ecuații corespunzător problemei, notând cu x numărul de bancnote de 5 lei și cu numărul de bancnote de 10 lei.

$$\begin{cases} 5\cdot x+10\cdot y=65 \\ x+y=9 \end{cases}$$

Rezolvarea propusă este prin metoda reducerii și vom înmulții cu 5 a doua ecuație:

$$\begin{cases} 5\cdot x+10\cdot y=65 \\ 5\cdot x+5\cdot y=45 \end{cases}$$

Prin scădere obținem

$$\begin{cases} 5\cdot x+10\cdot y=65 \\ 5\cdot x+5\cdot y=45 \end{cases}$$

Deci $5\cdot y=20\Rightarrow y=4$

Din a doua ecuație vom calcula x

$x+4=9\Rightarrow x=5$

Ina are 5 bancnote de 5 lei și 4 bancnote de 10 lei.

Verificare:

$5\cdot 5+4\cdot 10=65\Rightarrow 25+40=65\Rightarrow 65=65$

Ca o concluzie a ceea ce s-a prezentat specificăm că problemele abordate conţin numere naturale, având în vedere nivelul pentru ciclul primar, dar modul de abordare a problemelor o dată stăpânite vor putea fi utilizate și în cazul mulțimii numerelor reale în ciclul gimnazial. În cadru examenlor se pot alege metodele preferate, caz în care nu este specificată metoda de lucru.

BIBLIOGRAFIE:

[1] Perianu, M.., Smărăndoiu, Ș.., Stănică, C.(2022). Matetemtică Clasa a V-a, Editura Art Klett, București

[2] Giuclea, A., Vlad, C., (2022). Teste rezolvate pentru reușita la examenul de titularizare în Învățământul Primar, Editura Rentrop&Straton, București

STUDIUL GEODEZICELOR

Corina BIȚIȘ

Liceul Teologic Penticostal Betel, Oradea, , profesor de matematică,
corinabitis@yahoo.com

Rezumat: *În anul 1934 odată cu apariția cărții M. Morse apare un domeniu nou în matematică, „Topologia diferențială”. Aici e pusă în evidență legătura ce există între topologia unui spațiu și tipul punctelor critice ale unei funcții. După apariția lucrărilor lui R.S. Palais, S. Smale, A. Ambrosetti și P.H. Rabimonitz calculul variațional și teoria punctului critic cunoaște o dezvoltare rapidă. Această teorie se aplică cu succes în studiul geodezicelor unei varietăți Riemann, în studiul sistemelor hamiltoniene, în teoria suprafețelor minimale și în teoria ecuațiilor diferențiale cu derivate parțiale. În articolul „Studiul geodezicelor” sunt prezentate aplicații pe spațiul Sobolev* $W^{1,p}(\Omega)$ *și anume geodezice pe mulțimi nenetede.*

Cuvinte cheie : Spațiul Soblev $W^{1,p}(\Omega)$, geodezica în M, punct critic

Definiția 1:

Fie $p \in \Re$ *cu* $1 \leq p \leq +\infty, \Omega \subset \Re$ deschisă. Fie $L^p(\Omega)$ spațiul funcțiilor integrale pe Ω cu valori în $\Re$. Definim spațiul $L^p(\Omega) = \{f: \Omega \to \Re \mid f \text{ este măsurabilă și } |f|^p \in L^1(\Omega)\}$ și pe acest spațiu definim norma

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int_\Omega |f(x)|^p dx\right]^{1/p}$$

Definiția 2:

Spațiul Soblev $W^{1,p}(\Omega)$ se definește prin

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{u \in L^p(\Omega) | \exists g_1, \ldots, g_N \in L^p(\Omega), \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi, \forall \varphi \in C_C^\infty(\Omega), i = \overline{1,n}\right\}$$

Fie $N^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$

Propoziția 2: *Spațiul* $W^{1,p}(\Omega)$ *este un spațiu Banach pentru* $1 \leq p \leq +\infty; W^{1,p}(\Omega)$ *este reflexiv pentru* $1 < p < +\infty$ *și este separabil pentru* $1 \leq p < +\infty$.

Spațiul $H^1(\Omega)$ *este un spațiu Hilbert separabil.*

Fie M o submulțime a lui $\Re^n$. Fiecare $\gamma \in W^{1,2}(a, b; \Re^n)$ va fi identificat cu reprezentarea continuă $\tilde{\gamma}: [a, b] \to \Re^n$. În plus definim prin $\|\bullet\|_{1,2}$ și $\|\bullet\|_p$ norme uzuale în $W^{1,2}(a, b; \Re^n)$ și $L^p(a, b; \Re^n), 1 \leq p \leq +\infty$:

$W^{1,2}(a, b; M) := \{\gamma \in W^{1,2}(a, b; \Re^n): \gamma(s) \in M, \forall s \in [a, b]\}$ și definim o funcțională:

$E_{a,b}: W^{1,2}(a, b; M) \to \Re$

$$E_{a,b}(\gamma) := \frac{1}{2}\int_a^b |\gamma'(s)|^2 ds$$

Definiția 3:

Fie $a, b \in \Re$ cu $a < b$. O curbă $\gamma \in W^{1,2}(a, b; M)$ este (energy-stationary) dacă se poate găsi $\delta, c, \sigma > 0$ și o aplicație:

$\mathcal{H}: \{\eta \in W^{1,2}(a, b; M): \|\eta \to \gamma\|_{1,2} < \delta\} \times [0, \delta] \to W^{1,2}(a, b; M)$ cu următoarele proprietăți:

a) $\mathcal{H}$ este continuă;
b) pentru orice $\eta \in W^{1,2}(a, b; M)$ cu $\|\eta - \gamma\|_{1,2} < \delta$ și $t \in [0, \delta]$ avem:

$$(\mathcal{H}(\eta,t)-\eta) \in W_0^{1,2}(a,b;\mathfrak{R}^n)$$
$$\|\mathcal{H}(\eta,t)-\eta\|_2 \le ct$$
$$E_{a,b}\big(\mathcal{H}(\eta,t)\big) \le E_{a,b}(\eta)-\sigma t$$

Propoziția 3: *Fie $\gamma \in W^{1,2}(a,b;M)$ o energy-stationary. Atunci pentru orice $[\alpha,\beta] \subseteq [a,b]$, restricția $\gamma\big|_{[\alpha,\beta]}$ este o energy-stationary.*

Demonstrație: Notăm $\hat{\gamma} = \gamma\big|_{[\alpha,\beta]}$. Prin contradicție presupunem că există $\delta, c, \sigma > 0$ și $\mathcal{H}:\{\eta \in W^{1,2}(\alpha,\beta;M): \|\eta \to \hat{\gamma}\|_{1,2} < \delta\} \times [0,\delta] \to W^{1,2}(\alpha,\beta;M)$, ca în definiția 1.

Pentru orice $\eta \in W^{1,2}(a,b;M)$, notăm $\hat{\eta} = \eta\big|_{[a,b]}$ și definim:

$$\mathcal{H}:\{\eta \in W^{1,2}(a,b;M): \|\eta \to \gamma\|_{1,2} < \delta\} \times [0,\delta] \to W^{1,2}(a,b;M)$$

$$\mathcal{H}(\eta,t)(s) = \begin{cases} \mathcal{H}(\hat{\eta},t)(s), s \in [\alpha,\beta] \\ \eta(s), s \notin [\alpha,\beta] \end{cases}$$

$\mathcal{H}$ are proprietățile cerute în definiție. Rezultă că γ nu este o energy-stationary, ceea ce este o contradicție.

Definiția 4:

Fie I un interval în $\mathfrak{R}$ cu $int(I) \neq \emptyset$. O aplicație continuă $\gamma: I \to M$ este geodezica în M dacă orice $s \in int(I)$ admite o vecinătate $[a,b]$ în I astfel încât $\gamma\big|_{[a,b]}$ aparține lui $W^{1,2}(a,b;M)$ și este energy-stationary.

Definiția 5:

O geodezică închisă în M este o geodezică $\gamma: \mathfrak{R} \to M$ care este periodică de perioadă 1.

Teorema: Fie I un interval în $\mathfrak{R}$ cu $int(I) \neq \emptyset$ și fie $\gamma: I \to M$ o geodezică în M. Atunci γ este Lipschitz și $|\gamma'|$ este aproape peste tot egală cu o constantă.

Demonstrație: În primul rând, avem $\gamma \in W^{1,2}_{loc}(int(I);\mathfrak{R}^n)$. Pentru orice $s \in int(I)$, fie $[a_s, b_s]$ o vecinătate a lui s ca în definiția anterioară. Este suficient să demonstrăm că oricare $s \in int(I)$, oricare $\varphi \in C_c^\infty(]a_s,b_s[)$ avem

$$\int_{a_s}^{b_s} \varphi'(\lambda)\,|\gamma'(\lambda)|^2 d\lambda = 0$$

Prin contradicție, fie $s \in int(I)$ și $\varphi \in C_c^\infty(]a_s,b_s[)$ astfel încât

$$\sigma := \frac{1}{3}\int_{a_s}^{b_s} \varphi'(\lambda)\,|\gamma'(\lambda)|^2 d\lambda > 0$$

Fie $\delta > 0$ astfel încât $\delta\|\varphi'\|_\infty < 1$ și fie $\Psi:[a_s,b_s] \times [0,\delta] \to [a_s,b_s]$ o funcțională netedă astfel încât $\forall\lambda \in [a_s,b_s], \forall t \in [0,\delta], \lambda = \Psi(\lambda,t) - t\varphi(\Psi(\lambda,t))$.

Definim $\mathcal{H}: W^{1,2}(a,b;M) \times [0,\delta] \to W^{1,2}(a,b;M)$ prin $\mathcal{H}(\eta,t)(\mu) = \eta(\mu - t\varphi(\mu))$.

Aplicația $\mathcal{H}$ este continuă și $(\mathcal{H}(\eta,t)-\eta) \in W^{1,2}(a_s,b_s;\mathfrak{R}^n)$,

$$\|\mathcal{H}(\eta,t)-\eta\| \le \|\eta'\|_2\|\varphi\|_\infty t$$

În continuare vom calcula:

$$E_{a_s,b_s}\big(\mathcal{H}(\eta,t)\big) = \frac{1}{2}\int_{a_s}^{b_s} (1-t\varphi'(\mu))^2 \big|\eta'\big(\mu - t\varphi(\mu)\big)\big|^2 d\mu =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{a_s}^{b_s}(1 - t\varphi'(\Psi(\lambda,t)))|\eta'(\lambda)|^2 d\lambda = E_{a_s,b_s}(\eta) - \frac{1}{2}\int_{a_s}^{b_s}(\varphi'(\Psi(\lambda,t))|\eta'(\lambda)|^2 d\lambda$$

Presupunem că $\|\eta - \gamma\|_{1,2} < \delta, 0 \le t \le \delta \Rightarrow \int_{a_s}^{b_s}(\varphi'(\Psi(\lambda,t))|\eta'(\lambda)|^2 d\lambda \ge 2\sigma$.

Atunci avem $\|\mathcal{H}(\eta,t) - \eta\|_2 \le (\|\gamma'\|_2 + \delta)\|\varphi\|_\infty t$ deci $E_{a_s,b_s}(\mathcal{H}(\eta,t)) \le E_{a_s,b_s}(\eta) - \sigma t$.

Rezultă că $\gamma|_{[a,b]}$ nu este energy-stationary ceea ce este o contradicție.

Acum considerăm mulțimea: $X = \{\gamma \in W^{1,2}(0,1;M) : \gamma(0) = \gamma(1)\}$ și definim funcționala $f: L^2(0,1;\Re^n) \to \Re \cup \{+\infty\}$

$$f(\gamma) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_0^1 |\gamma'(s)|^2 ds, \gamma \in X \\ +\infty \qquad\qquad , \gamma \notin X \end{cases}$$

Teorema: *Dacă $\gamma \in X$ este un punct critic a lui f, atunci γ este o restricție la $[0,1]$ a geodezicei închise în M.*

Demonstrație: Fie γ este un punct critic a lui f. Prin contradicție, fie $\delta, c, \sigma > 0$ și $\mathcal{H}$.

Există $\delta' \in]0,\delta]$ astfel încât pentru orice $\eta \in X, \|\eta - \gamma\|_2 < \delta', f(n) < f(\gamma) + \delta' \Rightarrow \|\eta - \gamma\|_{1,2} < \delta$.

Din Propoziția 3 γ nu este un punct critic a lui f. Contradicția arată că γ este o energy-stationary în $[0,1]$.

Definim $\hat{\gamma} \in X$ prin:

$$\hat{\gamma}(s) = \begin{cases} \gamma\left(s + \frac{1}{2}\right), 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ \gamma\left(s + \frac{1}{2}\right), \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases}$$

BIBLIOGRAFIE:

[1] Klingenberg W. (1978). Lectures on closed geodesics, Springer
[2] Oproiu V. (2003). Geometrie diferențială, Editura Cermi, Iași
[3] Pop, I. (1990). Topologie algebrică, Editura Științifică, București

MATEMATICA ŞI ROLUL EI ÎN VIAŢA ELEVULUI

Ana Mariana CLOP

Liceul Vocațional Pedagogic „Nicolae Bolcaș“ Beiuș, profesor de matematică, ancaclop@yahoo.com

Rezumat: *Matematica are rolul de a forma și dezvolta gândirea elevilor, prind diversele ei mijloace și metode de aplicare.*
Cuvinte cheie: matematica, rezolvarea problemelor

Pornind de la afirmaţia profesorului universitar Ştefan Bârsănescu ” *Intrarea în cetatea cunoaşterii se face pe podul matematicii* ”, putem afirma că matematica este mai mult decât o ştiinţă, aceasta este un act de cultură, este unul din modurile fundamentale ale gândirii umane.

Matematica este disciplina care are menirea de a forma o gândire investigatoare. Este ştiinţa cea mai operativă, care are cele mai multe şi mai complexe legături de viaţă. De aceea, se impune o permanentă preocupare în perfecţionarea continuă a metodelor şi mijloacelor de învăţământ pentru a realiza nu o simplă instruire matematică, ci o educaţie matematică, cu implicaţii serioase în dezvoltarea elevilor şi formarea lor ca om folositor societăţii din care face parte.

În ziua de azi, matematica următeşte antrenarea sistemică şi gradată a gândirii elevilor în rezolvarea exerciţiilor şi problemelor, disciplinarea gândirii elevilor şi formarea capacităţii de a gândi sub tensiune etc.

Şcoala are obligaţia să facă din studiul matematicii un instrument de acţiune eficientă, constructivă şi modelatoare asupra personalităţii elevului, astfel că şcoala românească trebuie să modeleze, să fie cu adevărat expresia vie, puternică, reală a năzuinţelor neamului nostru, nu numai de a-i conserva valenţele culturale şi sufleteşti moştenite, ci de a crea valori noi în vederea desăvârşirii fiinţei sale naţionale. Ea trebuie să aibă ca ideal formarea de specialişti bine pregătiţi profesional, capabili de a se angaja creator în efortul constructiv al ţării.

Din nevoia omului de a se adapta în continuu la situaţii, la procese şi probleme de muncă mereu noi, impun ca şcoala, odată cu funcţia ei informativă, să dezvolte şi atitudinile intelectuale ale elevilor, independenţa şi creativitatea gândirii. O contribuţie esenţială la realizarea acestei sarcini o dă studiul matematicii în manieră modernă.

Matematica, pătrunzând în aproape toate domeniile de cercetare şi aducându-şi contribuţia la dezvoltarea tuturor ştiinţelor, este chemată să-şi îndeplinească rolul de factor esenţial la adaptarea rapidă a fiecărui cetăţean la cerinţele mereu crescânde ale societăţii în care trăim. Bazele unei bune pregătiri şi formări matematice se pun încă din clasele primare, cu accentul pe dezvoltarea capacităţii intelectuale ale elevilor şi a priceperii de a le utiliza în mod creator.

Raţionamentul matematic şi gândirea riguros ştiinţifică creează elevului posibilitatea de înţelegere a celorlalte discipline cât şi de pătrundere a problemelor vietii de zi cu zi. Apariţia matematicii în cele mai diverse ştiinţe, de la astronomie, chimie, la medicină, face ca orientarea copiilor către matematică să fie un proces obiectiv. Astăzi se afirmă că fundamentul culturii moderne îl constituie matematica.

Gândirea matematică se manifestă printr-o mare varietate de activităţi intelectuale legate de memorie şi imaginaţie şi anume: judecare, raţionare, înţelegere, explicare, invenţie, deducţie, inducţie, analogie, abstractizare, generalizare, comparaţie, concretizare, clasificare, diviziune, rezolvare de situaţii-problemă, etc.

Formarea deprinderilor de calcul ,dar şi de raţionament, este o sarcină fundamentală a învăţământului matematic. Ele reprezintă „instrumente” operaţionale utile pe întregul parcurs al învăţământului, stând la baza întregului sistem al deprinderilor matematice. Deprinderile de calcul (mintal şi scris) constituie deprinderi de bază pentru rezolvarea problemelor. Calculul mintal are o importantă contribuţie la dezvoltarea gândirii, obiectivul final al învăţării calculului este dezvoltarea gândirii logice a elevilor. Supusă la un antrenament continuu prin efectuarea unor calcule exacte şi rapide, judicios gradate, gândirea elevului se dezvoltă şi se disciplinează. Dar elevul este pus în situaţia de a alege procedeul de calcul cel mai potrivit cazului dat pentru a afla mai repede şi mai uşor rezultatul, de a aplica în unele cazuri particulare principiul de rezolvare. În felul acesta se dezvoltă puterea de înţelegere, spiritul de iniţiativă, perspicacitatea.

Sistemul cunoştinţelor matematice formează în mintea elevilor o construcţie după modelul riguros logic al ştiinţei matematice. Acest model este caracterizat prin continuitate şi legătura logică, prin utilizarea raţionamentului deductiv şi inductiv în formarea conceptelor matematice.

În vederea dezvoltării gândirii logice a elevilor din ciclul primar se va desfăşura un învăţământ modern formativ, ceea ce presupune: înţelegerea noţiunilor de matematică de către elevi pe cât posibil prin efort personal, căutând să-i deprindem pe elevi să gândească matematic; să antrenăm gândirea elevilor prin rezolvarea în mod permanent de probleme; dezvoltarea spiritului de independenţă şi a încrederii în forţele proprii prin stimularea iniţiativei de a încerca rezolvări cât mai variate şi cât mai ingenioase prin e încerca rezolvări cât mai variate şi cât mai ingenioase prin extinderea muncii independente.

Pentru a putea realiza aceste sarcini, învăţătorul trebuie să aibă mereu în vedere următoarele: predarea să fie în aşa fel realizată, încât noţiunile însuşite să constituie suport pentru viitoarele cunoştinţe; utilizarea metodelor şi tehnicilor de lucru care să imprime actului învăţării un caracter activ, care să facă din elev un participant conştient la dobândirea cunostinţelor, priceperilor şi deprinderilor; abordarea creativă a materiei de către învăţător; să contribuie la însuşirea matematicii de către elevi mai uşor pentru ca să le permită să-şi organizeze experienţele în formele economice şi sistematice; legătura matematicii cu viaţa, să-i provocăm în permanenţă să gândească matematic punându-i în situaţia de a matematiza aspecte reale din viaţă.

Un rol important în dezvoltarea gândirii logice a elevilor îl are măiestria didactică a învăţătorului. Realizarea prin metode de lucru cu elevii a unei permanenţe gimnastici a minţii, introducerea în lecţiile de consolidare, recapitulare, sistematizare a unor elemente noi care să supună gândirea elevilor la un efort nou, rezolvarea exerciţiilor şi problemelor prin muncă independentă, sau să gândească matematic.

BIBLIOGRAFIE:

[1] Bruner, J. (1970). *Procesul educaţiei intelectuale*. Editura ştiinţifică, Bucureşti

[2] Mânzat, I. (1983). *Dezvoltarea gândirii ştiinţifice la elevi. In: Psihologia educaţiei şi dezvoltării*, coord. I. Radu. Editura Academiei, Bucureşti

[3] Voicu, V. (2012). *Optimizarea* î*nvăţământului în contextul societăţii bazate pe cunoaştere*" Conferinta Internaţionala

ELEMENTE AVANSATE DE EDITARE DOCUMENTE ȘI UTILITATEA LOR ÎN CARIERA DIDACTICĂ

Melinda CORITEAC

Liceul Teoretic "Constantin Șerban" Aleșd, jud. Bihor, profesor de informatică, melindacoriteac@yahoo.com

Rezumat: *Editoarele de texte sunt utilizate frecvent atât de profesori, cât și de elevi în activitatea lor didactică.*
Cuvinte cheie: editor de texte, Microsoft Word, document

Cariera didactică este o carieră complexă și nobilă prin misiunea sa, anume aceea de a forma tineri care se pot integra și adapta ușor în societatea în care trăim. Și cum "a preda înseamnă a învăța de două ori" [1], cadrul didactic trebuie să știe să își organizeze munca astfel încât să obțină randament maxim.

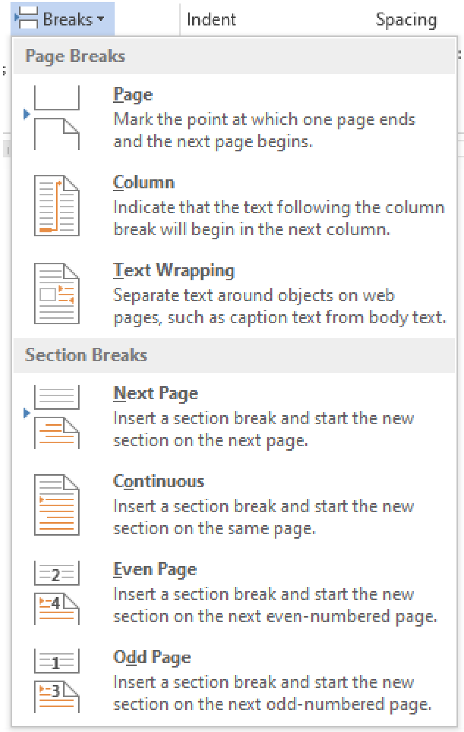
Editoarele de texte precum Microsoft Word, Google Docs ș.a. sunt unele din programele care, prin instrumentele pe care le pun la dispoziţie facilitează munca oricărui dascăl. Dintre aceste instrumente, în Microsoft Word, câteva ar fi cele care permit:

- lucrul cu secțiuni;
- îmbinarea corespondenței;
- inserarea automată a unui cuprins;
- urmărirea modificărilor aduse unui document;
- lucrul simultan în două zone diferite ale unui document.

Secțiunile unui document sunt părți ale documentului, având un mod propriu de formatare. Aceste secțiuni sunt necesare când se lucrează diferit cu părţi ale documentului. Între două secţiuni pot exista diferenţe în ceea ce priveşte orientarea textului, marginile, dimensiunile hârtiei, conţinutul antetului şi subsolului, numărul de coloane pe care este scris textul.

Iniţial orice document conţine o singură secţiune. Secţiunile pot să apară automat, odată cu unele formatări aduse documentului, precum modificarea numărului de coloane, formatarea diferită a paginilor documentului, dar pot fi și create de către utilizator utilizând meniul ***Breaks (Întreruperi)*** de pe fila ***Page Layout (Aspect Pagină)***.

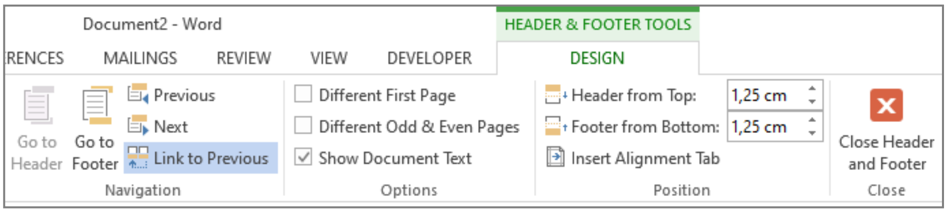
- Există patru tipuri de întreruperi de secțiune:
- ***pagina următoare*** (plasează textul ce urmează pe pagina următoare și se folosește în cazul în care paginile din document sunt formatate diferit – dimensiune, orientare, conținut antet și subsol ș.a.);
- ***continuă*** (textul va apărea pe aceeași pagină și se folosește de obicei în cazul în care în aceeași pagină există și text plasat pe mai multe coloane și text scris pe o singură coloană);
- ***pagina pară***, ***pagina impară*** – textul secţiunii noi va apărea pe următoarea pagină pară, respectiv pagină impară. Aceste tipuri de secţiuni se folosesc când anumite părţi din document trebuie să înceapă pe pagini pare, sau pe pagini impare.



Pe lângă un control mai bun asupra plasării textului şi a obiectelor în paginile documentului, lucruri pe care le oferă şi întreruperile de pagină (page breaks), lucrul cu secţiuni se poate utiliza de exemplu atunci când:

- într-un document trebuie să există atât pagini orientate tip portret cât şi pagini orientate tip vedere;
- antetul şi subsolul trebuie să conţină elemente diferite în zone diferite ale documentului, de exemplu într-un document există trei capitole şi numerotarea paginilor se face de la 1 la începerea fiecărui capitol sau atunci când în antet se doreşte scris titlul capitolului, asta presupunând trei texte diferite în antetul celor trei secţiuni care trebuie să existe în document.
- Se doreşte numerotarea de la 1 începând cu pagina a cincea a documentului. Acest lucru presupune două secţiuni, dintre care a doua trebuie să înceapă pe pagina 5.

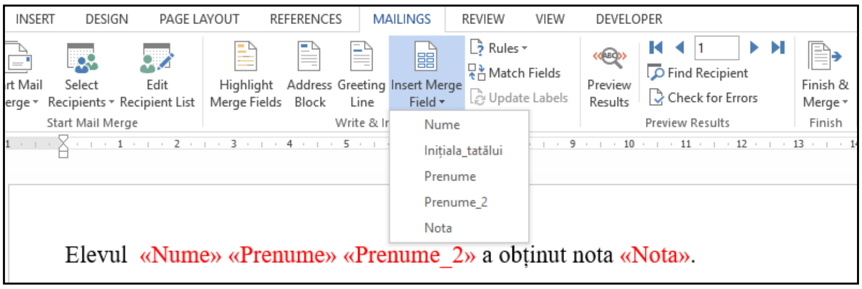
În ceea ce priveşte antetul şi subsolul documentului trebuie să se ţină cont de faptul că, indiferent câte secţiuni există într-un document, conţinutul antetelor şi ale subsolurilor sunt implicit legate între ele. Pentru a dezlega conţinuturile şi a putea particulariza diferit zonele respective se foloseşte butonul ***Link to previous***, de pe fila ***Design*** (apare când se editează antetul şi subsolul).



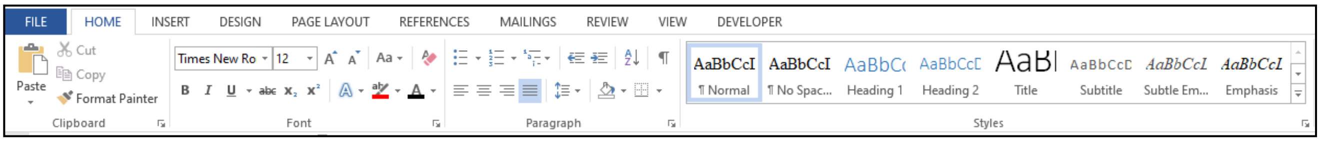
<u>**Instrumentul de îmbinare a corespondenţei**</u> este util în cazul în care cadrul didactic are de realizat documente în care poate prelua date din diverse baze/surse de date. Spre exemplu, dacă un cadrul didactic care este diriginte doreşte să comunice părinţilor situaţia şcolară a elevilor şi are la dispoziţie o bază de date cu mediile acestora, e suficient ca acesa să realizeze un document şablon în care, folosind instrumentul de îmbinare corespondenţă poate prelua apoi rapid şi uşor mediile elevilor şi poate obţine documente diferite pentru fiecare părinte în parte. Instrumentul se găseşte pe fila ***Mailings*** (***Corespondenţă***).

Paşii care trebuie urmaţi în folosirea acestui instrument sunt:

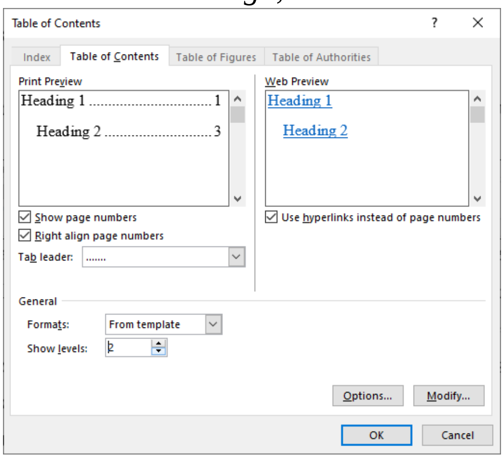
- se alege tipul de document cu care se va lucra (scrisori, plicuri, etichete, mesaje email ş.a.).
- se alege documentul de lucru (documentul curent, un şablon sau un document existent).
- se selectează sau se creează sursa de date. Sursa de date poate fi un document word care conţine datele într-un tabel, o foaie de calcul tabelar, o bază de date. Cele mai la îndemână fişiere utilizate de către cadrele didactice sunt documentele şi foile de calcul tabelar.
- se scrie/stabileşte conţinutul documentului, iar în zonele în care se doreşte preluarea datelor din sursa de date, se inserează câmpurile de îmbinare, utilizând meniul



- ***Insert Merge Field*** (***Inserare Câmp Corespondenţă***). În imaginea alăturată se observă, colorate cu roşu, câmpurile de îmbinare inserate în text. Textele din câmpurile de îmbinare pot fi formatate indepentent, după plac. Se pot previzualiza rezultatele apăsând butonul ***Preview Results***, iar butoanele cu săgeţi permit deplasarea între înregistrări.
- Se termină îmbinarea cu ajutorul meniului ***Finish & Merge***. Astfel rezultatul obţinut în urma îmbinării poate fi salvat ca document nou, poate fi tipărit sau trimis prin email.



<u>**Cuprinsul automat**</u> are la bază stiluri de scriere existente în document sau stiluri create de către utilizator. Stilurile se găsesc pe fila ***Home*** (***Pornire***) în zona ***Styles*** (***Stiluri***). Modificarea oricărui stil se poate realiza alegând opţiunea ***Modify***, din meniul contextual[2]. Înainte de a insera cuprinsul automat, utilizatorul trebuie să stabilească numărul de niveluri dorit în cuprins, stilurile folosite pentru aceste niveluri şi care sunt titlurile care vor apărea în cuprins, după care va trebui să asocieze fiecărui titlu, stilul corespunzător. De exemplu, dacă pentru titlurile de nivel 1 s-a ales stilul *Heading1*, toate titlurile respective trebuie formatate utilizând acel stil.



[2] Meniu contextual = meniu care apare la click dreapta pe un anumit element.

Inserarea efectivă a curpinsului se realizează de pe fila ***References*** (***Referințe***), cu ajutorul meniului ***Table of Contents→Custom Table of Contents***. Butonul **Options...** permite stabilirea stilurilor care vor fi utilizate în cuprins (se scrie 1, 2, 3 ... în dreptul stilurilor dorite).

Dintre avantajele lucrului cu cuprinsul automat se pot aminti:

- aspectul cuprinsului;
- ușurința cu care se crează;
- ușurința cu care se poate actualiza (***Update Table***) – se pot actualiza doar paginile sau atât paginile cât și elementele de conținut.

Practic, cuprinsul automat are la bază elemente de tip hyperlink și ancore în document, care asigură saltul de la elementele cuprinsului până la conținuturile respective.

Alte instrumente utile ale aplicației Microsoft Word sunt cele care permit **urmărirea tuturor modificărilor aduse unui document**. Acestea se găsesc pe fila ***Review*** (grupurile de butoane ***Tracking*** și ***Changes***). Odată pornită urmărirea modificărilor (Track Changes) cadrul didactic poate vedea toate modificările (completări, ștergeri, formatări) aduse documentului și le poate accepta (Accept) sau respinge (Reject).

Pentru a **acces simultan două zone diferite ale documentului**, în aceeași fereastră, utilizatorii au la dispoziție opțiunea ***Split*** (***Scindare***) de pe fila ***View*** (***Vizualizare***). Aceasta permite împărțirea ferestrei principale în două zone, astfel încât se se asigura accesul la zone diferite ale documentului.

Computerele și sistemele de calcul, în general, au fost create pentru a ușura munca omului, pentru a facilita prelucrarea automată a datelor. Editoarele/ procesoarele de texte precum Microsoft Word, Google Docs ș.a. sunt unele dintre puținele aplicații care stau dovadă afirmațiilor anterioare. Cunoașterea instrumentelor puse la dispoziție de aceste programe este esențială pentru oricare cadru didactic, deoarece învățarea continuă și perfecționarea competențelor digitale este esențială în vederea adaptării la cerințele și nevoile zilnice.

BIBLIOGRAFIE:

[1] Dulu, A. (2006). ECDL Start module obligatorii. ECDL modulul 3 – Procesare de texte - Word", Editura Andreco Educaţional

[2] Şova, R., Voicu, A.E. (2000). Tehnologia Informaţiei. Informatică – Tehnologii asistate de calculator, Manual pentru clasa a 10-a", Editura All Educaţional

[3] http://office.microsoft.com/en-us/word/HP100165231 033.aspx?pid=CH100970231033

INTEGRALA DE SUPRAFAȚĂ. FORMULA LUI STOKES

Larisa Ioana COROI

Studentă anul I, Matematică, Facultatea de Informatică și Științe, Universitatea din Oradea, larisacoroi@yahoo.com

Rezumat: *În această lucrare sunt prezentate noțiuni legate de integrala de suprafață arătându-se proprietățile și aplicarea formulei lui Stokes.*
Cuvinte cheie: integrale de suprafață, teorema lui Stokes

1. Integrala de suprafață în raport cu aria

Fie S o suprafață în spațiu definită de

$$x = f(u,v), \quad y = g(u,v), \quad z = h(u,v), \quad (u,v) \in D$$

funcțiile f, g, h fiind continue și având derivate parțiale de ordinul întâi continue în domeniul D (închis și mărginit) și $F(x, y, z)$ o funcție definită pe S.

Fie δ o diviziune a suprafeței S în părțile de suprafață $s_1, s_2, .., s_p$, de arii $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p$. Să considerăm suma

$$\Omega_\delta = \sum_{k=1}^{p} F(x_k, y_k, z_k) \cdot \sigma_k, \tag{1}$$

unde (x_k, y_k, z_k) este un punct oarecare situat pe s_k.

Diviziunii δ a lui S îi corespunde diviziunea δ' a lui D, iar părților de suprafață $s_1, s_2, .., s_p$ le corespund intervalele bidimensionale $d_1, d_2, \dots, dp$.

Punctului (x_k, y_k, z_k) de pe suprafața s_k îi corespunde un punct în plan (u_k, v_k), care aparține d_k. Deoarece punctul $(x_k, y_k, z_k) \in S$, corespunde un șir atunci avem

$$x_k = f(u_k, v_k), \quad y_k = g(u_k, v_k), \quad z_k = h(u_k, v_k)$$

și atunci suma Ω_δ dată de (1) devine:

$$\Omega_\delta^* = \sum_{k=1}^{n} F[f(u_k, v_k), g(u_k, v_k), h(u_k, v_k)] \cdot \sigma_k. \tag{1'}$$

Considerăm acum un șir de diviziuni (δ_n) ale suprafeței S cu $\nu(\delta_n) \to 0$ când $n \to \infty$. La șirul de diviziuni (δ_n) ale suprafeței S corespunde un șir de diviziuni (δ_n') ale domeniului D (închis și mărginit) de asemenea cu $\nu(\delta_n') \to 0$. La șirul de diviziuni (δ_n) ale suprafeței S corespunde șirul sumelor (Ω_{δ_n}).

Definiție 1.1 Dacă pentru orice șir de diviziuni (δ_n) ale suprafeței S cu $\nu(\delta_n) \to 0$, șirul sumelor (Ω_{δ_n}) are o limită finită, atunci limita șirului (Ω_{δ_n}) se numește integrala de suprafață a lui F în raport cu aria (sau de prima speță) și se notează

$$\iint_S F(x, y, z)\, d\sigma . \tag{2}$$

Deoarece suma $\Omega_\delta = \Omega_\delta^*$, atunci șirul sumelor $(\Omega_{\delta_n}^*)$ are aceeași limită cu șirul (Ω_{δ_n}) și obținem egalitatea

$$\iint_S F(x, y, z)\, d\sigma = \iint_D F[f(u,v), g(u,v), h(u,v)]\sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}\; du\, dv, \tag{2'}$$

care reprezintă formula de calcul a integralei de suprafață în raport cu aria.

Observația 1.2 1) Dacă $F(x,y,z)$ este continuă într-un domeniu $\Delta \subset \mathbb{R}^3$ și dacă $S \subset \Delta$, atunci există integrala (2) și integrala (2').

2) Dacă suprafața regulată S este dată sub forma explicită $z = f(x,y), (x,y) \in D$, atunci avem

$$\iint_S F(x,y,z)\, d\sigma = \iint_D F[x,y,f(x,y)] \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy.$$

3) Dacă $F(x,y,z) = 1$, pe S, obținem integrala de suprafață

$$\iint_S d\sigma = \iint_D \sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}\, du\, dv$$

care ne dă aria suprafeței S.

Exemplul 1.3 Să se calculeze integrala

$$\mathrm{I} = \iint_S (x+y+z)\, \mathrm{d}\sigma,$$

unde S este suprafața $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad z \geq 0.$

Soluție: Pentru suprafața S considerăm reprezentarea parametrică

$$\begin{cases} x = a\cos\theta\cos\varphi \\ y = a\sin\theta\cos\varphi \\ z = a\sin\varphi \end{cases}, \theta \in [0, 2\pi], \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Prin calcul găsim $d\sigma = \sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}\, d\theta\, d\varphi = a^2 \cos\varphi d\theta\, d\varphi.$

$$\mathrm{I} = \iint_S (x+y+z)\, \mathrm{d}\sigma$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\mathrm{a}\cos\theta\cos\varphi + \mathrm{a}\sin\theta\cos\varphi + \mathrm{a}\sin\varphi)\mathrm{a}^2\cos\varphi\, \mathrm{d}\varphi = 0 + 0 + \pi a^3 = \pi a^3$$

2. Integrala de suprafață în raport cu coordonatele

Să considerăm o suprafață S dată de ecuațiile

$x = f(u,v), \quad y = g(u,v), \quad z = h(u,v), \quad (u,v) \in D,$

f, g, h fiind funcţii continue cu derivate parţiale de ordinul întâi continue în domeniul închis şi mărginit D din planul uOv. Vom presupune că determinanţii funcţionali $\frac{D(x,y)}{D(u,v)}, \frac{D(y,z)}{D(u,v)}, \frac{D(z,x)}{D(u,v)}$ nu se anulează simultan în D, adică S este o suprafaţă netedă. În fiecare punct $P(x,y,z)$ al suprafeţei S se pot considera doi vectori normali la suprafaţă, $\overrightarrow{n_e}, \overrightarrow{n_i}$ având sensuri opuse. Unul dintre vectori va face un unghi ascuţit cu axa Oz, iar celălalt va face un unghi obtuz.

Definiție 2.1 Vom numi faţă superioară a suprafeţei S în raport cu planul xOy faţa lui S pentru care vectorul normal $\vec{n}$ face un unghi ascuţit cu axa Oz; vom numi faţă inferioară a suprafeţei S, cealaltă faţă a lui S, adică faţa pentru care vectorul normal $\vec{n}$ face un unghi obtuz cu axa Oz.

Fie Γ conturul suprafeţei S (care nu este o suprafaţă închisă) şi C proiecţia lui Γ pe planul xOy. Pe Γ se pot lua două sensuri de parcurs. Sensul asociat suprafeţei superioare este acela care corespunde sensului direct pe conturul C. Feţei inferioare i se asociază sensul invers. În acest mod se defIneşte un sens de parcurs pe conturul oricărei părţi din suprafaţa S. Spunem că suprafaţa S este orientată faţă de planul xOy, în acelaşi timp fiind orientat şi domeniul Δ, proiecţia suprafeţei S pe planul xOy, precum şi domeniul D din planul uOv.

Observaţia 2.2 Nu orice suprafaţă are două feţe. Există suprafeţe cu o singură faţă, suprafeţe pe care, printr-o deplasare continuă, normala schimbându-şi direcţia în mod continuu, poate reveni în punctul iniţial cu sensul opus sensului iniţial.

Fie $R(x,y,z)$ o funcție definită pe suprafața orientată S. Fie δ o diviziune a suprafeței S,

$$\delta = (s_1, s_2, \dots, s_p),$$

căreia îi corespunde o diviziune δ' a domeniului Δ, proiecția suprafeței S pe planul xOy,

$$\delta' = (\delta'_1, \delta'_2, \dots, \delta'_p)$$

s_k se proiectează pe δ'_k, iar frontiera lui s_k se proiectează pe frontier lui δ'_k) și fie

$$\omega_k = \begin{cases} \text{aria } \delta'_k, & \text{dacă } \delta'_k \text{ este orientat direct} \\ \\ -\text{aria } \delta'_k, & \text{dacă } \delta'_k \text{ este orientat invers} \end{cases}$$

Dacă notăm cu σ_k aria părții de suprafață s_k de pe S avem egalitatea $\omega_k = \gamma_k \sigma_k$, unde γ_k este cosinusul unghiului pe care îl face normala la suprafața orientată s_k într-un punct (x_k, y_k, z_k) aparținând suprafeței s_k, cu axa Oz.

Să considerăm suma

$$\Omega_{\delta'} = \sum_{k=1}^{p} R(x_k, y_k, z_k) \cdot \omega_k,$$

unde $R(x_k, y_k, z_k)$ este valoarea funcției R în punctual (x_k, y_k, z_k) de pe suprafața s_k, iar ω_k este aria proiecției δ'_k pe planul (xOy) a suprafeței s_k. Ținând cont de valoarea $\omega_k = \gamma_k \cdot \sigma_k$ obținem o altă sumă

$$\Omega^*_{\delta} = \sum_{k=1}^{p} R(x_k, y_k, z_k) \gamma_k \sigma_k$$

care este egală cu suma $\Omega_{\delta'}$.

Fie un șir de diviziuni (δ_n) ale suprafeței S cu $v(\delta_n) \to 0$ când $n \to \infty$. Acestui șir de diviziuni îi corespunde un șir de diviziuni (δ'_n) ale domeniului Δ cu $v(\delta'_n) \to 0$, când $n \to \infty$.

Definiție 2.3 Dacă pentru orice șir de diviziuni (δ'_n), cu $v(\delta'_n) \to 0$, când $n \to \infty$, șirul sumelor $(\Omega_{\delta'_n})$ are o limită finită, această limită se numește integrala de suprafață a funcției $R(x,y,z)$, în raport cu coordonatele x și y (sau de speța a doua), și se notează

$$\iint_S R(x,y,z)\, dxdy\,.$$

Deoarece șirul sumelor $(\Omega^*_{\delta_n})$ are aceeași limită cu șirul $\left(\Omega_{\delta'_n}\right)$ și obținem egalitatea

$$\iint_S R(x,y,z)\, dxdy = \iint_S R(x,y,z)\gamma\, d\sigma\,,$$

care reprezintă formula de calcul a integralei de suprafață în raport cu coordonatele x, y.

Observația 2.4 Dacă se dă o reprezentare parametrică a suprafeței S
$x = f(u,v), \quad y = g(u,v), \quad z = h(u,v), \quad (u,v) \in D,$
atunci are loc egalitatea

$$\iint_S R(x,y,z)\,dxdy = \iint_D R[f(u,v), g(u,v), h(u,v)]\gamma\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}\,du\,dv,$$

unde $\gamma = \frac{1}{\pm\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}} \cdot \frac{D(f,g)}{D(u,v)}$,
obținem așadar, două integrale

$$\iint_S R(x,y,z)\,dxdy = \iint_D R[f(u,v), g(u,v), h(u,v)] \cdot \frac{D(f,g)}{D(u,v)}du\,dv$$

(dacă domeniul D are aceeași orientare cu domeniul Δ)

$$\iint_S R(x,y,z)\,dxdy = -\iint_D R[f(u,v), g(u,v), h(u,v)] \cdot \frac{D(f,g)}{D(u,v)}du\,dv$$

(dacă domeniul D are orientare inversă față de domeniul Δ).

Dacă $P(x,y,z)$ este o funcție definită pe suprafața S, integrala de suprafață a funcției $P(x,y,z)$ în raport cu y,z, pe o anumită față a suprafeței S se definește integrala

$$\iint_S P(x,y,z)\,dydz = \iint_S P(x,y,z)\alpha\,d\sigma\,,$$

unde α este cosinusul unghiului pe care îl face normala la suprafață orientată S cu axa Ox. Dacă domeniul D are aceeași orientare cu suprafața S, atunci avem egalitatea

$$\iint_S P(x,y,z)\,dydz = \iint_D P[f(u,v), g(u,v), h(u,v)] \cdot \frac{D(g,h)}{D(u,v)}du\,dv,$$

dacă domeniul D este orientat invers, obținem

$$\iint_S P(x,y,z)\,dydz = -\iint_D P[f(u,v), g(u,v), h(u,v)] \cdot \frac{D(g,h)}{D(u,v)}du\,dv,$$

Remarca 2.5 Formulele de mai sus ne dau regula de calcul a integralei de suprafață în raport cu y,z.
Analog se procedează pentru $Q(x,y,z)$.

Observația 2.6 Integrala de suprafață de speța a doua se reduce la o integrală de suprafață de speța întâi

$$\iint_S P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iint_S (P\,\alpha + Q\,\beta + R\gamma)d\sigma.$$

Exemplu 2.7 Să se calculeze următoarea integrala

$$\mathrm{I} = \iint_S x\,dydz + y\,dxdz + z\,dxdy,$$

unde S este fața exterioară a sferei $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.
Soluție: Versorul normalei n atașat feței exterioare a sferei este $n\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}, \frac{z}{a}\right)$, astfel obținem

$$\mathrm{I} = \iint\limits_S \left(\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{a} + \frac{z^2}{a}\right) d\sigma = \iint\limits_S \frac{a^2}{a}\, d\sigma = a \iint\limits_S d\sigma = 4\pi a^3,$$

deoarece aria sferei este $\iint_S d\sigma = 4\pi a^2$.

3. Formula lui Stokes

Teorema 3.1 (Teorema lui Stokes) Fie S o suprafață regulată cu două fețe, care se sprijină pe conturul închis regulat C. Dacă funcțiile $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ sunt funcții continue și cu derivate parțiale de ordinal întâi continue într-un domeniu $\Delta \subset \mathbb{R}^3$ care conține suprafața S, atunci are loc egalitatea

$$\int\limits_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint\limits_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy,$$

care se numește formula lui Stokes sau formula integrală a lui Stokes.

<u>Demonstrație</u>. Vom calcula doar integrala curbilinie de al doilea tip $\int_c P dx$. Avem

$dx = d\big(x(u,v)\big) = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv,$ Deci $\int_c P dx = \int_\Gamma P\left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv\right)$

Acum, pentru integral din membru drept aplicăm formula lui Green și obținem

$$\int\limits_\Gamma P \frac{\partial x}{\partial u} du + P\frac{\partial x}{\partial v} dv = \iint\limits_D \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(P \cdot \frac{\partial x}{\partial u}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(P \cdot \frac{\partial x}{\partial v}\right)\right] dudv$$

$$= \iint\limits_D \left[\frac{\partial P}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + P \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} - P \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\right] dudv$$

Dar

$$\frac{\partial P}{\partial u} = \frac{\partial P(x(u,v), y(u,v), z(u,v))}{\partial u} = \text{derivarea fcț compuse}$$
$$= \frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}$$

$$\frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial P(x(u,v), y(u,v), z(u,v))}{\partial u} = \text{derivarea fcț compuse}$$
$$= \frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}$$

Deci

$$\int\limits_\Gamma P\left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv\right) =$$
$$= \iint\limits_D \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial v} - \left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial x}{\partial u}\right] dudv$$

$$= \iint_D \left[\frac{\partial P}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right) - \frac{\partial P}{\partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\right] dudv$$

$$= \iint_D \left[\frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{D(h,f)}{D(u,v)} - \frac{\partial P}{\partial y}\cdot\frac{D(f,g)}{D(u,v)}\right] dudv$$

Am obținut deci

$$\int_C Pdx == \iint_D \left[\frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{D(h,f)}{D(u,v)} - \frac{\partial P}{\partial y}\cdot\frac{D(f,g)}{D(u,v)}\right] dudv = \iint_S \frac{\partial P}{\partial z} dzdx - \frac{\partial P}{\partial y} dydz$$

și prin permutări circulare deduce

$$\int_C Qdy = \iint_S \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy - \frac{\partial Q}{\partial z} dydz, \int_C Rdz = \iint_S \frac{\partial R}{\partial y} dydz - \frac{\partial R}{\partial x} dzdx$$

Remarca 3.2 Dacă se ia drept suprafață un domeniu plan D (adică $z = 0$) formula lui Stokes devine formula lui Green, adică

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

Exemplu 3.3 Să se calculeze

$$\mathrm{I} = \int_C (x^2 - yz)dx + (y^2 - zx)dy + (z^2 - xy)dz,$$

unde C este o curbă închisă din $\mathbb{R}^3$.

Soluție: Aplicând formula lui Stokes avem

$P(x,y,z) = x^2 - yz, \quad Q(x,y,z) = y^2 - zx, \quad R(x,y,z) = z^2 - xy$

de unde rezultă:

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = -x + x = 0, \qquad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = -y + y = 0, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -z + z = 0$$

deci $\mathrm{I} = 0$.

BIBLIOGRAFIE

[1] Roșculeț, M. (996). Analiză Matematică, vol. 1, vol. 2, Editura Didactică și Pedagogică, București

[2] Roșculeț, M. (1984). Analiză Matematică, Editura Didactică și Pedagogică, București

[3] Oros, G. I., Calcul integral, Editura Universității din Oradea, 2013

[4] Oros, G., Oros, G. I. (2001). Matematici Superioare, Analiză Matematică, Editura Universității din Oradea

[5] Chiriță, S. (1989). Probleme de Matematici Superioare, Editura Didactică și Pedagogică, București

OPERATORUL AUTO-ADJUNCT KOROVKIN ȘI APROXIMĂRI DIRECTE POLINOMIALE CU RATE

Irina-Maria COSMA

Studentă anul III, Matematică, Facultatea de Informatică și Științe, Universitatea din Oradea, cosmairina10@yahoo.com

Rezumat: *În această lucrare prezentăm teoreme de tip Korovkin cu operatori autonomi, prin inegalități de tip Shisha-Mond ale operatorului auto-adjunct, de asemenea facem și aproximări de operatori polinomial autonomi. Aceasta este o abordare cantitativă care determină gradul aproximării cu rate uniforme ale operatorilor autonomi, a secvențelor operatorului auto-adjunct liniar pozitiv. Același tip de lucru se efectuează și asupra secvențelor polinomiale importante de operatori. Abordarea noastră este bazată direct pe izometria Gelfand.*

Cuvinte cheie: operator liniar, spațiu complex Hilbert, operator auto-adjunct, spațiu Hilbert.

1. Introducere

Fie A un operator liniar auto-adjunct pe un spațiu complex Hilbert $(H;\langle\cdot,\cdot\rangle)$. Aplicația Gelfand stabileşte un $*-$izomorfism izometric Φ între n mulțimea $C(Sp(A))$ al tuturor funcțiilor continue definite pe spectrul A, notat $Sp(A)$, și C^*-algebra $C^*(A)$ generat de A și operatorul identitate 1_H în H după cum urmează:

Pentru orice $f,g \in C(Sp(A))$ și orice $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$ avem:

(i) $\Phi(\alpha f+\beta g)=\alpha\Phi(\mathrm{f})+\beta\Phi(\mathrm{g})$;

(ii) $\Phi(fg)=\Phi(\mathrm{f})\Phi(\mathrm{g})$ și $\Phi(\overline{f})=(\Phi(f))^*$;

(iii) $\|\Phi(f)\|=\|f\|:=\sup_{t\in Sp(A)}|f(t)|$;

(iv)$\Phi(f_0)=1_H$ și $\Phi(f_1)=A$, unde $f_0(t)=1$ și $f_1(t)=t$, pentru $t\in Sp(a)$.

Cu această notație definim

$$f(A):=\Phi(f),\text{ pentru toate } f\in C(Sp(A)),$$

și o numim calculul funcțional continuu pentru un operator auto-adjunct A.

Dacă A este un operator auto-adjunct și f este o funcție continuă cu valori reale în $Sp(A)$, atunci $f(t)\geq 0$ pentru orice $t\in Sp(A)$ implică că $f(A)\geq 0$, adică $f(A)$ este un operator pozitiv în H. Mai mult, dacă f și g sunt funcții continue cu valori reale pe $Sp(A)$ atunci au loc următoarele proprietăți importante:

(P) $f(t)\geq g(t)$ pentru orice $t\in Sp(A)$, implică că $f(A)\geq g(A)$ în ordinea operatorului $B(H)$.

Echivalent, folosim: fie U un operator auto-adjunct pe un spațiu complex Hilbert $(H;\langle\cdot,\cdot\rangle)$ cu spectrul $Sp(U)$ inclus în intervalul $[m,M]$ pentru unele numere reale $m<M$ și $\{E_\lambda\}_\lambda$ este familia sa spectrală.

Atunci pentru orice funcție continuă $f:[a,b]\to\mathbb{C}$, unde $[m,M]\subset(a,b)$ se cunoaște că avem următoarea reprezentare spectrală în termenii integralei Riemann-Stieljes:

$$\langle f(U)x,y\rangle=\int_{m-0}^{M} f(\lambda)d(\langle E_\lambda x,y\rangle)\,,$$

pentru orice $x,y\in H$. Funcția $g_{x,y}(\lambda):=\langle E_\lambda x,y\rangle$ este de variație limitată pe intervalul $[m,M]$ și

$$g_{x,y}(m-0)=0 \text{ și } g_{x,y}(M)=\langle x,y\rangle,$$

pentru orice $x,y\in H$. Mai departe se cunoaște că $g_x(\lambda):=\langle E_\lambda x,x\rangle$ este crescătoare și drept continuă pe $[m,M]$.

În acest capitol vom folosi foarte des formula

$$\langle f(U)x, x\rangle = \int_{m-0}^{M} f(\lambda)\, d(\langle E_\lambda x, x\rangle), \ \ \forall x \in H.$$

Ca și simbol putem scrie

$$f(U) = \int_{m-0}^{M} f(\lambda)\, dE_\lambda.$$

Mai mult, $m = min\{\lambda | \lambda \in Sp(U)\} := \min Sp(U)$, $M = max\{\lambda | \lambda \in Sp(U)\} := \max Sp(U)$

Proiecțiile $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ sunt numite familia spectrală ale lui A, cu proprietățile:

(a) $E_\lambda \le E_{\lambda'}$ *pentru* $\lambda \le \lambda'$;

(b) $E_{m-0} = 0_H$ (operatorul nul), $E_M = 1_H$ (operatorul identitate) și $E_{\lambda+0} = E_\lambda$ pentru toate $\lambda \in \mathbb{R}$.

În plus

$$E_\lambda := \varphi_\lambda(U), \forall\, \lambda \in \mathbb{R},$$

este o proiecție care reduce U cu

$$\varphi_\lambda(s) := \begin{cases} 1 & , pentru -\infty < s \le \lambda\,, \\ 0 & , pentru\ \ \lambda < s < +\infty. \end{cases}$$

Familia spectrală $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ determină în mod unic operatorul auto-adjunct U și vice versa.

Sunt oferite câteva elemente de bază.

Fie $(H; \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un spațiu Hilbert peste $\mathbb{C}$. Un operator liniar limitat A definit pe H este auto-adjunct, adică, $A = A^*$, dacă și numai dacă $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}, \forall x \in H$, și dacă A este auto-adjunct, atunci

$$\|A\| = \sup_{x \,\in\, H:\, \|x\| \,=\, 1} |\langle Ax, x\rangle|.$$

Fie A, B un operator auto-adjunct pe H. Atunci $A \le B$ dacă și numai dacă $\langle Ax, x\rangle \le \langle Bx, x\rangle, \forall x \in H$.

În particular, A este numit pozitiv dacă $A \ge 0$.

Notat ca

$$P := \left\{\varphi(s) := \sum_{k=0}^{n} \alpha_k s^k | n \ge 0, \alpha_k \in \mathbb{C}, 0 \le k \le n\right\}.$$

Dacă $A \in B(H)$(Algebra Banach pentru toți operatorii liniari limitați definiți pe H, adică din H în sine) este auto-adjunct, și $\varphi(s) \in P$ are coeficienți reali, atunci $\varphi(A)$ este auto-adjunct, și

$$\|\varphi(A)\| = max\{|\varphi(\lambda)|, \lambda \in Sp(A)\}.$$

Dacă φ este orice funcție definită pe $\mathbb{R}$ definim

$$\|\varphi\|_A := sup\{|\varphi(\lambda)|, \lambda \in Sp(A)\}.$$

Dacă A este un operator auto-adjunct pe spațiul Hilbert H și φ este continuu și cunoscându-se că $\varphi(A)$ este auto-adjunct, atunci $\|\varphi(A)\| = \|\varphi\|_A$. Și dacă φ este o funcție continuă cu valori reale așa este și $|\varphi|$, atunci $\varphi(A)$ și $|\varphi|(A) = |\varphi(A)|$ sunt operatori auto-adjuncți. (din [1], p. 4, Teorema 7)

Prin urmare este valabil

$$\||\varphi(A)|\| = \||\varphi|\|_A = sup\{\|\varphi(\lambda)\|, \lambda \in Sp(A)\} = sup\{|\varphi(\lambda)|, \lambda \in Sp(A)\} = \|\varphi\|_A$$
$$= \|\varphi(A)\|,$$

care este $\||\varphi(A)|\| = \|\varphi(A)\|$.

Pentru un operator auto-adjunct $A \epsilon B(H)$ care este pozitiv, există un unic operator auto-adjunct pozitiv $B := \sqrt{A} \in B(H)$ astfel încât $B^2 = A$, care este $(\sqrt{A})^2 = A$. Numim B rădăcina pătrată a lui A.

Fie $A \in B(H)$, atunci A^*A este auto-adjunct și pozitiv. Definim „valoarea absolută a operatorului” $|A| := \sqrt{A^*A}$. Dacă $A = A^*$, atunci $|A| = \sqrt{A^2}$.

Pentru o funcție continuă cu valori reale φ observăm următoarele:
$|\varphi(A)|$ (valoarea absolută funcțională) =
$\int_{m-0}^{M} |\varphi(\lambda)|\, dE_\lambda = \int_{m-0}^{M} \sqrt{(\varphi(\lambda))^2 dE_\lambda} = \sqrt{(\varphi(A))^2} = |\varphi(A)|$ (operatorul valoare absolută), unde A este un operator auto-adjunct.

Așadar avem:
$|\varphi(A)|$ (valoarea absolută funcțională) = $|\varphi(A)|$ (operatorul valoare absolută).

Următoarea provine din [3].

Spunem că o secvență $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B(H)$ converge uniform la A, dacă și numai dacă
$$\lim_{n\to\infty} \|A_n - A\| = 0,$$
și notăm ca $\lim_{n\to\infty} A_n = A$.

Vom folosi inegalitatea lui Hölder-McCarthy 1967([3]), Fie A un operator auto-adjunct pe un spațiu Hilbert H. Atunci:
$\langle A^r x, x\rangle \le \langle Ax, x\rangle^r$,
pentru toate $0 < r < 1$ și $x \in H$: $\|x\| = 1$.

Fie $A, B \in B(H)$, atunci
$$\|AB\| \le \|A\|\|B\|,$$
prin proprietatea algebrei Banach.

2. Rezultate principale

Aici derivăm teoremele de tip Korovkin cu operatori auto-adjuncți prin inegalități de tip
operator-Shisha-Mond. Aceasta este o abordare cantitativă, studierea gradului de aproximare a operatorului-uniform cu ratele de secvență ale operatorilor liniari pozitivi în ordinea operatorului $B(H)$. Vom continua în mod similar cu operatorii polinomiali importanți. Abordarea noastră este bazată direct pe izometria lui Gelfand.

Toate funcțiile cu care lucrăm au valori reale. Presupunem că $Sp(A) \subseteq [m, M]$.

Fie $\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ o secvență de operatori liniari pozitivi din $C([m, M])$ în sine (adică dacă $f, g \in) C([m, M])$ astfel încât $f \ge g$, atunci $L_n(f) \ge L_n(g)$). Este interesant să studiem convergența $L_n \to I$ (unic operator, adică $I(F) = f, \forall f \in C([m, M])$). Din proprietatea (i) reiese
$$\Phi(L_n f - f) = \Phi(L_n f) - \Phi(f) = (L_n f)(A) - f(A),$$
și
$$\Phi(L_n 1 \pm 1) = \Phi(L_n 1) \pm \Phi(1) = (L_n 1)(A) \pm 1_H,$$
ultima reiese din proprietatea (iv).

Din proprietatea (iii) reiese că
$$\|\Phi(L_n f - f)\| = \|(L_n f)(A) - f(A)\| = \|L_n f - f\|,$$
și
$$\|\Phi(L_n 1 \pm 1)\| = \|(L_n 1)(A) \pm 1_H\| = \|L_n(1) \pm 1\|.$$

Avem următoarele teoreme.

Teorema 1. *(Shisha și Mond ([4]), 1968) Fie $\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ o secvență de operatori liniari pozitivi din C($[m, M]$) în sine. Pentru n=1,2,..., presupune $L_n(1)$ este limitat. Fie $f \in C([m, M])$. Atunci pentru n=1,2,..., avem*
$$\|L_n f - f\|_\infty \le \|f\|_\infty \|L_n 1 - 1\|_\infty + \|L_n(1) + 1\|_\infty \omega_1(f, \mu_n), \tag{1}$$
unde

$$\mu_n := \|L_n((t-x)^2\|_{\infty}^{\frac{1}{2}},$$

cu

$$\omega_1(f,\delta) := \sup_{\substack{x,y\in[m,M]\\|x-y|\leq\delta}} |f(x)-f(y)|, \quad \delta > 0,$$

și $\|\cdot\|_{\infty}$ reprezintă sup-norma peste $[m, M]$.

În particular, dacă $L_n(1) = 1$, atunci (1) devine

$$\|L_n(f) - f\|_{\infty} \leq 2\omega_1(f, \mu_n).$$

Note: (i) În formarea μ_n^2, x este fix, dar t formează funcțiile t, t^2 pe care L_n acționează;

(ii) Putem găsi, pentru $n = 1,2, \ldots,$

$$\mu_n^2 \leq \left\|\big(L_n(t^2)\big)(x) - x^2\right\|_{\infty} + 2c\left\|\big(L_n(t)\big)(x) - x\right\|_{\infty} + c^2\left\|\big(L_n(1)\big)(x) - 1\right\|_{\infty},$$

unde,

$$c := \max(|m|, |M|).$$

Așadar, dacă presupunerile lui Korovnik sunt îndeplinite, adică dacă $L_n(id^2) \xrightarrow{u} id^2$, $L_n(id) \xrightarrow{u} id$ și $L_n(1) \xrightarrow{u} 1$, ca $n \to \infty$, id este aplicația identică și u este convergența uniformă, atunci $\mu_n \to 0$, și $\omega_1(f, \mu_n) \to 0$, ca $n \to +\infty$, și obținem din (1) că $\|L_n f - f\|_{\infty} \to 0$, adică $L_n(f) \xrightarrow{u} f$, ca $n \to \infty, \forall f \in C([m, M])$.

Teorema 2. *La fel ca în teorema 1. Atunci*

$$\|(L_n f)(A) - f(A)\| \leq \|f(A)\|\|(L_n 1)(A) - 1_H\| + \left\|\big(L_n(1)\big)(A) + 1_H\right\|\omega_1(f, \mu_n), \tag{2}$$

unde

$$\mu_n := \|L_n((t-A)^2)(A)\|^{\frac{1}{2}}$$

În particular, dacă $\big(L_n(1)\big)(A) = 1_H$, atunci

$$\left\|\big(L_n(f)\big)(A) - f(A)\right\| \leq 2\omega_1(f, \mu_n).$$

În continuare este valabil

$$\mu_n^2 \leq \|(L_n(t^2))(A) - A^2\| + 2c\left\|\big(L_n(t)\big)(A) - A\right\| + c^2\left\|\big(L_n(1)\big)(A) - 1_H\right\|. \tag{3}$$

Așadar, dacă $\big(L_n(t^2)\big)(A) \to A^2, \big(L_n(t)\big)(A) \to A, (L_n(1))(A) \to 1_H$, uniform, ca $n \to \infty$.

Stabilim teorema Korovkin a operatorului auto-adjunct cu rate.

Apoi urmăm [5], pg. 273-274.

Teorema 3. *Fie $L_n: C([m, M]) \to C([m, M]), n \in \mathbb{N}$, este o secvență de operatori liniari pozitivi, $f \in C([m, M]), g \in C([m, M])$ și este o $(1-1)$ funcție.*

Presupunem că $\{L_n(1)\}_{n\in\mathbb{N}}$ este uniform limitată. Atunci

$$\|(L_n f) - f\| \leq \|f\|\,\|(L_n(1) - 1\| + (1 + \|L_n(1)\|)\omega_g(f, \rho_n), \tag{4}$$

unde

$$\omega_g(f, h) := \sup_{x,y}\{|f(x) - f(y)| : |g(x) - g(y)| \leq h\},$$

$h > 0, cu$

$$\rho_n := (\left\|L_n\big((g - g(y))^2\big)(y)\right\|)^{\frac{1}{2}}.$$

Aici $\|\cdot\|$ reprezintă norma supremă. Dacă $L_n(1) = 1$, atunci (4) se simplifică în $\|L_n(f) - f\| \leq 2\omega_g(f, \rho_n)$.

La fel avem că

$$\rho_n^2 \leq \|L_n(g^2) - g^2\| + 2\|g\|\|L_n(g) - g\| + \|g\|^2\|L_n(1) - 1\|.$$

Dacă $L_n(1) \xrightarrow{u} 1, L_n(g) \xrightarrow{u} g, L_n(g^2) \xrightarrow{u} g^2$, *atunci* $\omega_g(f, \rho_n) \to 0$, *și atunci* $L_n(f) \xrightarrow{u} f$, *ca* $n \to +\infty, \forall f \in C([m, M])$, *unde u reprezintă convergența uniformă, așadar obținem o generalizare cantitativă a teoremei Korovkin, și clar prin* $L_n(1) \xrightarrow{u} 1$, *obținem* $\|L_n(1)\| \leq K, \forall n \in \mathbb{N}, unde\ K > 0$.

BIBLIOGRAFIE

[1] Dragomir, S. (2012). Operator inequalities of Ostrowski and Trapezoidal type, Springer, New York

[2] Dragomir, S. (2011). Inequalities for functions of selfadjoint operators on Hilbert Spaces, ajmaa.org/RGMIA/monographs?InFuncOp.pdf

[3] Bartle, R.G. (1976). The Elements of Real Analysis, 2nd edition, John Wiley &Sons, New York

[4] Shisha O., Mond B., (1968). The degree of convergence of sequences of linear positive operator, Nat. Acad. Of Sci. U.S., Vol.60, pp.1196-1200.

[5] Anastassiou, G.A. (2011). Intelligent Mathematics, Computational Analysis, Springer, Heidelberg, New York

METODE CENTRATE PE ELEV APLICATE LA MATEMATICĂ

Marinel Costel COSTEA

Școala Gimnazială nr. 1, Răbăgani, profesor de matematică, costelc11@yahoo.com

***Rezumat**: Matematica este, într-adevăr, un domeniu extrem de important și serios în educație și în lume în general. De aceea, este important să nu pierdem ocazia de a face matematica mai atractivă și mai accesibilă pentru toți. În această lucrare am prezentat trei exemple de integrare a metodelor centrate pe elev în cadrul orelor de matematică.*

Cuvinte cheie: Metoda Ştiu/ Vreau să ştiu/ Am învăţat, metoda „Cubul”, metoda Ciorchinelui

Decizia privind metodele de învățare folosite pentru atingerea obiectivelor propuse este puternic influențată de tipul de abordare didactică pe care îl adoptăm în procesul de proiectare al lecției. În contextul noii paradigme curriculare, se impune o revizuire profundă a rolului profesorului de matematică în clasă și redefinirea dinamicii profesor-elev.

În cadrul noii abordări didactice, profesorul își asumă un rol mult mai complex și interactiv în clasă. El devine, în esență, moderatorul unei dezbateri de idei ce are loc în rândul elevilor. Aceasta implică nu doar transmiterea de cunoștințe, ci și crearea unui mediu stimulant în care elevii sunt încurajați activ să-și exprime opiniile și să participe la discuții. Profesorul nu mai este doar sursa de informații, ci și ghidul care îi îndrumă pe elevi în descoperirea și dezvoltarea abilităților lor individuale. Acesta îi motivează să gândească critic, să exploreze idei noi și să dezvolte capacitatea de a argumenta și susține propriile convingeri.

Învățarea centrată pe elev reprezintă un concept fundamental în această abordare didactică. Ea presupune că elevul este în centrul procesului de învățare și că acesta trebuie să fie activ implicat în propriul său proces de dezvoltare. Stilul de învățare devine activ și interactiv, iar profesorul ajustează programul de învățare pentru a se potrivi cu ritmul de învățare al fiecărui elev în parte. Astfel, nu există un ritm prestabilit pentru toți, ci se recunoaște faptul că fiecare elev învață în mod diferit și în propriul său timp. Mai mult decât atât, acest model educativ încurajează elevul să preia responsabilitatea pentru propriile progrese în ceea ce privește educația sa, făcându-l astfel partener activ în procesul de învățare și dezvoltare.[2]

În ceea ce privește punerea în practică a procesului instructiv-educativ axat pe tema "Paralelograme particulare", am elaborat o serie de activități de învățare meticulos planificate, având ca obiectiv oferirea elevului unei experiențe educaționale cuprinzătoare:

- Valorificarea cunoștințelor anterioare: În primul rând, am propus activități care să permită elevilor să-și utilizeze cunoștințele și abilitățile dobândite anterior în contextul patrulaterelor. Aceasta implică conectarea la ceea ce au învățat înainte și integrarea acestor cunoștințe în noul context.
- Formarea unui punct de vedere independent și argumentat: Am promovat dezvoltarea abilităților de gândire critică și analitică prin intermediul activităților care au solicitat elevilor să-și formeze propriul punct de vedere cu privire la evoluția societății și la rolul patrulaterelor în aceasta. Elevii au fost încurajați să-și exprime opiniile în mod argumentat, contribuind astfel la dezvoltarea abilităților lor de comunicare și de argumentare.
- Dezvoltarea abilităților de lucru în grup, asumarea riscurilor și responsabilităților, comunicarea: Am creat oportunități pentru elevi să lucreze în grup, să-și asume roluri și responsabilități în cadrul acestor grupuri și să comunice eficient atât între ei, cât și cu profesorul. Aceste activități au fost concepute pentru a dezvolta abilități sociale și de colaborare, precum și pentru a-i încuraja pe elevi să-și asume riscuri în procesul de învățare.

În ansamblu, aceste activități au fost proiectate pentru a crea un mediu educațional interactiv și stimulant, în care elevii să poată dobândi cunoștințe și abilități esențiale în contextul studiului paralelogramelor, dar și pentru a promova dezvoltarea lor ca indivizi independenți, critici și responsabili în societate.

În continuare voi prezenta și exemplifica două dintre metodele utilizate.

Metoda Ştiu/ Vreau să ştiu/ Am învăţat

Această metodă, reprezintă o tehnică educațională utilizată în principal în faza de introducere și dezvoltare a înțelegerii unui subiect sau concept, dar și în procesul de conștientizare a elevilor cu privire la propriile lor cunoștințe și întrebări legate de subiect. Această abordare încurajează elevii să reflecteze asupra a ceea ce știu deja, să identifice ceea ce doresc să afle și să urmărească cum își extind cunoștințele pe parcursul lecției sau activității educaționale.[1]

Procesul este simplu și implică următorii pași:

1. "Ştiu" (Ce credem că ştim?): În această etapă, elevilor li se cere să evalueze cunoştinţele existente referitoare la subiectul respectiv. Aceasta poate fi realizată individual sau prin discuții în perechi sau grupuri mai mari. Elevii notează ideile pe care consideră că le dețin în rubrica "Ştiu". Acestea sunt informațiile sau conceptele pe care ei cred că le cunosc deja sau pe care le-au învățat înainte de a aborda subiectul.

2. "Vreau să ştiu" (Ce vrem să ştim?): În acest stadiu, elevii notează întrebările pe care le au cu privire la subiect sau ceea ce doresc să afle în legătură cu acesta. Aici, ei identifică lacunele în cunoștințele lor sau subiectele pe care le găsesc interesante și pe care doresc să le exploreze. Aceste idei sunt grupate în rubrica "Vreau să ştiu".

3. "Am învăţat" (Ce am învăţat?): După ce au studiat un text, au realizat o investigație sau au dobândit cunoștințe noi sub îndrumarea profesorului, elevii trec la ultima fază. În această etapă, ei inventariază și notează ceea ce au învățat și au reținut din cunoștințele noi obținute. Aceste idei și informații sunt înregistrate în rubrica "Am învăţat".

Această metodă are avantajul de a implica elevii în procesul de învățare și de a le permite să-și evalueze și să-și dezvolte propriile cunoștințe și competențe într-un mod activ și reflexiv. Ea încurajează gândirea critică și stimulează curiozitatea și dorința de a afla mai mult.

Exemplu: Utilizarea metodei "Ştiu - Vreau să ştiu - Am învăţat", pentru sarcina de lucru: Ce ştiţi despre paralelogram?

Pasul 1: "Ştiu" (Ce credem că ştim?):

În prima parte a lecției, am început prin a-i întreba pe elevi: "Ce știți deja despre paralelogram?" Elevii au fost încurajați să reflecteze asupra cunoștințelor lor existente și să noteze ideile pe care le aveau cu privire la paralelogram în rubrica "Ştiu". Exemple de răspunsuri "un paralelogram este un patrulater" sau "există diferite tipuri de paralelograme, cum ar fi pătratul și dreptunghiul".

Pasul 2: "Vreau să ştiu" (Ce vrem să ştim?):

În acest pas, am încurajat elevii să-și exprime curiozitățile și întrebările legate de subiectul paralelograme particulare. Se poate întreba: "Ce lucruri despre paralelograme v-ar interesa să aflați în această lecție?" Elevii vor nota întrebările lor și dorințele lor de învățare în rubrica "Vreau să ştiu". Exemple de întrebări ar putea include "Care sunt proprietățile unui pătrat?" sau "Cum se calculează aria unui romb?"

Pasul 3: "Am învăţat" (Ce am învăţat?):

În ultima parte a lecției, am prezentat conținutul principal referitor la paralelogramele particulare, inclusiv definiții, proprietăți și exemple practice. Pe măsură ce lecția avansează, elevii vor urmări atent și vor învăța noile informații. După ce au terminat studierea materialelor și activităților legate de paralelogramele particulare, elevii vor reflecta asupra a ceea ce au învățat și vor nota în rubrica "Am învăţat" ideile și conceptele cheie pe care le-au dobândit. Aceasta poate include, de exemplu, "Am învățat că rombul este un paralelogram cu toate laturile egale" sau "Am învăţat cum să calculez perimetrul unui pătrat."

Metoda "Cubul"

Metoda "Cubul" este o strategie didactică interactivă și creativă folosită pentru a explora mai profund un subiect sau o problemă din mai multe perspective. Această metodă implică prezentarea subiectului într-un mod tridimensional, în care fiecare "față" a cubului reprezintă o altă dimensiune sau un alt aspect al subiectului. [1]

Am folosit metoda în partea de predare urmând pașii de mai jos:

Pas 1: Am împărțit clasa în șase grupe de câte trei elevi;

Pas 2: Am construit un cub pe ale cărui fețe am notat: descrie, compară, asociază, analizează, aplică, argumentează;

Pas 3: Fiecare grup examinează tema din perspectiva cerinței aflată pe una dintre fețele cubului:

a) Descrie! – Paralelogramul.

b) Compară! – Tipuri de paralelograme particulare

c) Asociază! – Asemănări şi deosebiri ale paralelograme particulare cunoscute.

d) Analizează! – Paralelogramul.

e) Aplică! – Cunoştinţele dobândite prin studierea paralelograme particulare în raport unele cu altele.

f) Argumentează! – Pe baza proprietăților paralelogramului argumentați de ce dreptunghiul este un paralelogram.

Metoda "Cubul" oferă o abordare holistică pentru explorarea și înțelegerea subiectelor complexe și încurajează elevii să gândească critic, să dezvolte abilități de analiză și să abordeze probleme din mai multe perspective.

Metoda ciorchinelui

Ciorchinele este o tehnică simplă, dar extrem de utilă de brainstorming, care implică găsirea conexiunilor logice între idei. Această metodă poate fi aplicată cu succes în diverse contexte educaționale, fie la începutul unei lecții pentru a reactualiza cunoştinţele anterioare, fie în lecţii de sinteză, recapitulare sau sistematizare a cunoştinţelor.[3]

Cu ajutorul metodei ciorchinelui, elevii pot înțelege mai bine o anumită temă sau conținut, deoarece această tehnică pune în evidență modul în care ideile sunt interconectate. Prin aplicarea ciorchinelui în procesul de predare și învățare, se încurajează elevii să gândească liber și deschis, ceea ce poate stimula creativitatea și înțelegerea profundă a subiectului. Astfel, ciorchinele devine o metodă eficientă pentru dezvoltarea gândirii critice și a abilităților de analiză în rândul elevilor.

Am aplicat metoda ciorchinelui la recapitularea unității de învățare "Paralelograme particulare", fig. 1.

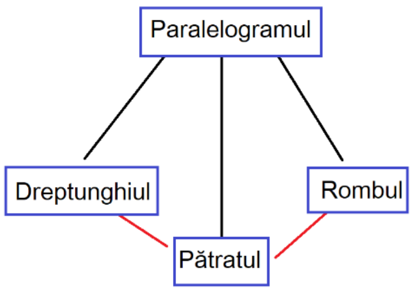


Figura 1. Paralelograme particulare

În concluzie, matematica este un subiect serios și important, dar nu ar trebui să fie inaccesibil sau intimidant pentru elevi. Trebuie să profităm de oportunitățile de a face matematica mai atractivă și mai interesantă pentru a-i ajuta pe elevi să își dezvolte abilitățile și să vadă valoarea acestei discipline în viața lor. Astfel, putem promova o înțelegere mai profundă și o pasiune pentru matematică în rândul viitoarei generații.

Utilizarea acestor metode interactive și participative în procesul de învățare nu aduce doar beneficii legate de înțelegerea și stăpânirea conținutului academic, ci și multiple avantaje în dezvoltarea personală și socială a elevilor. Să explorăm în continuare aceste aspecte.

În primul rând, atunci când elevii sunt implicați activ în învățare, aceasta îi antrenează într-o continuă participare și colaborare. Aceste abilități sunt esențiale în societatea actuală, care se bazează tot mai mult pe comunicare și interacțiune. Prin lucrul în echipă și discuțiile argumentate, elevii învață să-și exprime ideile și să asculte părerile altora, dezvoltându-și astfel abilități de comunicare și colaborare esențiale pentru succesul lor în viitor.

Motivația intrinsecă este, de asemenea, stimulată de aceste metode interactive. Când elevii sunt implicați în activități care îi provoacă să descopere fapte, să aducă argumente pro și contra sau să rezolve probleme complexe, ei își dezvoltă un interes natural pentru subiectul respectiv. Acest tip de motivație este mai durabil și îi încurajează să învețe din plăcere, nu doar pentru a trece examenele.

Colaborarea în echipă are un impact semnificativ asupra dezvoltării atitudinii de toleranță față de ceilalți. Elevii învață să lucreze cu colegii lor, să accepte diferențele de opinie și să găsească soluții comune. Aceasta este o abilitate importantă într-o lume diversă și interconectată, unde abilitatea de a colabora cu oameni cu perspective diferite este valorizată.

De asemenea, aceste metode interactive pot ajuta la reducerea stresului în mediul școlar. Prin crearea unui mediu de învățare mai prietenos și deschis, în care elevii se simt încurajați să își exprime ideile și să își dezvolte încrederea în propriile abilități, se poate diminua presiunea și anxietatea legate de performanța școlară. Elevii se simt mai încrezători în propriile capacități și mai puțin stresați în fața provocărilor academice.

BIBLIOGRAFIE:

[1] Ardelean, L., Secelean, N. (2007). Didactica matematicii – noţiuni generale, comunicare, didactică specifică matematicii, Ed. Universităţii Lucian Blaga, Sibiu

[2] Cerghit, I. (2006). Metode de învăţământ, Editura Polirom, Iași

[3] Sarivan, L. coord. (2005). Predarea interactivă centrată pe elev, Educaţia 2000+, Bucureşti

EVALUAREA ÎN INFORMATICĂ

Erika FÜRTÖS

Liceul De Arte Oradea, jud. Bihor, profesor de matematică-informatică**,** furtoserika@yahoo.com

Rezumat: *În prezent există foarte multe modalități de a evalua cunoştințele elevilor dar din păcate sunt și multe bariere. Cea mai importantă barieră în calea evaluării celui instruit este teama de a greşi.*

Evaluarea are rol de a măsura și aprecia în funcție de obiective, eficiența procesului de predare învățare, raportată la îndeplinirea funcțiilor ei, la cerințele economice și culturale ale societății contemporane.

Strategia didactică cuprinde: metode/procedee de învățământ, mijloace de învățământ, forme de organizare a activității elevilor.În cele ce urmează, în prezentul articol am să prezint pe scurt:Obiectivele si funcțiile evaluării școlare; Tipuri de evaluare; Metode clasice si moderne de evaluare; Exemple de utilizare a metodelor moderne de evaluare; Calitățile instrumentelor de evaluare; Modalitati de elaborare a probelor de evaluare

Cuvinte cheie: obiective, evaluare, metode, itemi.

1. Obiectivele si funcțiile evaluării școlare

1.1. OBIECTIVELE

-evaluarea obiectivelor curriculare și a strategiilor educaționale utilizate în scopul rezolvării acestora

-evaluarea activității de predare-învățare, a strategiilor didactice și a metodelor de învațare

-evaluarea nivelului structurilor psihice ale elevilor

-evaluarea performanțelor profesionale

-evaluarea intregului sistem de învățământ

-informarea elevilor, a parinților și a societății cu privire la rezultatele obținute și asupra cauzelor nerealizarii obiectivelor curriculare propuse

1.2. FUNCTIILE EVALUĂRII

-de constatare si explicare a rezultatelor

-de diagnosticare prin analiza factorilor

-de predicție, prin anticiparea rezultatelor și a strategei de realizare

-de apreciere calitativă și cantitativă

-de ierarhizare a elevilor

-de informare

-de perfecționare și inovare

2. Tipuri de evaluare

-evaluarea inițială- se realizează la începutul unei perioade de instruire și oferă date pentru proiectarea activității didactice (diagnoză si prognoză)

-evaluare continuă (de progres/formativă/cumulativă)- se realizează pe percursul predării disciplinei și sunt înregistrate progresele obținute de elevi, prin verificări cât mai frecvente, în care sunt cuprinși toți elevii clasei (conexiune inversă și formativă)

-evaluare finală (sumativa)- este o evaluare complexă și se realizează la sfârșitul unei perioade de instruire de ierarhizare si selecție (de certificare)

3. Metode clasice si moderne (alternative) de evaluare

3.1 METODE CLASICE

1. **probe orale** (chestionar/examinare orală)- este frecvent folosită de profesori și are avantajul că favorizează dialogul, elevul avand posibilitatea să-și justifice răspunsul, să participe la confruntarea de idei si opinii în cadrul clasei

2. **probe scrise** – sunt preferate de mulți elevi și profesori pentru că:

- asigură un grad mai mare de obiectivitate la notare

- oferă elevilor mai emotivi, sau care gândesc mai lent, posibilitatea de a prezenta toate cunoștințele
- asigură evaluarea unui numar mai mare de elevi într-un timp scurt
- intrebarile au același grad de dificultate pentru toți elevii și verifică același conținut
- favorizeaza realizarea comparării rezultatelor

3. probe practice se folosesc pentru a evalua capacitatea elevilor de a aplica anumite cunoştinţe teoretice în rezolvarea unor probleme practice, gradul de stapanire a unor priceperi si deprinderi

3.2 METODE MODERNE(COMPLEMENTARE)

Oferă elevilor posibilități sporite de a demonstra nu numai că au asimilat un ansamblu de cunoştinţe, dar și că dispun de priceperi, deprinderi, abilități de a opera cu respectivele cunoştinţe.

Printre aceste metode se enumeră:

- ✓ Investigația
- ✓ Proiectul
- ✓ Portofoliul
- ✓ Autoevaluarea
- ✓ Observarea sistematică a activității și comportamentului elevilor

- ***Investigația*** este o metodă complementară de evaluare prin care se obțin informații cu privire la capacitatea elevului de a aplica în mod original, creativ, cunoștințele asimilate în situații noi și variate
- ***Proiectul*** este o metodă complexă de evaluare, recomandată mai ales în cadrul evaluării sumative și se poate realiza individual sau în grup
- ***Portofoliul*** este o metodă și un instrument de evaluare complex, integrator, flexibil prin care profesorul urmărește progresul realizat de elev la o disciplină în plan cognitiv, atitudinal, comportamental de-a lungul unui semestru sau an şcolar
- ***Autoevaluarea*** este o metodă prin care se urmăreşte ănregistrarea imaginii elevului, care astfel nu se mai reduce la judecățiile de evaluare emise de către profesor
- ***Observarea sistematică a activității și comportamentului elevilor***- în activitatea pe care o desfăşoară zilnic la clasă, profesorul obține prin intermediul acestei metode informații relevante asupra performanțelor elevilor din perspectiva capacității lor de acțiune și reacționare, a competențelor și abilităților de care dispun.

3.3. EXEMPLE DE UTILIZARE A METODELOR MODERNE DE EVALUARE

Exempu1 (Investigația)

Disciplina: Tehnologia Informției și a Comunicațiilor

Clasa: a IX-a

Obiective: Descoperirea funcțiilor matematice în Ms Excel

Enunț: Descoperiți cel puțin 5 funcții matematice în Ms Excel

Realizați o documentație în care să precizați funcțiile, sintaxa lor și câte un exemplu.

Barem de corectare și notare:

Se acordă câte 2 puncte pentru fiecare funcție descoperită – 1 punct pentru sintaxă și 1 punct pentru exemplu.

Total 10 puncte.

Exempu2 (Proiectul)

Disciplina: Tehnologia Informției și a Comunicațiilor

Clasa: a IX-a

Obiective: Utilizarea facilităților Ms Word pentru realizarea unei aplicații web

Tema proiectului: Prezentarea individuală a elevilor printr-o aplicație web folosind Ms Word

Cerințele proiectului:

a) Realizarea structurii aplicției web
b) Cel puțin 3 pagini, de exemplu: - date personale, poze, hobby- uri
c) Documentație

Termen de realizare: 1 semestru
Barem de corectare şi notare:
Din oficiu: 1 p

a) Tehnoredactarea documentației 4 p
-2 puncte structura aplicației
-2 puncte explicații privind realizarea aplicației
b) Aplicația web (predată pe CD) 5p
-1 p pentru realizarea legăturilor între paginile aplicației
-1p pentru diversitatea de obiecte utilizate- tabele, diagrame etc.
-1p pentru originalitate și creativitate
-1 p pentru cele 3 pagini realizate (sau mai multe)
-1 p pentru prezentarea aplicației

Exemplu3 (Portofoliu)
Disciplina: Tehnologia Informției și a Comunicațiilor
Editorul de text Ms Word (portofoliu realizat pe parcursul clasei a IX-a)
Obiective:

- Cunoașterea noțiunilor elementare de operare și utilizare
- Utilizarea diferitelor operații de formatarea docunentelor
- Utilizarea avansată a editorului de text prin inserarea de simboluri, imagini, diagrame, tabele etc.
- Cunoașterea diferitelor modalități de tipărire ale unui document
- Cunoașterea tehnicilor de tehnoredactare

Conținutul portofoliului

- Teste și lucrări scrise
- Fișe de laborator (pe CD)
- Fișe de laborator listate
- Fișe de lucru cu comenzile cele mai importante
- Proiect realizat în grup –de exemplu revista școlii- pe CD și listată
- Referat despre realizarea aplicațiilor web în Ms Word
- Fișă de observare a profesorului privind implicarea în activități și discuții
- Fișă de autoevaluare a elevului

Criterii de evaluare:

Conținut portofoliu	**Punctaj**
Conținut CD	2 puncte
Referat despre aplicații web	1 punct
Proiect- Revista școlii	2 puncte
Fiecare fișă	0,5 puncte (maxim 3 puncte)
Oficiu	***2 puncte***
Total	**10 puncte**

Exemplu4 (Observarea sistematică)
Model de fișă de obsevare:

- Date generale despre elev(nume, prenume, vârstă, climat educativ, condiții materiale, particularități sociocomportamentale

- Particularități ale proceselor intelectuale(gândire, limbaj, imaginative, memorie, atenție, spirit de observație etc.0
- Aptitudini și interese manifestate
- Particularități afectiv motivaționae
- Trăsături de temperament
- Atitudini și relaționare(cu sine însuți, cu material studiată, cu colegii)
- Considerații privind evoluția aptitudinilor atitudinilor, intereselor și nivelul de integrare

3.4 CALITĂȚILE INSTRUMENTELOR DE EVALUARE

1. **Validitatea** este data de precizia, acuratetea cu care instrumentul/testul masoara ce și-a propus sa măsoare
2. **Fidelitatea** reprezintă acea calitate a unui test de a produce rezultate constante în urma aplicării sale repetate în condiții identice, aceluiasi grup de elevi
3. **Obiectivitatea** reprezintă gradul de concordanta intre aprecierile facute de evaluatori independenti asupra raspunsurilor pentru fiecare dintre itemii testului. Testele cu grad cel mai ridicat de obiectivitate sun cele standardizate.
4. **Aplicabilitatea** desemnează calitatea testului de a fi administrat si interpretat cu ușurință

4. Modalitati de elaborare a probelor de evaluare

Itemul reprezintă cerința formulaăa (sarcina de lucru, întrebarea) și răspunsul așteptat din partea celui evaluat.

1. Itemi obiectivi-testează cunoașterea, înțelegerea și aplicarea cunoștințelor dobândite

Caracteristici: -evaluează un volum mare de conținut;
-necesită explicatii la început; timp scurt de răspuns;
-asigură obiectivitatea notării

-itemi cu alegere duală (caz particular/special al itemului cu alegere multiplă)

Acest tip de item solicită elevului asocierea unuia sau mai multor enunțuri cu una dintre alternativele:corect-greșit, adevarat-fals, da-nu

-itemi de tip pereche (de asociere)

- Acest tip de item solicită elevul să realizeze corespondența între cuvinte, simboluri conventionale, limbaj grafic conventional, diagrame, dispuse pe coloane
- Verifică abilitatea de a relaționa elementele, lucrurile, poate fi interdisciplinar

-itemi cu alegere multipla

- Acest tip de item cere elevului să aleagă răspunsul corect dintr-o listă de răspunsuri posibile.
- Se recomandă pentru măsurarea cantității cunoștințelor acumulate de elevi.

Orientarea profesională în raport cu evoluția tehnologiilor și cu dinamica pieței muncii este un obiectiv major care indică perspectivele pe care le deschide curriculum-ul la decizia scolii

2. Itemi semiobiectivi

- cere elevului să elaboreze un răspuns în totalitatea lui sau o completare a unei afirmații astfel încat aceasta să capete sens și valoare de adevăr.

Caracteristici: -răspunsul este limitat ca spatiu;
- elevii construiesc răspunsul;
-notarea se realizează cu ușurintă și este obiectivă;
-nu se verifică competențe complexe

-itemi cu răspuns scurt

- Solicită din partea elevului completarea unei informații print-un cuvânt sau grupuri de cuvinte (proprozitii).

-itemi de completare

- Se pot completa 1-2 cuvinte,într-un spatiu care nu trebuie să fie la începutul propoziției și se pot completa desene lacunare, scheme incomplete.

-intrebari structurate

- Reprezintă itemi formați din mai multe întrebări de tip obiectiv sau semiobiectiv legate între ele printr-un element comun.

3. **Itemi subiectivi** (cu răspuns deschis)

- testează obiectivele ce au în vedere originalitatea, creativitatea și contribuția personală în formularea răspunsului.

Caracteristici: -ușor de construit
- evaluează capacități de nivel superior
-evaluarea este subiectivă și necesită scheme de notare complexe
- corectarea solicită timp.

-itemi de tip rezolvare de problem

- îi pun pe elevi într-o situație nouă, inedită, pentru care nu au o soluție predeterminată

-itemi de tip eseu

- Prin acest tip de item se verifică capacitatea de exprimare personală în scris precum şi de a interpreta date și a propune o aplicare practică a acestora.

Eseu structurat unde elevul furnizează răspunsul în funcție de un set de cerințe.

BIBLIOGRAFIE

[1] Ionescu, M. (2000). Demersuri creative în predare și învățare, P. U. C. Cluj-Napoca
[2] Ionescu, M.,Radu, I.. (1995). Didactica modernă, Ed. Dacia, Cluj-Napoca
[3] Adăscăliţei A.. (2000). Instruire asistată de calculator, Didactica informaticii, Editura Polirom,.
[4] Petre,C., Popa, D. (2019). Crăciunoiu, S.m,Metodica predării informaticii și tehnologiei informației, Ed. Arves, Craiova
[5] Miloşescu, M., (2005). Tehnologia informaţiei şi a comunicaţiilor" pentru clasa a 9 –a liceu, Editura Didactică şi pedagogică, Bucureşti
[6] Steele,J.L. Kurtis S. M., Temple, C. (1998). Lectura și scrierea pentru dezvoltarea gândirii critice, vol. I şi II
[7] www.elearning.ro

TEOREMA LUI ROLLE

Anca Eugenia GAVRILAŞ

Liceul Tehnologic „ Felix„ Sânmartin, jud. Bihor, profesor de matematică, gavra_anca@yahoo.com

Rezumat: *Teorema lui Rolle este o teoremă enunțată prima oară de Michel Rolle în 1691. În acest material ne propunem să venim cu câteva idei mai accesibile pentru a putea fi mai pe înțelesul elevilor în studiul unor funcții ce pot fii Rolle, studiul funcției dacă i se poate aplica teorema lui Rolle, aplicații al teoremei lui Rolle, consecințe ale teoremei lui Rolle .*

Cuvinte Cheie : Funcție Rolle. Teorema lui Rolle, Şirul lui Rolle.

Funcția Rolle

Fie $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ o funcție continuă pe [a;b] și derivabilă pe (a;b) atunci f se zice că este funcție Rolle.

Exemple : Să se studieze dacă urmatoarele funcții sunt Rolle

a) $f:[0;3]\to\mathbb{R}$; $f(x)=3x^2-x+2$

Funcția f (funcție polinomială) este continuă și derivabilă pe $\mathbb{R}$ ca funcție elementară,ceea ce înseamnă că f este continuă pe [0; 3] și derivabilă pe (0; 3); $[0;3]\subset\mathbb{R}$

Astfel funcția f este funcție Rolle

b) $f:[-1;4]\to\mathbb{R}$; $f(x)=\begin{cases}2x^2+5x+4, x\in[-1;0]\\5x+4, x\in(0;4]\end{cases}$

Funcția f este continuă pe [-1;4]-{0} și derivabilă pe (-1;4)-{0} ca funcție elementară

Studiem continuitatea funcției lnx=0

$$l_s(0)=\lim_{\substack{x\to0\\x\prec0}}f(x)=\lim_{\substack{x\to0\\x\prec0}}(2x^2+5x+)=4$$

$$l_d(o)=\lim_{\substack{x\to0\\x\succ0}}f(x)=\lim_{\substack{x\to0\\x\succ0}}(5x+4)=4$$

$$f(0)=4$$

$l_s(0)=l_d(0)=f(0)\Rightarrow f$ continuă în x=0

$\Rightarrow$ f continuă pe [-1; 4]

Studiem derivabilitatea funcției în x=0

$$f_s^{'}(0)=\lim_{\substack{x\to0\\x\prec0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to0\\x\prec0}}\frac{2x^2+5x+4-4}{x}=\lim_{\substack{x\to0\\x\prec0}}\frac{2x^2+5x}{x}=\lim_{\substack{x\to0\\x\prec0}}\frac{x(2x+5)}{x}=\lim_{\substack{x\to0\\x\prec0}}(2x+5)=5$$

$$f_d^{'}(0)=\lim_{\substack{x\to0\\x\succ0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to0\\x\succ0}}\frac{5x+4-4}{x}=\lim_{\substack{x\to0\\x\succ0}}\frac{5x}{x}=5$$

$f_s^{'}(0)=f_d^{'}(0)=5\Rightarrow$ f este derivabilă in x=0

$\Rightarrow$ f este funcție Rolle

Teorema lui Rolle

Fie $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ o funcție ce satisface următoarele proprietăți :

1) f continuă pe [a; b]
2) f derivabilă pe (a; b)
3) f(a)=f(b)

Atunci $\exists$ $c\in(a;b)$ a.î. $f^{'}(c)=0$

Exemple : 1. Să se studieze dacă următoarei funcției i se poate aplica teorema lui Rolle și în caz afirmativ, aplicați teorema.

$f:[-1;3]$; $f(x)=x^2-2x+3$

f continuă pe [-1; 3] și derivabilă pe (-1; 3) ca funcție elementară

$$\left.\begin{array}{l} f(-1)=(-1)^2-2(-1)+3=1+2+3=6 \\ f(3)=3^2-2\cdot 3+3=9-6+6=6 \end{array}\right\} \Rightarrow f(-1)=f(3)$$

Funcției f i se aplică teorema lui Rolle ceea ce face să $\exists\ c\in(-1;3)$ a.î. $f^{'}(c)=0$

$f^{'}(x)=(x^2-2x+3)^{'}=2x-2, \forall x\in(-1;3)$

$f^{'}(c)=2c-2$

$f^{'}(c)=0$

$2c-2=0$

$2c=2$

$c=1\in(-1;3)$

$c=1$

2. Determinați a,b,c $\in\mathbb{R}$ pentru care funcșiei $f:[1;5]\to\mathbb{R}$; $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+2, x\in[1;2] \\ cx+4, x\in[2;5] \end{cases}$

să i se poată aplica teorema lui Rolle.

Pentru ca funcției f să i se poată aplica teorema lui Rolle :

f să fie continuă pe [1; 5]

f să fie derivabilă pe (1; 5)

$f(1)=f(5)$

$l_s(2)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x\prec 2}} f(x)=\lim(ax^2+bx+2)=4a+2b+2$

$l_d(2)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x\succ 2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x\succ 2}}(cx+4)=2c+4$

$f(2)=2c+4$

$l_s(2)=l_d(2)=f(2)$

$4a+2b+2=2c+4$

$4a+2b-2c|:2$

$c=2a+b-1$

$f:[1;5]\to\mathbb{R}$; $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+2, x\in[1;2) \\ (2a+b-1)x+4, x\in[2;5] \end{cases}$ $\qquad f(2)=4a+2b+2$

$$f_s'(2)=\lim_{\substack{x\to 2\\ x\prec 2}}\frac{f(x)-f2)}{x-2}=\lim_{\substack{x\to 2\\ x\prec 2}}\frac{ax^2+bx+2-4a-2b-2}{x-2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\prec 2}}\frac{ax^2+bx-4a-2b}{x-2}=\frac{\frac{0}{0}}{l'H}=\lim_{x\to\infty}\frac{2ax+b}{1}=4a+b$$

$$f_d'(2)=\lim_{\substack{x\to 2\\ x\succ 2}}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{\substack{x\to 2\\ x\succ 2}}\frac{(2a+b-1)x+4-4a-2b-2}{x-2}=\lim_{\substack{x\to 2\\ x\succ 2}}\frac{(2a+b-1)x-4a-2b+2}{x-1}=\frac{\frac{0}{0}}{l'H}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 2\\ x\succ 2}}\frac{2a+b-1}{1}=2a+b-1$$

$$f_s'(2)=f_d'(2)$$

$$4a+b=2a+b-1$$

$$2a=-1$$

$$a=-\frac{1}{2}\Rightarrow c=2a+b-1=2(-\frac{1}{2})+b-1=-1+b-1=b-2$$

$$c=b-2$$

$$f(1)=a\cdot 1^2+b\cdot 1+2=a+b+2=-\frac{1}{2}+b+2=b+\frac{3}{2}$$

$$f(5)=5c+4=5(b-2)+4=5b-10+4=5b-6$$

$$f(1)=f(5)$$

$$b+\frac{3}{2}=5b-6$$

$$-4b=-6-\frac{3}{2}$$

$$-4b=-\frac{15}{2}$$

$$b=\frac{15}{8}\Rightarrow c=b-2=\frac{15}{8}-2=\frac{15-16}{8}=-\frac{1}{8}$$

$$a=-\frac{1}{2},b=\frac{15}{8},c=-\frac{1}{8}$$

Aplicație a teoremei lui Rolle

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+1$

Demonstrați că derivata funcției f are toate rădacinile reale

Considerăm $f:[1;2]\to\mathbb{R}$; $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+1$

f contiunuă pe [1;2] și derivabilă pe (1;2) ca funcție elementară și în plus

f(1)=f(2)=1 $\Rightarrow$ conform teoremei lui Rolle că $\exists\ c\in(1;2)$ a.î. $f'(c)=0$ sau astfel spus

$f'(x)$ are o radacină în intervalul (1;2)

Pe baza aceluiași principiu se arată că $f'(x)$ are radăcină și în intervalele (2; 3); (3;4)

Astfel $f'(x)$ are cel puțin 3 rădăcini reale și cum grad f = 4 $\Rightarrow$ grad f' =3 $\Rightarrow f'(x)$ are 3 rădăcini

$\Rightarrow f'(x)$ are toate rădăcinile reale.

Consecințele teoremei lui Rolle

Fie $f:D\to\mathbb{R}$ $(D\subseteq\mathbb{R})$ o funcție derivabilă

C1. Dacă $x_1 \prec x_2$ sunt rădăcini ale funcției $f^{'}(x)$

Cu alte cuvinte între două rădăcini consecutive ale unei funcții derivabile există cel puțin o rădăcină a derivatei funcției.

C2. Dacă $x_1^{'} \prec x_2^{'}$ sunt două rădăcini consecutive ale lui $f^{'}(x)$ atunci în intervalul $(x_1^{'}; x_2^{'})$ există cel mult o rădăcină a funcției $f(x)$

Cu alte cuvinte între două rădăcini consecutive ale derivatei unei funcții derivabile există cel mult o rădăcină a funcției respective.

Consecința 2 generează ,, sirul lui Rolle'' fiind o metodă prin care se determină de cele mai multe ori numărul rădăcinilor unei funcții derivabile.

Exemplu 1. Fie funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$. Determinați numărul rădăcinilor funcției f.

$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$

$f^{'}(x) = (x^3 - 3x^2 - 9x + 1)^{'} = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3)$

$f^{'}(x) = 0$

$3(x^2 - 2x - 3) = 0$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$\Delta = 4 + 16$

$x_{1,2} = \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - 3x^2 - 9x - 1) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} (x^3 - 3x^2 - 9 - 1) = +\infty$

$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 1 = -1 - 3 + 9 + 1 = 6$

$f(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 + 1 = 27 - 27 - 27 + 1 = -26$

Șirul lui Rolle este : $-;+;-;+$ și atunci funcția f are 3 rădăcini

$x_1 \in (-\infty; -1);\ x_2 \in (-1; 3);\ x_3 \in (3; +\infty)$

Concluzie : f are 3 rădăcini

Exemplu 2 . Fie ecuația : $\ln = x + 1$. Determinați numărul soluțiilor reale ale ecuației.

$\ln x = x + 1$

$\ln x - x - 1 = 0$

Considerăm $f:(0; +\infty) \to \mathbb{R}$; $f(x) = \ln x - x - 1$

$f^{'}(x) = (\ln x - x - 1)^{'} = \dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{1 - x}{x}$

$f^{'}(x) = 0$

$\dfrac{1 - x}{x} = 0$

$1 - x = 0$

$x = 1 \in (0; +\infty)$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \succ 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \succ 0}} (\ln x - x - 1) = -\infty$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(\ln x - x - 1) = \lim_{x\to\infty} x(\frac{\ln x}{x} - 1 - \frac{1}{x}) = -\infty$

$f(1) = \ln 1 - 1 - 1 = 0 - 2 = -2$

Șirul lui Rolle este $-;-;-$, ceea ce înseamnă că funcția f nu are radăcini și implicit ecuația $f(x) = 0$ nu are soluții reale (nu are soluții în $(0;+\infty)$).

Ecuația $\ln x = x + 1$ nu are soluții.

BIBLIOGRAFIE

[1] Schneider, V., Schneider, C. (2009). Culegere-matematică, Editura Valeriu Craiova

[2] Catană, A., Catană, A., Hărăbor, C. (2015). Analiză matematică, clasele XI-XII, Editura Hyperion București

FUNCȚIILE INTEGRALE EULER

Cristina GHEORGHIAȘ

Studentă anul III, Matematică, Facultatea de Informatică și Științe, Universitatea din Oradea,
gheorghias_cristina@yahoo.com

Rezumat: *În această lucrare se prezintă integralele lui Euler - funcțiile beta și gamma, care sunt integrale improprii cu parametru real, de o importanță deosebită.*
Cuvinte cheie: funcțiile beta și gamma, integrale improprii cu parametru real

În această lucrare sunt prezentate buna definire a funcțiilor beta și gamma și proprietățile acestora. Pentru început se prezintă noțiunea de integrală improprie.

Definiția 1: [1] Fie f definită pe $[a,\infty)$ și integrabilă pe $[a,b]$, $\forall\, b > a$. Limita $\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$, finită sau infinită, se notează $\int_a^\infty f(x)\,dx$. Dacă limita este finită, integrala este convergentă sau $f(x)$ este integrabilă pe $[a,\infty)$. Dacă limita este infinită sau nu există, integrala este divergentă.

Analog se introduc integralele:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_a^b f(x)dx$$

Teorema 1: [1] *Dacă $f(x)$ admite primitiva $F(x)$ pe $[a,\infty)$, atunci:*

$$\int_a^\infty f(x)dx = F(\infty) - F(a) = F(x)\Big|_a^\infty,$$

unde $F(\infty) = \lim_{x\to\infty} F(x)$.

Teorema 2: [2] Integrala improprie cu un parametru real $\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx$ există și este convergentă pentru orice $n > 0$. $\Gamma\colon(0,\infty)\to\mathbb{R}$ se numește funcția gamma a lui Euler.

Demonstrație:

Fie $g(x) = x^{n-1}e^{-x}$. Alegem $c = 1$.

Pentru orice $x \in (0,1]$ avem $0 < g(x) \le x^{n-1}$

$$\int_0^1 x^{n-1}\,dx = \frac{x^n}{n}\Big|_0^1 = \frac{1}{n} \text{ pentru } n > 0$$

$$\Rightarrow \int_{(0,1]} g(x)dx \text{ este convergentă.}$$

Teorema 3: [2] Proprietățile funcției gamma sunt:

i) $\Gamma(1) = 1$;

ii) $\Gamma(n+1) = n\cdot\Gamma(n), \forall n > 0$;

iii) $\Gamma(a+n) = (a+n-1)\cdot(a+n-2)\cdot\ldots\cdot(a+1)\cdot a\cdot\Gamma(a), \forall a,n > 0$;

iv) $\Gamma(n+1) = n!, \forall n\epsilon\mathbb{N}$;

v) $\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}, \forall 0 < \propto < 1$.

Exemplul 1: [3] Calculați integrala: $\int_0^\infty x^p\cdot e^{-ax}\,dx$

Se efectuează substituția: $ax = y \iff dx = \frac{1}{a}dy$

$$\int_0^\infty x^p \cdot e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a}\int_0^\infty \left(\frac{y}{a}\right)^p e^{-y}dy =$$
$$= \frac{1}{a^{p+1}}\int_0^\infty y^p e^{-y}dy = \frac{1}{a^{p+1}}\Gamma(p+1), p+1>0$$

Exemplul 2: [3] Calculați $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}}$$
$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \pi \Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx$$

Se efectuează schimbarea de variabilă $t = \sqrt{x}$

$x = t^2 \Leftrightarrow dx = 2t\cdot dt$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{-1}\,e^{-t^2}\,2tdt = 2\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt$$
$$\Rightarrow 2\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi} \Leftrightarrow \int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Deoarece funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = e^{-x^2}$ este pară, deducem că:

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx = 2\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

Teorema 4: [2] Integrala improprie cu doi parametri reali $B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}\cdot(1-x)^{n-1}dx$ există și este convergentă pentru orice $m>0$ și $n>0$. Funcția $B:(0,\infty)\times(0,\infty)\to\mathbb{R}$ se numește funcția beta a lui Euler.

Demonstrație:

Fie $h(x) = x^{m-1} + (1-x)^{n-1}$

$$\int_0^1 h(x)dx = \frac{x^m}{m}\Big|_0^1 - \frac{(1-x)^n}{n}\Big|_0^1 = \frac{1}{m}+\frac{1}{n}$$

Vom arăta că $\forall x\in(0,1)$, $x^{m-1}\cdot(1-x)^{n-1} \le 2h(x)$ și teorema rezultă din criteriul comparației.

Dacă $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$, atunci $0<\frac{1}{1-x}\le 2$ deci $x^{m-1}\cdot(1-x)^{n-1}\le 2x^{m-1}\le 2h(x)$; iar dacă $x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$, atunci $0<x^{m-1}=\frac{x^m}{x}\le 2$, deci:

$x^{m-1}\cdot(1-x)^{n-1}\le 2(1-x)^{n-1}\le 2h(x)$

Teorema 5: [2] Proprietățile funcției beta sunt:

i) $\mathrm{B}(m,n) = \mathrm{B}(n,m), \forall m,n>0$;

ii) $\mathrm{B}(m,n) = \int_0^\infty \frac{u^{m-1}}{(1+u)^{m+n}}du, \forall m,n>0$

iii) $\mathrm{B}(m,n) = \int_0^1 \frac{u^{m-1}+u^{n-1}}{(1+u)^{m+n}}du, \forall m,n>0$

iv) $\mathrm{B}(m,1) = \frac{1}{m}, \forall m>0$;

v) $\mathrm{B}(m,n) = \frac{n-1}{m+n-1}\mathrm{B}(m,n-1), \forall n > 1, \forall m > 0;$

vi) $\mathrm{B}(a,n) = \frac{(n-1)!}{(a+n-1)\cdot(a+n-2)\cdot\ldots\cdot(a+1)\cdot a}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a > 0$

vii) $\mathrm{B}(m,n) = \frac{(m-1)!\cdot(n-1)!}{(m+n-1)!}, \forall m,n \in \mathbb{N}^*$

viii) $\mathrm{B}(m,n) = \frac{\Gamma(m)\cdot\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}, \forall m,n > 0.$

Exemplul 3: [4] Să se calculeze integrala: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}} = \int_0^1 x^{-\frac{2}{3}}(1-x)^{-\frac{1}{3}}dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{3}-1}\cdot(1-x)^{\frac{2}{3}-1}dx$$

$$\mathrm{B}(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}\cdot(1-x)^{n-1}dx, \forall m,n > 0$$

$$m = \frac{1}{3}; n = \frac{2}{3}; m+n = 1$$

Dar se știe că $\mathrm{B}(m,n) = \frac{\Gamma(m)\cdot\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}, \forall m,n > 0$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^{\frac{1}{3}-1}\cdot(1-x)^{\frac{2}{3}-1}dx = \mathrm{B}\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right) =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma(1)} = \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)$$

Știm de asemenea că $\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}, \forall 0 < \alpha < 1$

$$\Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\Gamma\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$$

Exemplul 4: [4] Să se calculeze integrala: $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^n}dx$

Se efectuează schimbarea de variabilă: $x^n = t$

$$x = t^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow dx = \frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}dt$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{1}{1+x^n}dx = \frac{1}{n}\int_0^\infty \frac{t^{\frac{1}{n}-1}}{1+t}dt =$$

$$= \frac{1}{n}\mathrm{B}\left(\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}+1-\frac{1}{n}\right)} =$$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\mathrm{n}\cdot\Gamma(1)} = \frac{1}{n}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}} = \frac{\pi}{n\cdot\sin\frac{\pi}{n}}$$

Exemplul 5: [3] Să se calculeze integrala: $\int_0^\infty \frac{\sqrt[4]{x}}{(x+1)^2}dx$

Se utilizează proprietatea ii): $\mathrm{B}(m,n) = \int_0^\infty \frac{u^{m-1}}{(1+u)^{m+n}}du, \forall m,n > 0$

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt[4]{x}}{(x+1)^2}dx = \int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{4}}}{(x+1)^2}dx$$

$$m-1=\frac{1}{4} \Rightarrow m=\frac{5}{4}$$

$$m+n=2 \Rightarrow \frac{5}{4}+n=2 \Rightarrow n=\frac{3}{4}$$

Din proprietatea viii) $\mathrm{B}(m,n) = \frac{\Gamma(m)\cdot\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}, \forall m,n>0 \Rightarrow \mathrm{B}\left(\frac{5}{4},\frac{3}{4}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma(2)}$

Dar $\Gamma(2) = 1\cdot\Gamma(1) = 1$

$$\Rightarrow \mathrm{B}\left(\frac{5}{4},\frac{3}{4}\right) = \Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$$

BIBLIOGRAFIE

[1] Stan, C. (1989). Probleme de matematici superioare. București: Editura didactică și pedagogică
[2] Stănășilă, O. (2000). Analiză liniară și geometrie. Curs de matematică pentru anii I și II (Vol. I). București: Editura All educational
[3] Mureșan, S. (2020). Analiză matematică II. Note de curs. Oradea
[4] Bica, A. (2012). Curs de analiză matematică. Calcul integral. Universitatea din Oradea, proiectul „Didatec”

ÎNVĂȚAREA MATEMATICII FOLOSIND E-LEARNING

Monica Florina HENES

Școala gimnazială "Ovidiu Drimba" Lugașu de Jos, Bihor , profesor de matematică ,
henesmoni@yahoo.com

Rezumat: *Societatea noastră se confruntă în zilele actuale cu schimbări profunde datorate intensității inserării noilor tehnologii digitale. Această situație îi avantajează pe angajații cu înalte calificări și competențe TIC și îi dezavantajează pe cei care nu le au. Ca urmare, trebuie să combatem decalajul dintre educație și piața muncii, introducerea e-learningului să devină o strategie preponderentă, astfel ca elevii să aibă șansa de a se orienta către cerințele pieții muncii.*
Cuvinte cheie:e-learning, sincron ,asincron , platformă educațională , aplicații digitale.

„Dăruirea și iubirea sunt calități care dau greutate actului educativ"-Constantin Cucoș

INTRODUCERE

În sectorul educațional *e-learningul* este conceput ca fiind un set de instrucțiuni transmise prin intermediul unui dispozitiv digital, cum ar fi un calculator sau o unitate mobilă, care este destinat să sprijine formarea și care trebuie să îndeplinească o serie de condiții, cum ar fi:

- includerea de conținuturi și cunoștințe relevante pentru obiectivele educaționale propuse;
- utilizarea elementelor media pentru livrarea conținuturilor: cuvinte, imagini, sunete, animații, film;
- utilizarea metodelor de instruire consacrate, cum ar fi: demonstrația și exemplificarea, simularea, exersarea și feedbackul pentru sprijinirea învățării;
- existența unei componente de evaluare și verificare a cunoștințelor dobândite;
- posibilitatea îmbrăcării unei forme de învățare la distanță sprijinită de un tutore/trainer sau un profesor (e-learning sincron) sau poate fi conceput pentru studiul individual în ritm propriu (e-learning asincron);
- ajutarea cursanților (elevilor, studenților) să își construiască noi cunoștințe și competențe legate de obiectivele de învățare individuale sau îmbunătățirea performanței organizaționale. [2]

E-learning reprezintă un mediu de învățare care utilizează tehnologiile informației și comunicațiilor ca și platformă pentru activități de predare și învățare. E-learning-ul, cu o tehnologie ce necesită folosirea rețelei Internet și instrumente esențiale (dispozitive digitale: laptop, calculator, tabletă, telefon inteligent) pentru a genera diferite materiale educaționale are scopul de a educa cursanți și de a administra cursuri și își are rădăcinile în învățământul la distanță fiind agreat de către cursanții adulți din cadrul învățământului superior.

E-learning-ul este flexibil din punctul de vedere al timpului și locației, mărește eficacitatea cunoștințelor și abilităților permițând astfel accesul la o cantitate mare de date, îmbunătățește colaborarea și întărește relațiile de susținere a învățării. [3]

E-learningul poate fi:

- on-line sau off-line;
- sincron sau asincron;
- instruire asistată de un calculator sau de dispozitive digitale miniaturizate (m-learning , mobile learning);
- la distanță sau față în față;
- legat de internet sau prin satelit (de exemplu, tele-learningul);
- prin rețele de calculatoare interconectate (intranet);
- dispozitive de stocare a informațiilor (de exemplu CD-ROM, DVD-ROM, SSD).

În România, conceptul de e-Learning a pătruns destul de repede, dar foarte puţini specialişti au înţeles semnificaţia profundă a acestei tehnologii în educaţie şi în formarea continuă. Pionieri ai utilizării tehnologiei e-learning în educaţie se aflau în câteva universităţi din România şi în câteva firme de IT-Software ce colaborau cu unele firme din străinătate. S-au realizat progrese semnificative abia după anul 2000, când aceste schimbări şi-au produs efectele. Astfel, în acea perioadă s-au evidenţiat influenţele şi impactul tehnologiilor Web asupra sistemului de învăţământ. După anul 2000, când s-au extins şi dezvoltat tehnlogiile Web 2.0 şi Learning 2.0, s-au abordat programe şi proiecte legate de strategii de dezvoltare şi formare, management de proiecte, lucru în echipe, metodologii de implementare după standarde internaţionale.[6]

Criza sanitară provocată de pandemia Coronavirus a plasat procesul didactic și în spațiul online după cum ne arată și câteva Ordonanțe de urgență care au apărut în Legea Educației nr.1/2011 varianta actualizată, ca de exemplu: *TITLUL VII*
ART. 1 (1), (2), (3), ART. 2 (1), (2), (3), (4), ART. 3, ART. 5, ART. 8 etc.

MATERIALE , MIJLOACE ȘI METODE

În zilele noastre există multe instrumente și aplicații care permit elaborarea rapidă a unor resurse educaționale interesante care pot facilita învățarea matematicii de către elevi și pot eficientiza predarea. Amintim aici platformele educaționale și aplicațiile digitale.

Profesorul universitar doctor Ion Albulescu în lucrarea sa "e-didactica" definește noțiunea de platformă educațională ca: ”*un soft complex care permite gestionarea unui domeniu prin crearea ori editarea de lecții interactive sub forma unor jocuri educaționale. Aceasta oferă mai multe tipuri de servicii, cum ar fi crearea unor clase virtuale, distribuirea unor materiale în format electronic, crearea unor lecții interactive utilizând tabla virtuală sau crearea unor legături permanente prin postarea temelor și acordarea feedbackului imediat, în scris sau vocal. Totul se poate face de la distanță, dar cu eficiență garantată, prezentarea fiind una inedită depinzând de imaginația profesorului. Interesul elevului este stârnit în permanență, iar învățarea este una activă”.*[1]

Pe de altă parte, aplicațiile digitale sunt programe prin care se pot crea materiale virtuale sau prelua materiale virtuale. În cadrul acestor aplicații cadrul didactic are posibilitatea de a-şi gândi materialul sau jocul într-o manieră personală, interactivă și adaptată temei dorite. Astfel sunt puse la dispoziție o serie de instrumente care propulsează materialul realizat la un nivel înalt.

Voi exemplifica câteva platforme care sunt foarte eficiente în actul didactic:
a) platforma G Suite for Education-Google Classroom
b) platforma Microsoft Teams
c) platforma Moodle (Modular Object-Oriented Dynamic Learning Environment)
d) platforma Wordwall

Mai amintim aici platforma Canva (platforma de design grafic), Easyclass, Eduboom respectiv niște platforme românești Digitaliada și Intuitext (care au subcategorii separate pentru ciclul primar ȘcoalaIntuitext.ro cât și pentru gimnaziu ExamenulTău.ro).

Din multitudinea de platforme care există voi enumera câteva care au cursuri de matematică:

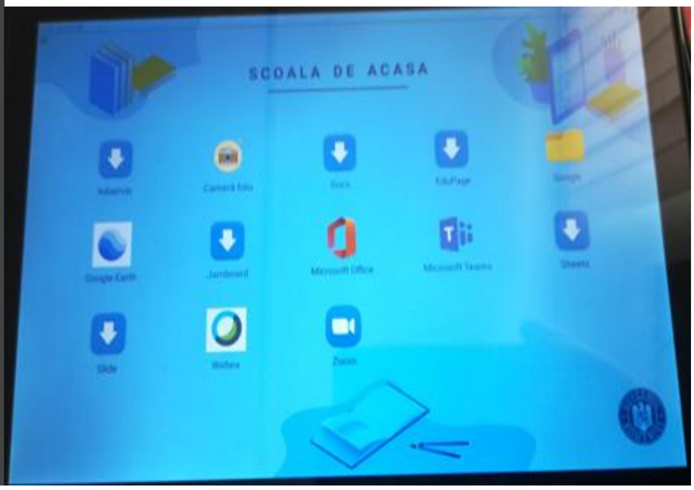
- Intuitext ExamenulTău (pentru pregătirea Evaluării Naționale);
- 123edu (pentru ciclul primar);
- Wordwall (pentru toate nivelurile);
- Kidibot;
- Sabaki Courses (pentru liceu);
- Multiplication.com;
- Khanacademy,

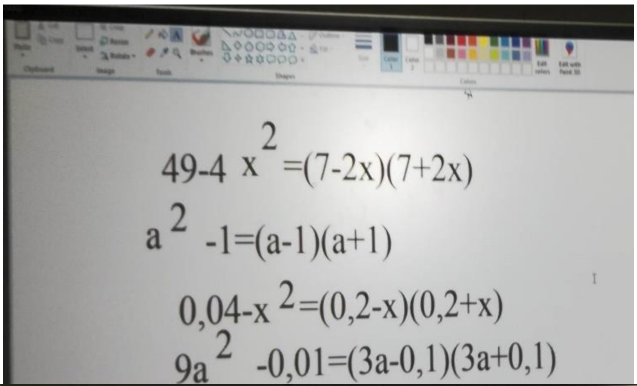
- AEL ,produs de firma SIVECO etc.

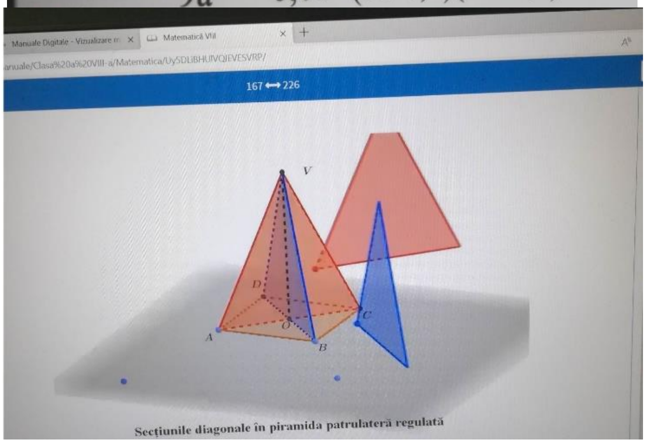
Resursele educaționale le creăm cu ajutorul aplicațiilor digitale eficiente, care antrenează copiii și le aduce plăcerea învățării în mediul online. Exemple:

- *aplicația Kahoot (aplicație de teste interactive);*
- *aplicații de gen puzzle:I'm a puzzle, Jigsawpuzzles, Jspuzzles;*
- *aplicații de jocuri:Toy Theater;*
- *aplicații de creare de cărți/biblioteci virtuale: Book Creator;*
- *aplicații de creere de video-uri: Doodly;*
- *aplicații pentru învățarea limbilor străine: Duolingo;*
- *aplicații cu hărți: History, maps of world;*
- *aplicații de conventire al* unor documente în pdf: iLovePDF;
- *aplicații de matematică* (pentru algebră, geometrie, analiză matematică, trigonometie sau statistică) Geo Gebra, PhotoMath, Math is fun, Math_Aids , Wizer.me etc.

  În procesul educațional se mai utilizează enciclopedia online liberă Wikipedia, serviciul video Youtube, programul PowerPoint respectiv site-ul manualedigitale.ro care este o pagină al Centrului Național de Politici și Evaluare în Educație.







REZULTATE ȘI DISCUȚII

Școala noastră a primit (printr-un Proiect cofinanțat din Fondul European de Dezvoltare Regională prin Programul Operațional Competitivitate 2014-2020) în fiecare sală de clasă câte o tablă interactivă Evoboard, un computer Lenovo, fiecare elev câte o tabletă Pritom (cu cartelă Vodafone de internet activă 2 ani) și respectiv fiecare diriginte/ profesor un laptop marca Allbook. Tablele smart funcționează cu programul DrawView, iar calculatoarele/laptopurile au instalate programele PowerPoint, Excel, Word, lucrează în PDF și sunt conectate la rețelele wifi ale școlii (RDS și Romtelecom). Tabletele elevilor au fost preluate prin semnătură de către părinți în cadrul unei ședințe cu părinții unde fiecare clasă a decis dacă acestea se iau acasă sau nu (caz în care ele au fost depozitate în dulapul colectivului și sunt folosite doar sub supravegherea unui cadru didactic).

Platforma folosită de școala noastră este *platforma G Suite for Education-Google Classroom*. Fiecare profesor și-a creat clase virtuale pentru propria disciplină, le-a personalizat cu imagini specifice materiei predate sau chiar cu fotografia elevilor, și-au ales un nume pentru clasa digitală și au început să învețe împreună diferite subiecte pe care le încărca (conform orarului) cadrul didactic. Lecțiile erau fie documente Word sau PDF, fie filmulețe de pe Youtube, imagini, prezentări Power Point, link-uri care duceau la diferite jocuri sau aplicații sau discuții cu profesorul și colegii de clasă. Orele corespunzătoare materiilor de examen erau 100% în regim sincron cu prezență obligatorie și cu camera pornită. Elevii puteau să pună întrebări personal sau în scris în flux, să își încarce temele, pozele, materialele audio-video aferente sarcinii de lucru. Rezultatul evaluării era afișat în secțiunea *Note* sub formă de valoare numerică de la 1 la 10 sau ca procent de îndeplinire al activității.

După revenirea la predarea cu prezență fizică, am început să folosim din nou metoda blended-learning sau învățarea mixtă. Cercetătorii Horn și Staker definesc învățarea mixtă ca: "*un program de educaţie formală în care elevii/cursanţii învaţă parţial online, cu unele elemente de control pe care le are cursantul asupra timpului, locaţiei, traseului de învăţare şi/sau a ritmului*." [5]. În strategia didactică au fost introduse filmulețe de pe canalul Youtube (de exemplu în cadrul lecțiilor de comunicare de noi cunoștințe), prezentări PowerPoint (de exemplu în cadrul lecțiilor de tip prelegere), aplicațiile Geogebra și PhotoMath pentru fixare și sistematizare , videoclipuri cu experimente la lecțiile de laborator pentru formarea de priceperi și deprinderi, aplicațiile Kahoot și exercițiile de pe platforma Wordwall pentru repetare curentă sau pentru verificare și aprecierea rezultatelor, lecția fiind în acest caz una de evaluare prin programe computerizate. Foarte des folosim și manualele școlare sub formă de conținut digital deoarece ele conțin atât filme de predare, cât și planșe de memorare, probleme rezolvate în pași, teste propuse care se corectează automat precum și înregistrări vocale cu citirea și pronunția corectă al termenului respectiv.

CONCLUZII:

Tehnologia este toată acea soluție, dezvoltare sau cunoaștere care facilitează viața în societate. Și în ultima jumătate de secol, progresele tehnologice au fost atât de îndelungate, încât chiar ne-au modificat modul de a trăi, comunica și relaționa.În acest sens, tehnologia a adus mari avantaje pentru dezvoltarea socială, dar și dezavantaje care sunt exprimate individual și colectiv. Acestea sunt unele dintre ele:

Avantaje :

- creând cultura educației permanente în e-learning reducem costurile instruirii
- accesul gratuit al elevilor/profesorilor la resursele /mijloacele digitale şi tehnice ale şcolii
- independenţa geografică, mobilitatea
- metode pedagogice diverse
- prezentare concretă, concisă, selectivă și coerentă a conţinuturilor educaţionale;
- utilizarea platformelor digitale și aplicațiilor îmbunătățesc vocabularul limbilor străine și al notiunilor tehnice, digitale
- oferta educaţională adaptată la noile nevoi ale pieţii muncii
- accesul mai bun al cadrelor didactice la informaţii
- sprijinirea elevilor din medii sociale defavorizate
- individualizarea procesului de învăţare
- timp redus de studiu
- interacţiuni sincrone şi asincrone.

Dezavantaje:

- necesită experienţă în domeniul utilizării calculatoarelor
- în cazul învățării exclusive on-line nivelul de absenteism este ridicat sau chiar dacă elevii sunt prezenți nu își pornesc camerele la PC și astfel profesorii nu îi pot verifica, supraveghea și apare astfel incertitudinea implicării elevilor;
- slabă conexiune la internet şi la rețeaua de curent electric în anumite zone geografice
- nesiguranța cibernetică
- dozarea neadecvată al activităților sincron și asincron
- destructurarea relației profesor-elev, elev-elev;
- dependența de internet
- în cazul folosirii excesive, nemoderate al echipamentelor digitale pot apărea efecte negative asupra sănătății cum ar fi reducerea somnului cu până la 25 de minute zilnic, scurtarea memoriei, vedere încețoșată sau dublă, ochi uscați, sensibili, obosiți, roșii, durerea cefei și a coloanei, agitație sau tulburări de comportament.

Cu toate aceste dezavantaje sau limitări, experienţa platformelor e-learning deja funcţionale a demonstrat faptul că participanţii la educaţie prin intermediul noilor tehnologii e-learning se familiarizează în scurt timp cu mediul virtual şi intră relativ repede în ritmul natural al transmiterii şi, respectiv, însuşirii de cunoştinţe prin acest modern şi eficient tip de educaţie.[4]

Educația digitală este esențială pentru toate categoriile de oameni, iar abilitățile digitale trebuie dezvoltate pe tot parcursul vieții pentru a face față ritmului accelerat al schimbării sociale.

BIBLIOGRAFIE

[1] Albulescu, I., Catalano, H. (2021). e-Didactica. Procesul de instruire în mediul online, Editura Didactica Publishing House, București,

[2] Ceobanu, C. (2016). Învățarea în mediul virtual, Ed. Polirom, Iași,

[3] Ceobanu, C., Cucoș, C. (2020). Educația digitală, Editura Polirom, Iași

[4] Dobre, I. (2010). Studiu critic al actualelor sisteme de e-learning, articol publicat de Institutul de cercetări pentru inteligența artificială, București

[5] Horn, M., B. (2014). Staker Heather - Blended: Using Disruptive Innovation to Improve Schools, Redwood City, San Francisco

[6] http://learningspaces.org/papers/Defining_Blended_Learning_NF

PREDAREA MATEMATICII PRIN INTERMEDIUL APLICAȚIILOR RED

Viorica-Cornelia HOFFMANN-BRONŢ

Liceul Tehnologic Special nr.1 Oradea - Profesor matematică, vigyorika@yahoo.com

***Rezumat**: Prin definiție, **R**esursele **E**ducaționale **D**eschise (Open Educational Resources) se referă la accesul deschis la resurse educaționale, facilitat de tehnologiile informației și comunicațiilor, pentru consultare, utilizare și adaptare de către comunitatea utilizatorilor, în scopuri necomerciale. În acest context se înscrie şi utilizarea pe larg, inclusiv în sistemul educaţional, a tehnologiilor şi a resurselor informaţionale, dar şi facilitarea, prin intermediul acestora, a accesului şi a schimbului de informaţie între diferiţi actori. Resursele electronice, conţinuturile on-line şi spaţiile educaţionale virtuale contribuie la optimizarea şi actualizarea procesului de instruire şi educaţie continuă, oferindu-i cele mai noi şi diverse informaţii şi oportunităţi. În ultimii ani, aspectele ce se referă nemijlocit la datele deschise, inclusiv resursele educaţionale deschise, sunt abordate pe larg de către comunitatea educaţională internaţională, recunoscându-se că promovarea şi utilizarea acestora implică o schimbare fundamentală în procesul educaţional, contribuind şi mai mult la centrarea pe elev şi/sau student, dar şi la asigurarea accesului universal la educaţie. La nivelul învățământului special, pentru elevii cu deficiențe mintale moderate și ușoare, severe, grave, profunde sau asociate, precum și pentru preşcolarii şi elevii claselor pregătitoare, clasele I și a V-a (unde până în prezent nu există programe școlare), RED-urile sunt utile și după pandemie, elevii cu **C**erințe **E**ducaționale Speciale, învață mult mai ușor vizual, asimilează mai repede noțiunile predate, ating mult mai ușor obiectivele propuse. RED-urile care au la bază jocuri logice sau matematic distractive, susțin ludoterapia. În cei 2 ani școlari, care au trecut am făcut mai multe cursuri de perfecționare, de formare continuă, privind folosirea unor aplicații de redactare, creare, de jocuri matematice, quizuri, teste online, fișe de lucru online. Din aceste materiale, lecții, fișe, jocuri, aș dori să prezint câteva.*

Cuvinte cheie: Matematică, fișe, teste, aplicații, RED-uri, CES.

PREDAREA MATEMATICII PRIN INTERMEDIUL APLICAȚIILOR RED

Am obținut 2 ani la rând, în 3 tranșe, acceptul ISJ Bihor pentru publicarea în biblioteca online a RED-urilor realizate de mine. Anual de 2 ori ISJ Bihor dă șansă cadrelor didactice de a propune RED-uri realizate pe diferite discipline și nivele de învățare. Aceste RED-uri pot fi fișe de lucru, teste de evaluare, materiale educaționale ce se pot accesa prin intermediul unui link, materiale realizate prin intermediul unor aplicații sau site-uri. RED-urile realizate astfel sunt evaluate în 2 tranșe de o comisie a ISJ Bihor. Cele acceptate intră într-o bibliotecă virtuală. Personal, eu sunt încântată de această oportunitate, deoarece pe lângă experiență, am parte de succes, învăț lucruri noi, și nu în ultimul rând dobândesc un Proces Verbal cu viza ISJ Bihor ce îmi îmbogățește dosarul personal.

1.Mulțimi , Operații cu mulțimi- lecție LIVRESQ

LIVRESQ - www.livresq.com LIVRESQ este un editor de resurse educaționale în format digital. Acesta facilitează crearea de lecţii interactive, ce conţin texte, galerii de poze, animaţii, audio, video, quiz-uri şi alte elemente, fără a fi necesare cunoştinţe de programare. Lecţiile rezultate din LIVRESQ pot fi descărcate pentru a fi folosite offline sau pot fi partajate pe internet foarte uşor prin Biblioteca LIVRESQ, copiii putând avea acces la ele de pe orice tip de dispozitiv smart (telefon, tabletă, PC). De asemenea, pachetele de lecţii sunt compatibile cu soluţiile de tip Learning Management System, respectând SCORM, standardul consacrat în eLearning la nivel internaţional. Este o platformă românească ce oferă toate instrumentele realizării unei lecții complete, interactive

2. Matematică pentru elevi cu tulburări de spectru autist, integrați în învățământul profesional special. Recunoașterea, formarea, citirea, scrierea, compararea și ordonarea numerelor naturale de la 0 la 31

LINK: https://library.livresq.com/details/6016d04401f06b00076ba98e
PROFESOR: Hoffmann-Bronț Viorica-Cornelia
TITLUL MATERIALULUI PROPUS: Matematică pentru elevi cu tulburări de spectru autist, integrați în învățământul profesional special. Recunoașterea, formarea, citirea, scrierea, compararea și ordonarea numerelor naturale de la 0 la 31.
DISCIPLINA: Matematică/Aritmetică
CLASA: a IX-a și a X-a, învățământ profesional special
DESCRIEREA ACTIVITĂȚII:
Cuprins:
Recunoașterea și formarea numerelor naturale de la 0 la 31
Exerciții , teste interactive
Citirea și scrierea numerelor naturale de la 0 la 31
Exerciții de citire prin cântece dedicate copiilor.
Operații de adunare și scădere cu numere de la 0 la 31
Ordonarea și compararea numerelor naturale de la 0 la 31
Exerciții, teste, fișe interactive.
Obiective:
Elevul să recunoască numerele naturale de la 0 la 31
Elevul să poată asocia unei mulțimi de obiecte, numărul elementelor acestuia.
Elevul să poată citi și scrie numerele naturale de la 0 la 31
Elevul să poată ordona crescător/descrescător numerele naturale de la 0 la 31
Elevul să poată compara numerele naturale de la 0 la 31
Cuvinte cheie: numere naturale, citire, scriere, ordonare, asociere, comparare.

3. https://www.genial.ly/ Este un editor online, folosit pentru creare infografice, quizz, postere, prezentări video.

Genial Quiz- Mulțimi, definiții, operații cu mulțimi
LINK: https://view.genial.ly/60b740d762c1740e57cd3deb/interactive-content-multimi-quiz
PROFESOR: Hoffmann-Bronț Viorica-Cornelia
TITLUL MATERIALULUI PROPUS: **Genial Quiz- Mulțimi, definiții, operații cu mulțimi**
DISCIPLINA: Matematică/Algebră
CLASA: a IX-a
DESCRIEREA ACTIVITĂȚII: Materialul propus este un quiz, o evaluare online ce se poate folosi atât la elevii din învățământul profesional de masă, cât și la elevii din învățământul profesional special. Este un quiz realizat cu aplicația Genially, și este util în fixarea noțiunilor teoretice predate la capitolul Mulțimi, Operații cu mulțimi, clasa a IX-a.

4. https://www.liveworksheets.com/ Este o aplicație ce se poate folosi la toate disciplinele pentru
creare de fișe ce se pot rezolva online

Fișă de lucru la matematică/ Recapitulare, tabla înmulțirii
LINK: https://www.liveworksheets.com/jy1474823cr
PROFESOR: Hoffmann-Bronț Viorica-Cornelia

TITLUL MATERIALULUI PROPUS: **Fișă de lucru la matematică/ Recapitulare tabla înmulțirii**
DISCIPLINA: Matematică/Algebră
CLASA: nivel gimnazial / nivel învățământ profesional special,elevi cu tulburări mintale moderate și ușoare
DESCRIEREA ACTIVITĂȚII: Materialul propus este o fișă de evaluare online, realizat cu aplicația live work sheets. Materialul se poate folosi atât la clasele gimnaziale cât și în învățământul profesional special. Tabla înmulțirii crează probleme la mulți elevi, chiar și la vârste mai mari. Fișa de evaluare online, este compusă din 40 de exerciții de înmulțire, și este propusă pentru a fixa, a recapitula tabla înmulțirii.

5. Learningapps (https://learningapps.org) este o platformă care oferă modele de aplicații, precum şi posibilitatea creării de conținut; Există aplicații interesante (de exemplu: rebus, unește perechile, puzzle, completează cuvântul lipsă etc.). Avantajul este că se pot ușor partaja (link, cod de încorporare) sau pot fi folosite drept material de învățare pe platforma LearningApps (creând clase în care să îi invitați pe copii; se pot face si sondaje pentru a măsura feed-back-ul)

Definiția mulțimii (Cantor)
LINK: https://learningapps.org/display?v=pg5wp2yen21
PROFESOR: Hoffmann-Bronț Viorica-Cornelia
TITLUL MATERIALULUI PROPUS: Definiția mulțimii (Cantor)
DISCIPLINA: Matematică/Algebră
CLASA: a IX-a învățământ profesional special
DESCRIEREA ACTIVITĂȚII: Materialul creat, este pentru a reactualiza definiția mulțimii, mai exact singura definiție a mulțimii, dată de matematicianul Georg Cantor.

6.Numere naturale pare, numere naturale impare

LINK: https://learningapps.org/17142627
PROFESOR: Hoffmann-Bronț Viorica-Cornelia
TITLUL MATERIALULUI PROPUS: Numere naturale pare, numere naturale impare
DISCIPLINA: Matematică/Aritmetică
CLASA: a IX-a învățământ profesional special.
DESCRIEREA ACTIVITĂȚII: Materialul este un exercițiu pentru elevii din învățământul profesional special. Este un exercițiu de sortare a elementelor unei mulțimi de numere naturale, în două submulțimi, mai exact submulțimea numerelor pare și submulțimea numerelor impare. Exercițiul se poate relua de mai multe ori, deoarece aplicația prezintă elementele mulțimii aleator, în ordine diferită.

7. WORLDWALL (https://wordwall.net) este o aplicație utilă pentru cadrele didactice deoarece se pot crea jocuri interactive pentru susținerea învățării, fiind posibile de la 1 la 8 modele.
De exemplu: *Cuvântul lipsă, Anagrame, Puzzle, Rebus, Adevărat sau Fals, Sortează, Chestionare, Spânzurătoare, Deschide cutia* etc. Este un instrument digital uşor de utilizat şi plăcut de copii datorită elementelor ludice inserate

NUMERE POZITIVE; NUMERE NEGATIVE

<table>
<tr><th colspan="6">I. Date generale</th></tr>
<tr><td>Titlul resursei educaționale deschise propuse</td><td colspan="5">NUMERE POZITIVE; NUMERE NEGATIVE</td></tr>
<tr><td>Disciplina</td><td colspan="5">MATEMATICĂ/ ALGEBRĂ</td></tr>
<tr><td>Clasa</td><td colspan="5">a IX-a, X-a , XI-a, XII-a, învățământ profesional/liceal special,
a IX-a, X-a învățământ profesional/ liceal de masă</td></tr>
<tr><td>Autor/Autori</td><td colspan="5">Prof. Hoffmann Bronț Viorica Cornelia</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Scopul materialului propus</td><td>Didactic, de utilizat la clasa cu elevii</td><td>Pt elev, de utilizatde cătreelev</td><td>De documen-tare pt cadrele didactice</td><td>De management educațional</td><td>Altele</td></tr>
<tr><td></td><td>DA</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><th colspan="6">II. Prezentarea resursei educaționale deschise</th></tr>
<tr><td>Competența specifică vizată/ Indicatori de performanță</td><td colspan="5">- Elevul să recunoască și să definească noțiunea de număr pozitiv și număr negativ
- Elevul să știe să dea exemple de numere pozitive și negative.
- Elevul să poată rezolva exerciții cu operații cu numere pozitive și negative. Să cunoască regula de adunare, scădere, împărțire și înmulțire a numerelor pozitive și negative.
- Elevul să știe să aplice regula semnelor.
- Elevul să știe să acceseze și să rezolve exerciții , folosind aplicația wordwall.</td></tr>
<tr><td>Durata resursei</td><td colspan="5">20 min</td></tr>
<tr><td>Scurtă prezentare a resursei educaționale deschise propuse</td><td colspan="5">Prin accesarea linkului atașat, elevul se conectează la un exercițiu realizat prin intermediul aplicației wordwall. Exercițiul este în realitate un joc matematic și distractiv, prin care va trebui să sorteze în două mari categorii nimerele date. Numerele sunt naturale, întregi, raționale, iraționale, fracții zecimale simple, fracții zecimale periodice simple și compuse. Criteriul dat, este cel care face diferența. Elevii vor alcătui 2 mari mulțimi, prima mulțime va conține numerele pozitive, cealaltă mulțime va conține numerele negative. Elevii vor avea șansa de a se corecta din mers. Prin repetiții, reluarea exercițiului vor putea fixa noțiunile legate de valoarea pozitivă și valoarea negativă.</td></tr>
<tr><td>Elemente agregate</td><td colspan="5">https://wordwall.net/ro/resource/52347472</td></tr>
<tr><th colspan="6">III. Comentarii</th></tr>
<tr><td>Alte aspecte utile de împărtășit cu privire lautilizarea resursei educaționale deschise în activitatea cu elevii</td><td colspan="5">Aplicația wordwall, susține pedarea matematicii la elevii cu CES, fiind o formă a jocului didactic. Elevul cu CES, asimilează noțiunile teoretice jucându-se, elevii au șansa de a se corecta în timpul jocului. Se fixează noțiunile teoretice prin repetiție.
În general RED-urile realizate cu diferite aplicații cum ar fi LIVRESQ, learningapps, wordwall, genially, kahoot, quizziz, livework sheets, sunt mult mai atractive pentru elevul cu CES, decât caietul sau carte. Jocurile , ludoterapia, susțin atenția elevului cu CES. Curba de efort a elevului este mai mare.</td></tr>
</table>

8. Ecuația de gradul II

LINK: https://wordwall.net/ro/resource/9114569/ecua%c8%9bia-de-gradul-ii
PROFESOR: Hoffmann-Bronț Viorica-Cornelia
TITLUL MATERIALULUI PROPUS:
DISCIPLINA: Matematică/Algebră
CLASA: a IX-a, învățământ profesional, liceal și special.
DESCRIEREA ACTIVITĂȚII:
Exercițiul realizat cu aplicația wordwall, este un exercițiu cu grad de dificultate scăzut. Se solicită elevului să rezolve să identifice soluțiile corecte pentru 3 ecuații de gradul al II-lea. Este vorba despre o ecuație de gradul II, formă comletă, și două exerciții cu formă incompletă (b=0, sau c=0)

BIBLIOGRAFIE:

[1] Ghid pentru aplicarea Practicilor Educaționale Deschise în timpul pandemiei de coronavirus. Utilizarea Resurselor Educaționale Deschise în conformitate cu Recomandările UNESCO , Mai (2020), versiunea 1.0
[2] Repere orientative pentru școala online , ghid metodologic pentru învățători, Brașov, (2020).
[3] Ghid practic de resurse educationale si digitale pentru instruire online ,Editura Universității de Vest, (2020)
[4] Ghid suport pentru profesorii implicați în procesul de adaptare curriculară în cazul copiilor/elevilor cu ces integrați în învățământul de masă, (2020)
[5] Resurse educaţionale deschise: oportunităţi pentru acces, calitate şi relevanţă în educaţie, Chişinău, (2017), Colecția Biblioteca Pro Didactica

EVALUAREA SCRISĂ - TEST CLASIC VS. QUIZ ONLINE

Cristina IGNAT

Colegiul Național „Emanuil Gojdu” Oradea, profesor de matematică, ignatcristina08@gmail.com

Rezumat: *Articolul analizează comparativ evaluarea clasică și evaluarea online*
Cuvinte cheie: evalure, test, quiz, online.

INTRODUCERE

O etapă importantă a procesului instructiv-educativ, evaluarea impune - atât pentru învățarea clasică, desfășurată față în față, cât și pentru învățarea online – respectarea caracteristicilor unei evaluări moderne, dintre care caracteristici amintim:

- Produce un *feed-back* clar atât pentru elev cât și pentru profesor.
- Transmite informații despre *stadiul* învățării, în scopul ameliorării acesteia.
- Evaluează elevii în raport cu *criterii* clar formulate.
- Este o intervenție *formativă,* cu rol de transformare continuă a predării și învățării.
- Presupune măsurarea *obiectivă* a rezultatelor.

MATERIALE ŞI METODE

În anul școlar 2020-2021, în plină pandemie de Covid-19, cursurile din învățământul preuniversitar s-au desfășurat în perioade succesive de timp, atât în format clasic cât și online. Aceasta a adus schimbări esențiale în toate etapele procesului de predare-învățare-evaluare. Prezenta lucrare își propune să prezinte câteva modalități de evaluare online, să analizeze și să compare rezultatele aplicării acestor metode.

În perioada martie – iunie 2020, în primele luni în care cursurile s-au desfășurat online, am realizat evaluarea elevilor preponderent calitativ, prin aprecieri verbale referitoare la activitatea acestora, de exemplu: “Efectuezi rapid și corect operații cu numere întregi”; “Nu ai fost atent la un detaliu din enunțul problemei”; “Trebuie să exersezi mai mult transformarea sumelor de funcții trigonometrice în produse”; etc.

Revenirea în sălile de clasă, în perioada septembrie – octombrie 2020, timp în care am desfășurat activitățile școlare față în față, ne-a permis să realizăm evaluări scrise în format clasic, sub forma testelor rezolvate de elevi pe hârtie.

Sub presiunea crescătoare a viitoarei treceri în online a cursurilor, am început în octombrie 2020 elaborarea și aplicarea în scopul evaluării a testelor în formă de quiz, pe platforma Microsoft Teams. Am ales pentru test următoarea structură:

- Testul conține 9 itemi cu alegere multiplă, cu unul sau mai multe răspunsuri corecte.
- Punctaj: 9x1p + 1p din oficiu (ulterior + 2p din oficiu, astfel încât se poate obține nota maximă cu 8 sau 9 răspunsuri corecte).
- Punctajul pe un item se acordă doar dacă selecția de răspunsuri este exact cea din barem.

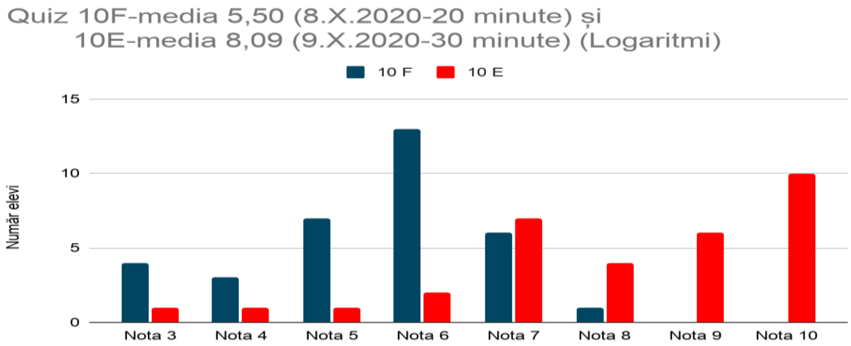
Spre exemplificare, în continuare sunt inserate linkuri pentru câteva teste sub formă de quiz, realizate cu Microsoft Forms și aplicate pe platforma Microsoft Teams:

- Quiz - Logaritmi (clasa X)
- Quiz - Numere complexe (clasa X)
- Quiz - Radicali (clasa VII)

Testele s-au dat pentru început în sala de clasă, iar elevii au completat răspunsurile pe telefon. Am elaborat teste sub formă de quiz și le-am aplicat la toate clasele la care am predat în anul școlar 2020-2021: trei clase la care am predat matematică: 7C, 10E și 10F și o clasă la care am predat fizică, 9A.

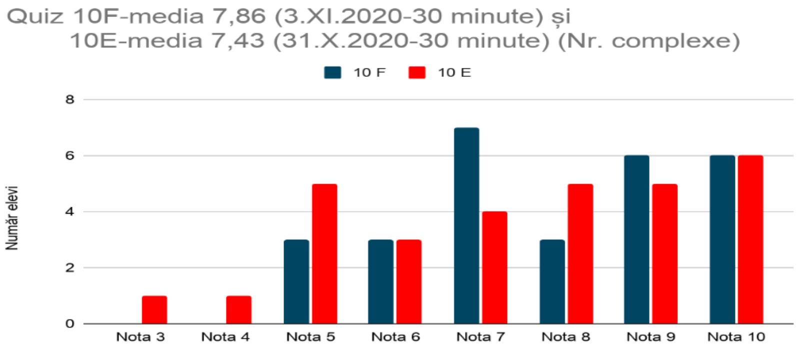
Modul de desfăşurare a testelor sub formă de quiz și mai ales rezultatele obținute de elevi ridică multe semne de întrebare. În continuare sunt prezentate câteva dintre aceste întrebări și încercările de a răspunde la ele. Multe rămân desigur întrebări deschise.

1.Care este timpul necesar pentru rezolvare?



Am realizat mai multe comparații între rezultatele obținute la evaluare la matematică de clasele 10E și 10F, ambele cu profil științe ale naturii și formate din câte 30 de elevi – cea de mai sus fiind prima dintre aceste comparații. După primul quiz (din capitolul ”Logaritmi”) la clasa 10F, la care media clasei a fost 5,50, am concluzionat că timpul pe care l-am alocat inițial (20 minute) este insuficient și l-am majorat cu 50%. La evaluarea sub formă de quiz susținută în ziua următoare la clasa 10E, rezultatele au fost mult mai bune, media clasei fiind 8,09, cu un subiect cu grad de dificultate comparabil. Dată fiind diferența foarte mare între mediile celor două clase, am încercat să răspund în mod obiectiv la următoarea întrebare:

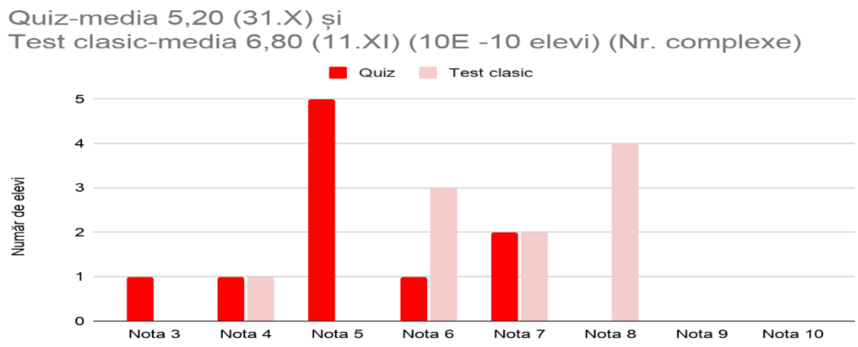
2.Clasele 10E și 10F au nivele apropiate?

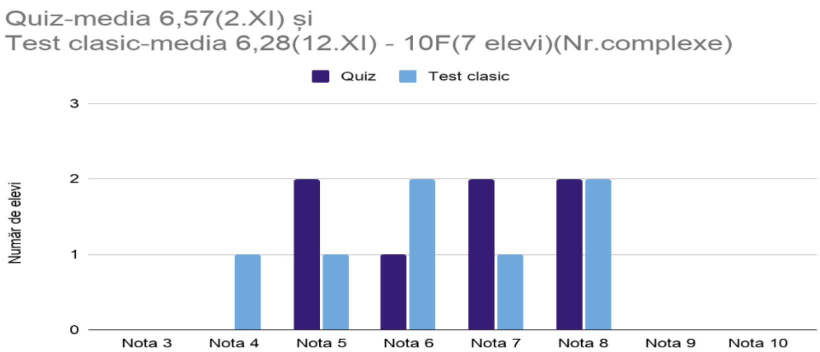


După aproximativ o lună, cele două clase au susținut evaluarea sub formă de quiz din capitolul ”Numere complexe”. Mediile celor două clase au fost sensibil apropiate, chiar s-a inversat ordinea valorică înte medii față de primul quiz. Această analiză a arătat că are sens compararea rezultatelor celor două clase, pentru găsirea unor metode cât mai eficiente de evaluare.

Totuși, au existat elevi nemulțumiți de propriul rezultat la quiz. De aici a apărut o nouă întrebare:

3.Pentru unii elevi, rezultatele sunt mai bune la testul clasic decât la quiz?

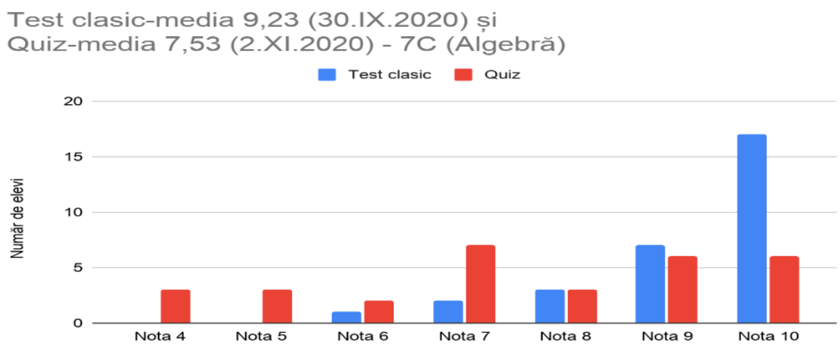




Cu atât mai mult cu cât această metodă de evaluare este insuficient exersată, am permis elevilor care au dorit, să repete evaluarea din capitolul ”Numere complexe” sub forma unui test scris în format clasic. După cum rezultă din analiza de mai sus, prin acest demers rezultatele s-au îmbunătățit față de cele de la quiz la clasa 10E, dar au devenit mai slabe față de cele de la quiz la clasa 10F. Am concluzionat că viabilitatea evaluării prin quiz este comparabilă cu cea a evaluării prin test clasic.

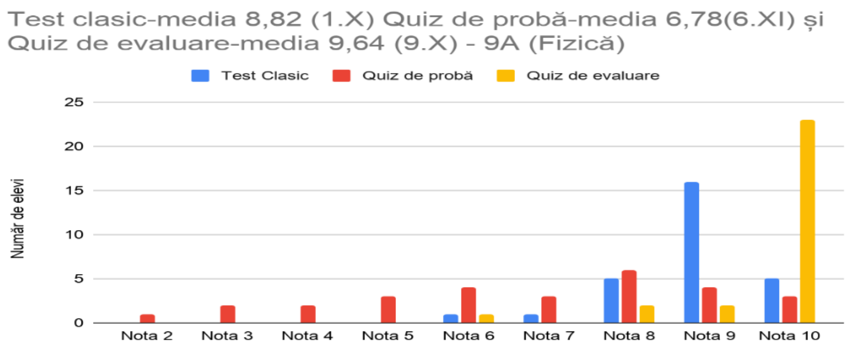
În legătură cu vârsta elevilor, am încercat să răspund la întrebarea:

4.Eficiența evaluării prin quiz diferă la gimnaziu față de liceu?



La clasa 7C, media la quizul din algebră a fost mult mai mică decât media acestei clase la un test în format clasic la algebră. Direcții noi de acțiune, care urmează să fie experimentate la acest nivel, sunt legate de formularea subiectelor și antrenamentul în rezolvarea quizurilor.

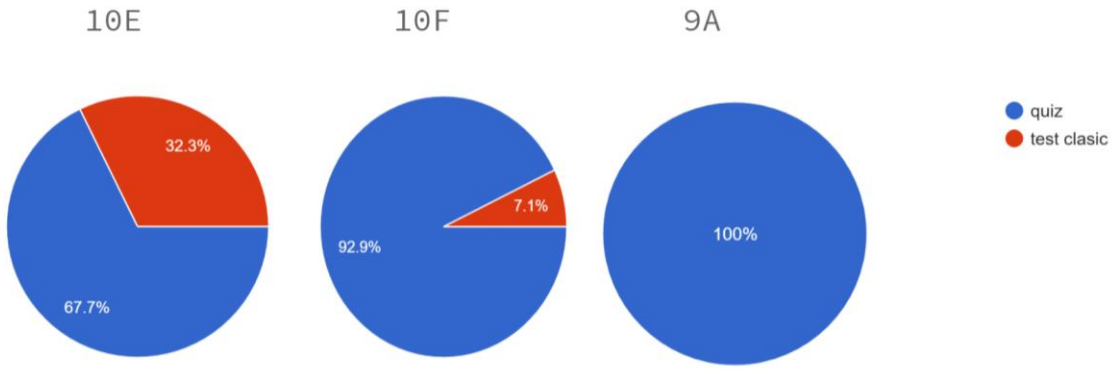
5.Cum influențează exersarea evaluării prin quiz notele obținute?



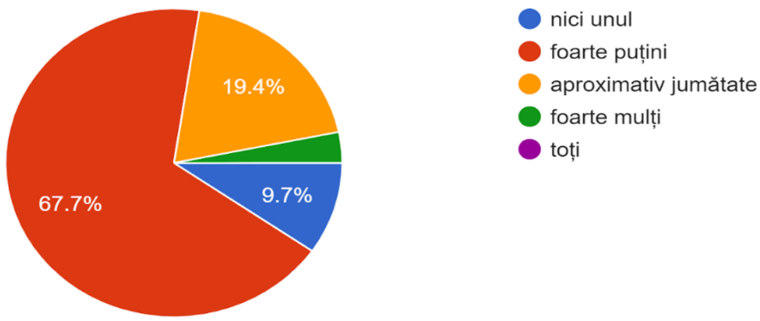
După exersarea printr-un quiz de probă, la care media clasei 9A a fost 6,78, am oferit diverse sugestii elevilor pentru pregătirea eficientă în vederea quizului de evaluare. Rezultatele obținute la acesta din urmă au fost foarte bune, media clasei 9,64 fiind chiar superioară celei obținute la primul test scris, susținut în sala de clasă, în format clasic.

Elevii de liceu au răspuns la un sondaj de opinie cu următoarele întrebări:

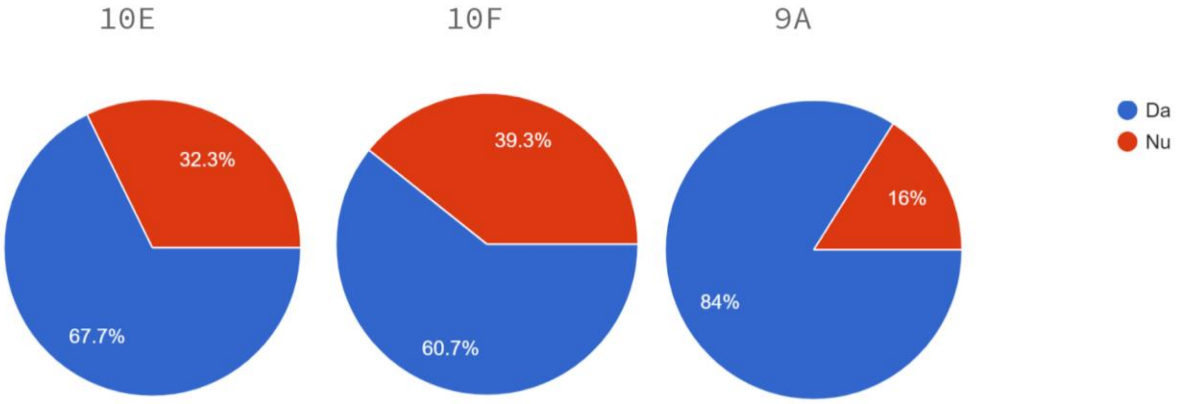
I. Care dintre următoarele variante de formulare a subiectului pentru <u>evaluare scrisă online</u> este cea preferată de tine?



II. Câți dintre elevi crezi că folosesc <u>ajutorul unei alte persoane</u> (ex. colegi, părinți etc.) pentru a elabora răspunsurile la quiz online?



III. Crezi că este bine ca evaluarea scrisă sub formă de <u>quiz</u> să fie utilizată din când în când și atunci când elevii și profesorii sunt <u>prezenți fizic</u> la școală?



CONCLUZII

Câteva puncte tari ale evaluării sub formă de quiz, așa cum au fost formulate de către elevi:
”E o evaluare mai precisă, nu lasă loc de îndoieli.”
“Nu mai trebuie să faci efortul de a poza testul și de a-l trimite pe platformă, și trebuie să scrii mai puțin la genul acesta de întrebări.”
“O consider favorabilă datorită timpului pe care trebuie să-l acordăm fiecărui exercițiu și că nu trebuie să scriem fiecare pas de rezolvare.”
“Evaluarea sub forma de quiz este mai favorabilă întrucât e mai eficientă, rezultatele vin mai repede și este ideală pentru online.”
“Este mai ecologică, elevii putând să nu mai folosească hârtie din caiete.”
“Există variante de răspuns și poți să îți dai seama că ai greșit dacă niciuna nu e echivalentă cu răspunsul aflat de tine.”
“Faptul ca nu este nevoie de o redactare detaliată si precisă face testul mai puțin stresant.”
“Este o metodă favorabilă deoarece ne ajută să acționăm mai repede, să gândim exercițiile cu o viteză mai mare și nicidecum nu se poate afirma că este o metodă mai ușoară căci nu se poate lucra cu o asemenea viteză doar dacă ai mult exercițiu. De asemenea consider că această metodă de evaluare ne învață să folosim resursele pe care le avem, ceea ce ne va ajuta și pe viitor.”

Câteva puncte slabe ale evaluării sub formă de quiz, așa cum au fost formulate de către elevi:
“Este o evaluare în care nu se punctează rezolvarea și astfel dacă am greșit la calcule nu primim punctaj parțial.”
“Nu se pot da exerciții cu demonstrație.”
“Poți copia foarte ușor. Dacă un elev deștept face testul in 25 min iar testul e de jumătate de oră, poate spune răspunsurile repede colegilor.”
“Quiz-ul are anumite probleme tehnice, în sensul că platforma aparent schimbă ușor răspunsul dacă te deplasezi cu cursorul mouse-ului pe test și se încarcă destul de greu.”
“O consider nefavorabilă din cauza faptului că nu primim punctaje parțiale și de exemplu dacă la un răspuns sunt 3 variante corecte și eu pun 2 nu primesc nimic.”
“Într-un quiz este posibilă alegerea răspunsurilor " la nimereală" care nu ar testa cunoștințele matematice.”
“Mi se pare că am tendința de a nu învăța atât de riguros ca înainte, având mereu materialele la îndemână.”
“Timpul de la unele quiz-uri este prea scurt.”

Mulțumesc elevilor mei pentru implicarea în propria pregătire și pentru colaborarea la realizarea acestui articol.

BIBLIOGRAFIE

[1] Ganga, M., Matematică (2007). Manual pentru clasa a X-a, Profil M1, Editura Mathpress
[2] Teste grilă de matematică pentru examenul de bacalaureat și admiterea în învățământul superior la Universitatea ”Politehnica” din Timișoara
[3] Teste grilă de matematică pentru examenul de bacalaureat și admiterea în învățământul superior la Universitatea Tehnică Cluj-Napoca
[4] Cucoș, C. (2008). Teoria și metodologia evaluării, Editura Polirom

METODE DE ZOOM BAZATE PE POLINOAME CUBICE DE TIP HERMITE

Eugen LASLO[1], Adrian Șerban RAȚ[2], George Raul RAȚ[3]

[1]Lect. univ. dr. Departamentul de Matematică și Informatică, Facultatea de Informatică și Științe, Universitatea din Oradea, lasloeugen@yahoo.com
[2]Student anul II, Matematică și Informatică, Facultatea de Informatică și Științe, Universitatea din Oradea, adirat10@gmail.com
[3]Student anul II, Informatică, Facultatea de Informatică și Științe, Universitatea din Oradea, ratgeorgeraul2018@gmail.com

Rezumat: *În această lucrare ne propunem să obținem o metodă de zoom a unei imagini de tip raster folosind un algoritm bazat pe polinoame cubice de tip Hermite.*
Cuvinte cheie: metoda Zoom, polinom de tip Hermite

Funcții spline cubice de tip Hermite

Pentru $f:[a,b]\to\mathbb{R}, f\in C^1[a,b]$, polinomul de interpolare al lui Hermite cu două noduri duble $P(x)=Ax^3+Bx^2+Cx+D$, este unic determinat de condițiile:

$$\begin{cases} P(a)=f(a), & P'(a)=f'(a) \\ P(b)=f(b), & P'(b)=f'(b) \end{cases}$$

ce conduc la sistemul liniar:

$$\begin{cases} Aa^3+Ba^2+Ca+D=f(a) \\ 3Aa^2+2Ba+C=f'(a) \\ Ab^3+Bb^2+Cb+D=f(b) \\ 3Ab^2+2Bb+C=f'(b) \end{cases}$$

Acest sistem având determinantul: $\delta=-(b-a)^4\neq 0$, este compatibil unic determinat și pentru polinomul *P* se obține atunci pe *[a,b]* expresia:

$$P(x)=\frac{(b-x)^2(x-a)}{(b-a)^2}\cdot f'(a)-\frac{(x-a)^2(b-x)}{(b-a)^2}\cdot f'(b)+\frac{(b-x)^2[2(x-a)+(b-a)]}{(b-a)^3}\cdot f(a)+\frac{(x-a)^2[2(b-x)+(b-a)]}{(b-a)^3}\cdot f(b)$$

Dacă $f\in C^4[a,b]$, atunci pentru estimarea erorii formulei de interpolare $f(x)=P(x)+R(x)$

avem: $|R(x)|\leq\frac{(b-a)^4}{3\cdot 2^7}\cdot\left\|f^{(4)}\right\|_\infty, \forall\, x\in[a,b]$.

Considerând acum o diviziune a intervalului [a,b], $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ și valorile pe aceste noduri ale unei funcții $f\in C^1[a,b]$, $f(x_i), f'(x_i), i=\overline{0,n}$, se poate construi o funcție netedă $s\in C^1[a,b]$, pentru care $s(x_i)=f(x_i)$, $s'(x_i)=f'(x_i)$,$\forall i=\overline{0,n}$, cerând ca restricția funcției s la fiecare subintervale $[x_{i-1},x_i], i=\overline{1,n}$ să fie s_i dat prin:

$$s_i(x)=\frac{(x_i-x)^2(x-x_{i-1})}{h_i^2}\cdot m_{i-1}-\frac{(x-x_{i-1})^2(x_i-x)}{h_i^2}\cdot m_i+\frac{(x_i-x)^2[2(x-x_{i-1})+h_i]}{h_i^3}\cdot y_{i-1}+\frac{(x-x_{i-1})^2[2(x_i-x)+h_i]}{h_i^3}\cdot y_i$$

unde $y_{i-1}=f(x_{i-1})$, $y_i=f(y_i)$, $m_{i-1}=f'(x_{i-1})$ și $m_i=f'(x_i)$.

S-a notat cu $h_i=x_i-x_{i-1}, i=\overline{1,n}$ și putem considera $h=\max\{h_i\ /\ i=\overline{1,n}\}$,

$h=\min\{h_i\ /\ i=\overline{1,n}\}$. Se observă că s_i'' există pe intervalele deschise (x_{i-1},x_i) pentru orice $i=\overline{1,n}$ şi este un polinom de gradul întâi. Dacă sunt cunoscute valorile derivatei pe noduri, $f'(x_i), i=\overline{0,n}$, atunci $s\in C^1[a,b]$ şi $s\notin C^2[a,b]$, dar se obţine o eroare de aproximare foarte bună în cazul $f\in C^4[a,b]$:

$$|f(s)-s(x)|\le\frac{h^4}{384}\cdot\left\|f^{(4)}\right\|_\infty,\forall\ x\in[a,b].$$

datorată informaţiei oferită de valorile $f'(x_i), i=\overline{0,n}$. Dacă însă aceste valori $f'(x_i)$, $i=\overline{0,n}$nu sunt cunoscute, atunci valorile m_i, $i=\overline{0,n}$se pot determina impunând diverse proprietăţi suplimentare pe care să le aibă funcţia s sau utilizând diverse metode de natură geometrică pentru estimarea acestor valori.

În continuare vom determina valorile m_i, $i=\overline{0,n}$ astfel încât să obţinem $s\in C^2[a,b]$şi următoarele variante de condiţii la extremităţile intervalului [a, b]: $s''(a)=s''(x_0)=0$,
$s''(b)=s''(x_n)=0$,adică un spline cubic natural având expresia polinomială de tip Hermite sau $s'(a)=s'(x_0)=f'(a), s'(b)=s'(x_n)=f'(b)$,obţinând spline cubic complet.
Întrucât $s\in C^1[a,b]$pentru oricevalorim_i, $i=\overline{0,n}$, condiţia $s\in C^2[a,b]$implică $s_i''(x_i)=s_{i+1}''(x_i),\forall,\ i=\overline{1,n-1}$, ceea ce conduce la relaţiile:

$$\frac{1}{h_i}\cdot m_{i-1}+2\left(\frac{1}{h_i}+\frac{1}{h_{i+1}}\right)\cdot m_i+\frac{1}{h_{i+1}}\cdot m_{i+1}=\frac{3(y_i-y_{i-1})}{h_i^2}+\frac{3(y_{i+1}-y_i)}{h_{i+1}^2}, i=\overline{1,n-1}$$

Condiţiile de spline cubic natural $s''(x_0)=s''(x_n)=0$, conduc la relaţiile:

$$m_0+\frac{1}{2}m_1=\frac{3}{2h_1}\cdot(y_1-y_0)\quad,\ \frac{1}{2}m_{n-1}+m_n=\frac{3}{2h_n}\cdot(y_n-y_{n-1})$$

Se obţine astfel următorul sistem liniar:

$$\begin{cases}2m_0+m_1=\dfrac{3}{h_1}\cdot(y_1-y_0)=d_0\\ \dfrac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}\cdot m_{i-1}+2\cdot m_i+\dfrac{h_i}{h_i+h_{i+1}}\cdot m_{i+1}=\dfrac{3h_{i+1}(y_i-y_{i-1})}{h_i(h_i+h_{i+1})}+\dfrac{3h_i(y_{i+1}-y_i)}{h_{i+1}(h_i+h_{i+1})}=d_i\ ,\forall\, i\\ m_{n-1}+2m_n=\dfrac{3}{h_n}\cdot(y_n-y_{n-1})=d_n\end{cases}$$

$=\overline{1,n-1}$

cu matricea tridiagonală, diagonal dominantă, adică o matrice nesingulară.Atunci acest sistem are soluţie unică, adică se pot determina în mod unic valorilem_i, $i=\overline{0,n}$, obţinândastfel în mod unic funcţia spline cubică naturală de tip Hermite. Observăm că matricea sistemului este de forma$G=2I+A=2(I+\frac{1}{2}A)$, cu $\|A\|_\infty=1$. Acest sistem se poate scrie sub forma $G\cdot m=d$ cu matricea G inversabilă având $\|G^{-1}\|_\infty\le\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}\|A\|_\infty}=1$.

Observaţie: Dacă utilizăm la capetele intervalului $[a,b]$ condiţii de forma $s'(a)=s'(x_0)=f'(a)$, $s'(b)=s'(x_n)=f'(b)$, atunci $m_0=f'(a)$ şi $m_n=f'(b)$, obţinând sistemul liniar tridiagonal (de n-1 ecuaţii şi n-1 necunoscute):

$$\begin{cases}2m_1+\dfrac{h_1}{h_1+h_2}\cdot m_2=\dfrac{3h_2}{h_1(h_1+h_2)}\cdot(y_1-y_0)+\dfrac{3h_1}{h_2(h_1+h_2)}\cdot(y_2-y_1)-\dfrac{h_2}{h_1+h_2}\cdot f'(\mathrm{a})\\ \dfrac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}\cdot m_{i-1}+2\cdot m_i+\dfrac{h_i}{h_i+h_{i+1}}\cdot m_{i+1}=\dfrac{3h_{i+1}(y_i-y_{i-1})}{h_i(h_i+h_{i+1})}+\dfrac{3h_i(y_{i+1}-y_i)}{h_{i+1}(h_i+h_{i+1})},\forall i=\overline{2,n-2}\\ \dfrac{h_n}{h_n+h_{n-1}}\cdot m_{n-2}+2m_{n-1}=\dfrac{3h_n}{h_{n-1}(h_{n-1}+h_n)}\cdot(y_{n-1}-y_{n-2})+\dfrac{3h_{n-1}}{h_n(h_{n-1}+h_n)}\cdot(y_n-y_{n-1})-\dfrac{h_{n-1}}{h_n+h_{n-1}}\cdot f'(\mathrm{b})\end{cases}$$

pentru determinarea funcţiei spline cubice complete.

În continuare, vom prezenta un program vizual în limbajul C# care ilustreze această metodă de zoom. Codul aferent programului este:

```
using System;
usingSystem.Collections.Generic;
using System.Drawing;
using System.Linq;
using System.Text;
using System.Threading.Tasks;

namespace Hermite_Spline_Zoom
{
publicpartialclassForm1 : Form
   {
publicForm1()
       {
          InitializeComponent();
       }

privatevoid Form1_Load(object sender, EventArgs e)
       {
          Bitmap inputImage = new Bitmap(@"../../input.jpg"); // Încărcați imaginea de intrare

double zoomFactor = 1.5; // Factorul de zoom

Bitmap zoomedImage = HermiteZoom.ZoomImage(inputImage, zoomFactor);

          pictureBox1.Image = inputImage;
          pictureBox2.Image = zoomedImage;
       }
   }
}

namespace Hermite_Spline_Zoom
{
publicclassHermiteZoom
   {
publicstatic Bitmap ZoomImage(Bitmap inputImage, double zoomFactor)
       {
int newWidth = (int)(inputImage.Width * zoomFactor);
int newHeight = (int)(inputImage.Height * zoomFactor);

          Bitmap outputImage = new Bitmap(newWidth, newHeight);

double widthRatio = (double)(inputImage.Width - 1) / (newWidth - 1);
double heightRatio = (double)(inputImage.Height - 1) / (newHeight - 1);

for (int y = 0; y < newHeight; y++)
          {
for (int x = 0; x < newWidth; x++)
```

```
                {
double sourceX = x * widthRatio;
double sourceY = y * heightRatio;

int x1 = (int)sourceX;
int y1 = (int)sourceY;
int x2 = x1 + 1;
int y2 = y1 + 1;

// Verificați limitele imaginii
if (x2 >= inputImage.Width)
                        x2 = inputImage.Width - 1;
if (y2 >= inputImage.Height)
                        y2 = inputImage.Height - 1;

double fractionX = sourceX - x1;
double fractionY = sourceY - y1;

                    Color color1 = inputImage.GetPixel(x1, y1);
                    Color color2 = inputImage.GetPixel(x2, y1);
                    Color color3 = inputImage.GetPixel(x1, y2);
                    Color color4 = inputImage.GetPixel(x2, y2);

byte red = (byte)Hermite(color1.R, color2.R, color3.R, color4.R, fractionX, fractionY);
byte green = (byte)Hermite(color1.G, color2.G, color3.G, color4.G, fractionX, fractionY);
byte blue = (byte)Hermite(color1.B, color2.B, color3.B, color4.B, fractionX, fractionY);

                    outputImage.SetPixel(x, y, Color.FromArgb(red, green, blue));
                }
            }
return outputImage;
        }

publicstaticdouble Hermite(double c1, double c2, double c3, double c4, double t, double tension
= 0.5)
        {
double t2 = t * t;
double t3 = t2 * t;

double m0 = (c2 - c1) * (1 + tension) * (1 - tension) / 2;
            m0 += (c3 - c2) * (1 - tension) * (1 - tension) / 2;

double m1 = (c3 - c2) * (1 + tension) * (1 - tension) / 2;
            m1 += (c4 - c3) * (1 - tension) * (1 - tension) / 2;

double a0 = 2 * t3 - 3 * t2 + 1;
double a1 = t3 - 2 * t2 + t;
double a2 = t3 - t2;
double a3 = -2 * t3 + 3 * t2;
```

```
return a0 * c2 + a1 * m0 + a2 * m1 + a3 * c3;
        }
    }
}
```

- *public static Bitmap ZoomImage(Bitmap inputImage, double zoomFactor)*

Această metodă primește ca argument o imagine (inputImage) și un factor de zoom (zoomFactor), care determină cât de mult va fi mărită sau micșorată imaginea.Imaginea rezultată va avea o lățime și înălțime ajustate în funcție de factorul de zoom.În cadrul acestei metode se realizează efectul de zoom prin interpolarea Hermite. Funcția calculează noile dimensiuni ale imaginii după aplicarea factorului de zoom, inițializează o nouă imagine (outputImage) cu dimensiunile calculate, calculează rapoartele pentru lățime și înălțime între imaginea inițială și cea mărită/micșorată, parcurge fiecare pixel din imaginea rezultată și realizează interpolarea Hermite pentru a determina noua valoare a pixelului.

Se iterează prin fiecare pixel din imaginea rezultată (newWidth și newHeight).Pentru fiecare pixel, calculează coordonatele corespunzătoare în imaginea inițială, folosind rapoartele de dimensiune calculate mai devreme.Se calculează valorile pentru cele patru colțuri adiacente în imaginea inițială.Aplică funcția Hermite (Hermite) pentru a obține valorile interpolarate pentru componentele R, G și B ale pixelului rezultat.

- *public static double Hermite(double c1, double c2, double c3, double c4, double t, double tension = 0.5)*

Aceasta este funcția de interpolare Hermite, care primește patru valori de control (c1, c2, c3 și c4), un parametru de interpolare (t) și un parametru opțional pentru tensiune (tension).Calculează și returnează valoarea interpolată pentru parametrul t.

Această clasă permite efectuarea unui zoom în imagini folosind interpolarea Hermite pentru a asigura un aspect mai net și mai uniform în timpul procesului de mărire/micșorare.

Atașăm mai jos câteva capturi de ecran cu output-ul programului:

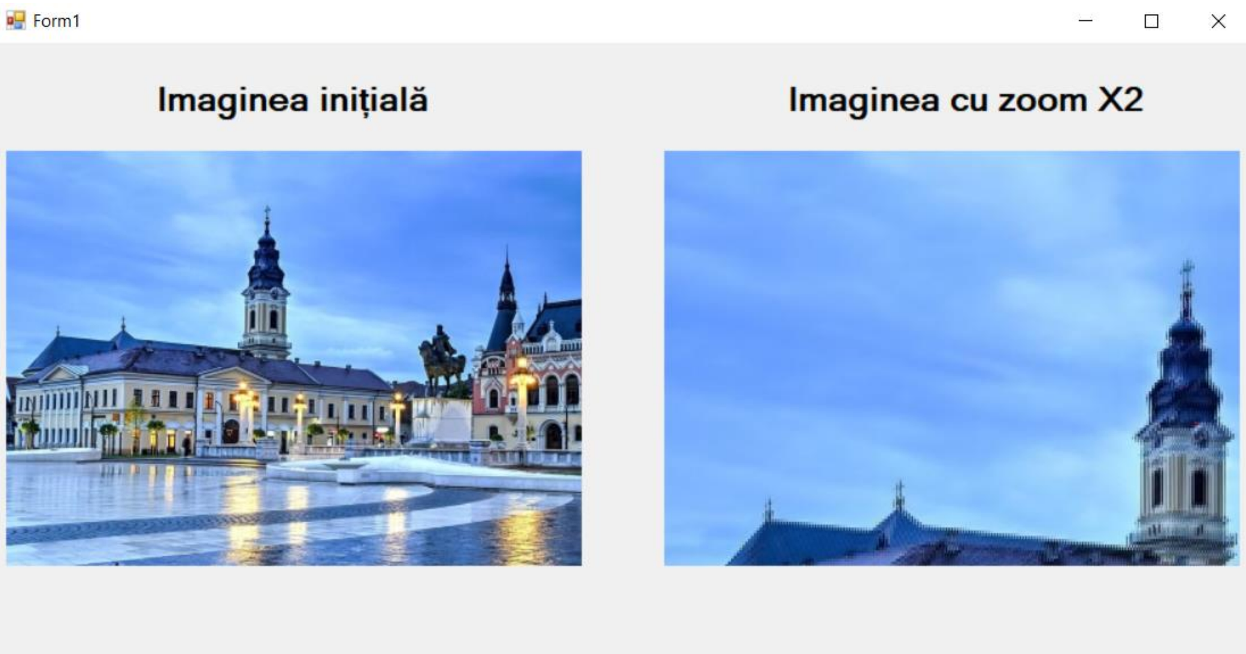


Fig.1. Zoom x2

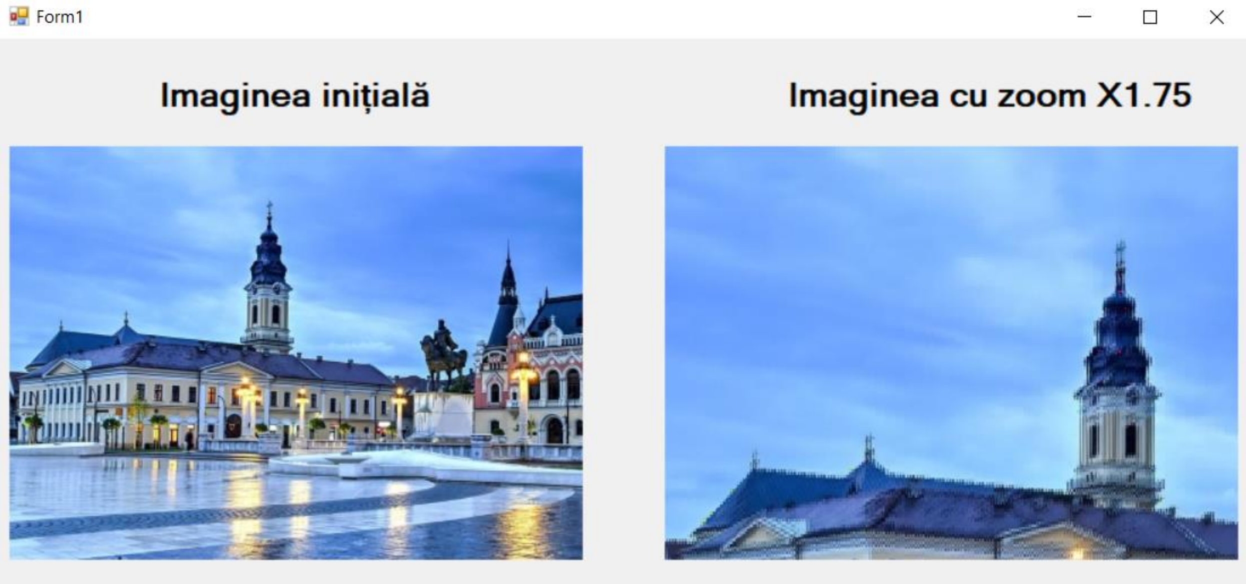


Fig. 2. Zoom 1.75

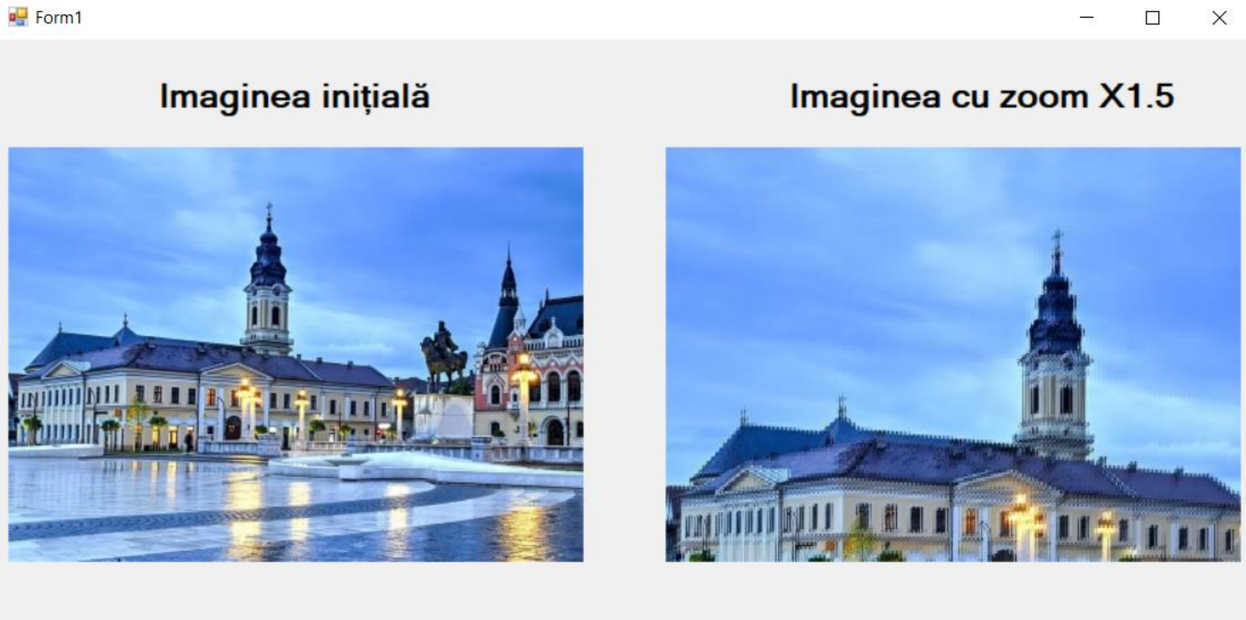


Fig.3. Zoom 1.5

BIBLIOGRAFIE

[1] Akima, H. (1970) A new method for interpolation and smooth curve fitting based on local procedures, J. Assoc. Comput. Mach., Vol. 4, pp. 589-602

[2] Catmull, E., Rom, R. (1974). A class of local interpolating splines, in: Computer Aided Geometric Design, R.E. Barnhill and R.F. Reisenfeld eds., Academic Press, New York, , pp. 317-326

[3] Bica, A.M. (2014). Optimizing at the end-points the Akima.s interpolation method of smooth curve fitting, Computer Aided Geometry Design, Vol. 31, pp. 245-257

MAXIMUL PRODUSULUI PENTRU SUMA CONSTANTA ȘI MINIMUL SUMEI PENTRU PRODUS CONSTANT

Gheorghe Marius MOLDOVAN

Colegiul Național „Mihai Eminescu”, Satu Mare moldovanghita@yahoo.com

Rezumat: *Un produs de două variabile strict pozitive, a căror sumă este constantă devine maxim când cele două variabile iau valori egale . O sumă de două variabile strict pozitive al căror produs este constant, devine minimă când cele două variabile iau valori egale . Deci suma a n numere strict pozitive variabile al căror produs este constant , devine minimă când termenii sunt egali. Demonstrația este analoagă teoremei referitoare produsului a n factori variabili cu sumă constantă.*

Cuvinte cheie:, maxim, produs, sumă

MAXIMUL PRODUSULUI PENTRU SUMA CONSTANTA

Pentru a aborda această teorie pornim de la cele două teoreme de teorie a punctelor de extrem , adică:

T_1: Un produs de douã variabile strict pozitive, a cãror sumã este constantã , devine maxim când cele douã variabile iau valori egale .

T_2: O sumã de douã variabile strict pozitive al cãror produs este constant, devine minimã când cele douã variabile iau valori egale .

În continuare propun o problemă ce frecvent apare în matematicã.

Dintre toate dreptunghiurile de perimetru 2p dat, sã se determine cel de arie maximã.

Dacã o laturã a dreptunghiului are lungimea x, atunci cealaltã laturã va fi p-x, iar aria dreptunghiului $A = x\left(p-x\right) = -x^2 + px$ care va avea un maxim , fiind a=-1<0, pentru $x = \frac{p}{2}$,

latura cealaltã $p - x = p - \frac{p}{2} = \frac{p}{2}$ va fi, deci $A_{\min} = \frac{p}{2} \cdot \frac{p}{2} = \frac{p^2}{4}$

Problema o putem aborda şi cu ajutorul urmãtoarei teoreme.

Teoremã:

Un produs de douã variabile strict pozitive, a cãror sumã este constantã , devine maxim când cele douã variabile iau valori egale .

Demonstraţie:

Fie x, y douã numere strict pozitive şi x+y=s (s constant), notând p=xy, numerele x şi y vor fi rãdãcinile ecuaţiei:

$t^2 - st + p = 0$,care fiind pozitive ,reale , deci $\Delta \geq 0$ adicã

$s^2 - 4p \geq 0$.

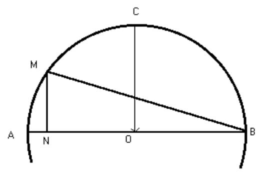
De aici $p \leq \frac{s^2}{4}$, deci valoarea maximã a lui p poate fi maxim şi $p_{\max} = \frac{s^2}{4}$, din care rezultã $\Delta = 0$, adicã $x = y = \frac{p}{2}$, pentru care obţinem $p = \frac{s^2}{4}$.

Putem da şi o justificare geometricã teoremei.

Fie un semicerc de diametru 2R=AB şi N϶AB.

Avem AN+NB=2R=constant. Pe de alte parte, aplicând teorema înălţimii în triunghiului dreptunghic AMB obţinem $MN^2= AN \cdot NB$

Rezultã cã produsul $AN \cdot NB$ este maxim când MN este maxim. Aceasta se întâmplã



când M alunge în punctul C, iar N în punctul O , adicã MN = R şi AN=NB=R.

Teorema se poate generaliza:

Dacã $x_1, x_2, ...x_n$ sunt n numere pozitive a cãror sumã $s = x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n$ este constantã , atunci maximul produsului $p = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot ... \cdot x_n$ este atins numai atunci când factorii devini egali.

Demonstraţia:

Se poate face uşor cu media lui Sturn , care este greu pentru liceu de aceea este mai uşor de determinat , justificat cu ajutorul urmãtoarei propoziţii:

Propoziţia:

Dacã pentru numerele strict pozitive $x_1, x_2, ..., x_n$ avem $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n = 1$, atunci $x_1 + x_2 + ... + x_n \geq n$, egalitatea având loc dacã şi numai dacã $x_1 = x_2 = ... = x_n = 1$

Demonstraţia:

Se face prin inducţia matematicã:

Pentru n=2 avem $x_1 \cdot x_2 = 1$ adicã $x_2 = \frac{1}{x_1}$,de unde $x_1 + x_2 = \frac{x_1^2 + 1}{x_1} \geq 2$ ea fiind echivalentã cu $(x_i - 1)^2 \geq 0$

Dacã $x_1 = x_2 = 1$ avem $x_1 + x_2 = 2$.

Dacã $x_1 \cdot x_2 = 1$ şi $x_1 + x_2 = 2$ atunci ecuaţia $x_i^2 - 2x_i + 1 = 0, (i = 1; 2)$ de unde $(x_i - 1)^2 \geq 0$

Presupunem adevãratã propoziţia pentru k, $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_k = 1$ avem $x_1 + x_2 + ... + x_k \geq k$ egalitatea având loc numai pentru $x_1 = x_2 = ... = x_k = 1$

Demonstrãm propoziţia pentru k+1.

Avem numerele strict pozitive $x_1, x_2, x_3, ..., x_k, x_{k+1}$ astfel încât $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_{k-1} x_k x_{k+1}$ care au produsul egal cu 1, şi $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{k-1} + x_k \cdot x_{k+1} > k$.

Fãrã a restrânge generalitatea , deoarece putem reindicia termenii, putem presupune cã $x_{k+1} \geq 1, x_k \leq 1$ de unde $(x_{k+1} - 1)(1 - x_k) \geq 0$.

De aici rezultã cã $x_k + x_{k+1} \geq x_k \cdot x_{k+1} + 1$ vom avea în final $x_1 + x_2 + ... + x_k + x_{k+1} \geq x_1 + x_2 + ... + x_{k-1} + x_k x_{k+1} + 1 \geq k+1$ ceea ce demonstreazã inegalitatea.

Dacã $x_1 = x_2 = x_3 = ... = x_{k+1} = 1$, avem evident $x_1 + x_2 + ... + x_{k+1} = k+1$

Sã presupunem cã $x_1 = x_2 = ... = x_{k+1} = 1, x_1 + x_2 + ... + x_{k+1} = k+1$ şi cã de exemplu $x_{k+1} > 1$. Atunci fãrã a restrãnge generalitatea avem $x_k < 1$ ceea ce ne conduce la inegalitatea strictã $x_1 + x_2 + ... + x_{k+1} > k+1$ ceea ce este fals. Cu ajutorul acestei propoziţii putem demonstra:

Teoremã:

Produsul a n factori variabili strict pozitivi a cãror sumã este constantã , devine maxim când factorii sunt egali .

Demonstraţia:

Fie $x_1, x_2, ..., x_n$ strict pozitiv , astfel încât $x_1 + x_2 + ... + x_n = s$ (constant şi sã notãm $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n = p$)

Aplicând propoziţia anterioarã numerelor:

$\frac{x_1}{\sqrt[n]{p}}, \frac{x_2}{\sqrt[n]{p}}, ..., \frac{x_n}{\sqrt[n]{p}}$ unde $\frac{x_1}{\sqrt[n]{p}} \cdot \frac{x_2}{\sqrt[n]{p}} \cdot ... \cdot \frac{x_n}{\sqrt[n]{p}} = \frac{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n}{p} = 1$ de unde rezultã cã $\frac{x_1}{\sqrt[n]{p}} + \frac{x_2}{\sqrt[n]{p}} + ... + \frac{x_n}{\sqrt[n]{p}} \geq n$ adicã $p \leq \left(\frac{s}{n}\right)^n$ egalitatea având loc dacã şi numai dacã $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

Rezultã valoarea maximã a produsului este $\left(\frac{s}{n}\right)^n$ care se obţine pentru $x_1 = x_2 = ... = x_n = \frac{1}{n}$

Din relaţia $p \leq \left(\frac{s}{n}\right)^n$ se poate deduce $s \geq n\sqrt[n]{p}$ din care putem deduce cã valoarea minimã a sumei este $n\sqrt[n]{p}$ care este atinsã pentru $x_1 = x_2 = ... = x_n = \sqrt[n]{p}$.

Exemple:

1.) Din mulţimea triunghiurilor cu perimetrul 2p sã a se determine cel de arie maximã.

Aria triunghiului este datã de formula lui Heron

$A = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}, p = \frac{x+y+z}{2}$ unde p semiperimetru şi x,y,z sunt lungimile laturilor triunghiului.

Funcţia $A:(0,\infty) \to (0,\infty)$ este o funcţie strict crescãtoare ,iar p este o constantã , maximul ariei sa va obţine simultan cu cel al produsului $(p-x)(p-y)(p-z)$ ai cãrui factori au suma $(p-x)+(p-y)+(p-z) = 3p-(x+y+z) = 3p-2p = p$ deci constantã.

Atunci maximul ariei se va obţine pentru factorii egali

$p-x = p-y = p-z$, adicã $x = y = z = \frac{2p}{3}$ şi $A_{\max} = \frac{p^2\sqrt{3}}{9}$ fiind triunghiul echilateral.

2.) Dintr-o foaie dreptunghiularã de tablã de arie A=192 cm^2 sã se confecţioneze un rezervor paralelipipedic fãrã capac , de volum maxim.

Rezolvare:

Dacã dimensiunile bazei rezervorului sunt x şi y iar z înãlţimea, şi notãm cu V volumul, vom avea: $xy+2(yz+xz)=192$ iar V(x,y,z)=xyz

Produsul termenilor sumei din primul membru al ariei va fi: $(xy)(2yz)(2xz)=4x^2y^2z^2=4V^2$ care îşi atinge maximul simultan cu V. Conform teoremei demonstrate maximul se obţine pentru xy=2yz=2xz de unde x=y=2z care înlocuitã în arie vom avea 3xy=192 sau $3x^2=192, x^2=64, x=y=8, z=4.$

$V_{\max}=256cm^3$

3)Sã se determine maximul funcţiei:

$f(x)=(3x-1)(4-2x)(1-x), f:\left(\frac{1}{3},1\right)\to\mathbb{R}$

Rezolvare:

Funcţia f(x) este produsul a trei factori pozitivi cu suma constantã
(3x-1)+(4-2x)+(1-x)=4 constantã.

Pe de altã parte 3x-1=4-2x=1-x este incompatibil.

Pentru gãsirea soluţiilor se procedeazã asfel:

Se înmulţeşte funcţia f(x) cu λ,μ aranjându-le convenabil $\lambda\mu f(x)=(3\lambda x-\lambda)(4\mu-2\mu x)(1-x)$ şi suma expresiilor din cele trei paranteze: $(3\lambda-2\mu-1)x+4\mu-\lambda+1=0$ este constantã numai dacã $3\lambda-2\mu-1=0$, ,atunci din $\lambda(3x-1)=\mu(4-2x)=1-x, \lambda=\frac{1-x}{3x-1}, \mu=\frac{1-x}{2(2-x)}$ care se înlocuiesc în $3\lambda-2\mu-1=0$

se obţine ecuaţia de gradul al doilea $9x^2-20x+9=0$ cu soluţie acceptabilã $x_1=\frac{10-\sqrt{19}}{9}$.

Acesta este punctul de maxim global al lui f şi $\max f=f\left(\frac{10-\sqrt{19}}{9}\right)\approx 4,43$

MINIMUL SUMEI PENTRU PRODUS CONSTANT

Teoremã:

O sumã de douã variabile strict pozitive al cãror produs este constant, devine minimã când cele douã variabile iau valori egale .

Demonstraţie:

Fie x şi y douã numere strict pozitive , produsul lor p=xy este constant şi S=x+y , x şi y sunt rãdãcinile reale pozitive ale ecuaţiei $t^2-st+p=0$, adicã $\Delta\ge 0, s^2-4p\ge 0$.

Dat fiind faptul cã s>0 şi p>0 rezultã cã $s>2\sqrt{p}$, deci valoarea minimã pe care o poate lua este $s_{\min}=2\sqrt{p}$ care obţinem pentru rãdãcinile egale ale ecuaţiei $t^2-st+p=0$ adicã x=y=$\sqrt{p}$.

Exemplu:

1.) Douã forţe concurente F_1 şi F_2 al cãror direcţii fac un unghi de 60^0 60° au mãrimi variabile cu suma de 2N. Sã se gãseascã aceste forţe astfel încât rezultanta lor sã fie minimã.

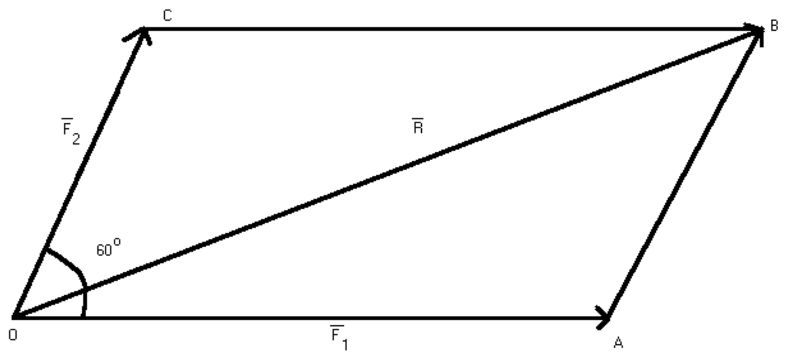
Rezolvare:

Aplicând teorema cosinusului în triunghiul OAB rezultã cã: $R^2=F_1^2+F_2^2-2F_1\cdot F_2\cdot\cos A$

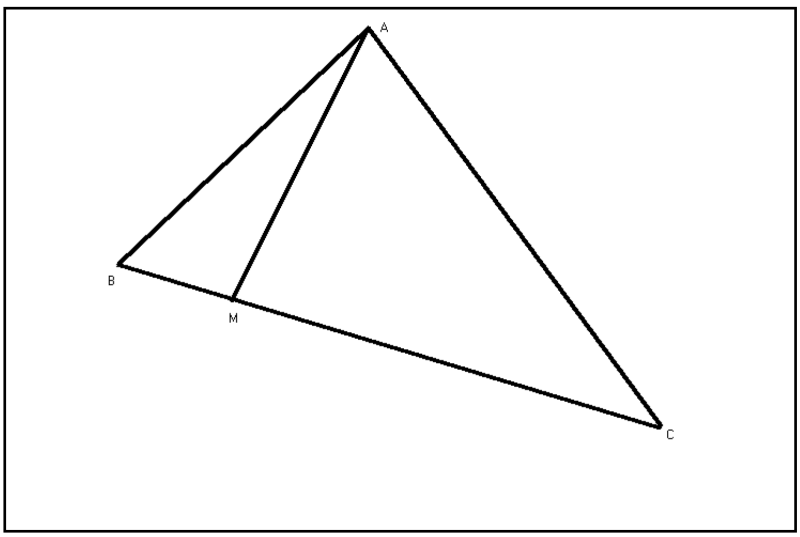
$-\frac{1}{2}$

$R^2 = \left(F_1 + F_2\right)^2 - 2F_1F_2 - 2F_1F_2\cos A = 4 - 2F_1F_2 + F_1F_2 = 4 - F_1F_2$

Mãrimea rezultantei este minimã când F_1F_2 este maximã, care se realizează pentru $F_1 = F_2 = 1N$ forţe egale $R^2 = 3 \Rightarrow R_{\min} = \sqrt{3}F$



2.) Fie triunghiul ABC şi un punct mobil pe latura BC. Care este poziţia punctului M pentru care raportul $\dfrac{AM^2}{BM}$ este minim.



Rezolvare:

Construim AD ⊥ BC.

Aplicând teorema generalizatã a lui Pitagora, avem

$AM^2 = BM^2 + AB^2 \pm 2BM \cdot BD$ din care rezultã

$$\frac{AM^2}{BM} = BM + \frac{AB^2}{BM} \pm 2BD$$

Ultimul termen al sumei din membrul drept este constant, deci minimul raportului din membrul stâng se obţine când suma $BM+\frac{AB^2}{BM}$ este minimã.

Dar termenii acestei ultimei sume au produsul $\frac{AB^2}{BM}\cdot BM=AB^2$ constant, atunci conform teoremei suma devine minimã pentru $\frac{AB^2}{BM}=MB$ adicã AB=BM şi $\min\frac{AB^2}{BM}=2\left(AB\pm BD\right)$.

Teorema se poate generaliza şi pentru n numere strict pozitive:

Suma a n numere strict pozitive variabile al cãror produs este constant , devine minimã când termenii sunt egali .

Demonstraţia este analoagã teoremei referitoare produsului a n factori variabili cu sumã constantã.

Exemplu:

1.) Pentru construcţia unui depozit în formã de paralelipiped urmeazã sã se cheltuiascã a lei pentru $1m^2$ de uşã faţadã , b lei pentru $1m^2$ de duşumea , c lei pentru $1m^2$ de acoperiş plat şi d lei pentru $1m^2$ de ziduri laterale. Sã se determine dimensiunile clãdirii pentru ca la un volum V dat, costul ei C sã fie minim.

Rezolvare:

Notând cu x şi y dimensiunile bazei şi cu z înãlţimea paralelipipedului , avem V=xyz urmând sã determinãm minimul costului c .

$$c=axz+byz+cxy+2dyz+dxz=\left(a+d\right)xz+\left(b+c\right)xy+2dyz$$

Înmulţind termenii acestei sume avem:

$\left(a+d\right)xz\cdot\left(b+c\right)xy\cdot 2dyz=2\left(a+d\right)\left(b+c\right)dV^2$ care este constantã . Atunci valoarea minimã a sumei C se obţine pentru

$\left(a+d\right)xz=\left(b+c\right)xy=2dyz$,de unde $y=\frac{a+d}{2d}x; z=\frac{b+c}{2d}x$ pe care introducându-le în relaţia V=xyz obţinem $x=\sqrt[3]{\frac{4d^2V}{\left(a+d\right)\left(b+c\right)}}$ astfel $y=\sqrt[3]{\frac{\left(a+d\right)^2V}{2d\left(b+c\right)}}$ şi $z=\sqrt[3]{\frac{\left(b+c\right)^2}{2d\left(a+d\right)}}$ iar $c_{\min}=3\cdot\sqrt[3]{2d\left(a+d\right)\left(b+c\right)V^2}$

2.)Sã se confecţioneze dintr-un pãtrat de carton de laturã a o cutie fãrã capac de volum dat V. Sã se confecţioneze cutia din materialul minim posibil.

Rezolvare:

Dacã y este latura bazei cutiei şi x înãlţimea sa , avem V= xy^2 constant. Aria celor cinci feţe ale cutiei va fi $A=y^2+4xy$, sau exprimând x din volum $x=\frac{V}{y^2}$ vom avea $A=y^2+\frac{4V}{y}$.

Pentru a stabili minimul sumei constatãm cã $\left(y^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{4V}{y}=4V$ constant, avem

$\frac{y^2}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{4V}{y}}{1}$,de unde $y^3 = 2V$ deci $y = \sqrt[3]{2V}, x = \frac{V}{y^2} = \sqrt[3]{\frac{V}{4}}$. Pãtratul original trebuie sã aibã latura de lungime $y + 2x = 2\sqrt[3]{2V}$.

BIBLIOGRAFIE

[1] Megan, M. (1999). Analiza matematică, Ed. Miron, Vol, I-II
[2] Nicolescu, M., Dinculeanu, M., Maraus, S. (1971). Analiza matematică, Ed.didactică
[3] Siretchi, G. (1985). Calcul diferenţial şi integral, Ed. Ştiinţifică şi enciclopedică, Vol. I-II
[4] Andrica, D., Purdea, I., Ursu, S., Duca, D., Agratini, O., Lobonţ, G. (2001). Manual pentru clasa a XI-a , Ed. Gil, Zalău
[5] Stănăşilă, O. (1989). Analiza matematică, Editura Didactica si Pedagogica
[6] Sfichi, R. (1990). Probleme de limită şi extrem în fizică Editura Didactica si Pedagogica,
[7] ***, www.google.ro

INEGALITAȚI PENTRU VALORI MEDII UZUALE

Iuliana MOLDOVAN

Şcoala Gimnazială „Grigore Moisil" Satu Mare, jud. Satu Mare, iu_moldovan@yahoo.fr

Rezumat: *În rezolvarea unor probleme de analiză matematică inegalitățile între medii sunt foarte des folosite, pornind de la relația dintre media lor aritmetică, geometrică și armonică au loc inegalitățile, pe care le-am propus spre rezolvare în această lucrare.*
Metodele de rezolvarea problemelor stimulează învățarea, puterea elevilor de analiză, dar mai ales creativitatea lor și puterea de comunicare dintre ei. Specific acestor metode este faptul că ele promovează interacțiunea dintre elevi, schimbul de idei, de cunoştinţe, activitatea didactică fiind interactivă, deci nu se va instala monotonia în procesul instructiv - educativ.
Cuvinte cheie: medie, funcție, derivată, probleme

Determinarea valorilor extreme ale şirurilor finite de numere reale prezintă un interes deosebit pentru rezolvarea pe o cale mai simplă a unor probleme de algebră şi analiză matematică , fizică. Aceste valori extreme se obţin pentru diferite medii.

Inegalitatea pentru media ordinul r .

Fie $r \in \overline{\mathbb{R}}$ şi sistemele de numere reale pozitive:

$(a_1, a_2, \ldots a_n)$ respectiv $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$

Definiţie:

Înţelegem prin media de ordinul r a numerelor pozitive $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ cu ponderile $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ numărul $M_n(r, a, p) = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i a_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}\right)^{\frac{1}{r}}$ unde $r \in \mathbb{R}^*$, (1)

$= \left(\prod_{i=1}^{n} a_i^{p_i}\right)^{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} p_i}}, r = 0$

$= min(a_1, a_2, \ldots, a_n), r = -\infty$

$= max(a_1, a_2, \ldots, a_n), r = +\infty$

Pentru r=-1;0;1;2 se obţin pe rând: media armonică, media geometrică , media aritmetică și media pătratică ponderată.

Teoremă:

Valorile medii de ordin $r \in \overline{\mathbb{R}}$, formează o ierarhie monotonă, adică $M_n(r_1, a, p) \leq M_n(r_2, a, p)$ pentru $r_1, r_2 \in \overline{\mathbb{R}}, r_1 < r_2$, egalitatea obţinându-se pentru $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Demonstraţia:

Se poate demonstra cu ajutorul derivatelor. Fiind $M_n(r, a, p)$ o funcţie derivabilă în raport cu r, va rezulta $M_n'(r, a, p) \geq 0$ deci funcţia $M_a(r, a, p)$ este crescătoare $\Rightarrow$ inegalitatea

Se notează cu $N_n(r, a, p) = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^{r+1}}{\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^{r}}, r \in \mathbb{R},$ (2)

$= min(a_1, a_2, \ldots, a_n), r = -\infty$

$= max(a_1, a_2, \ldots, a_n), r = +\infty$

Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ şi $p_1 = p_2 = \ldots = p_n, N_n(r, a, p)$ - numită medie cvasi–armonică ponderată se poate deduce din media aritmetică ponderată şi alte inegalităţi care derivă din monotonia acestei medii şi anume:

$N_n(r_1, a) \leq N_r(r_2, a)$ pentru $r_1, r_2 \in \overline{\mathbb{R}}, r_1 < r_2$

În cele ce urmează voi prezenta aplicaţii ale mediilor introduse prin formule (1) şi (2) care se pot aplica în matematica liceului.

Inegalităţile fundamentale privind valorile medii.

$min(a_i) \leq H(a,p) \leq G(a,p) \leq A(a,p) \leq P(a,p) \leq max(a_i)$ acest şir de inegalităţi rezultă din monotonia lui (1) adică $M_n(-\infty) \leq M_n(-1) \leq M_n(1) \leq M_n(2) \leq M_n(+\infty)$

În matematica de liceu se folosesc deseori mediile aritmetice, geometrice şi armonice a n numere reale pozitive.

Fie n numere reale pozitive $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$. Între media lor aritmetică, geometrică şi armonică au loc inegalităţile.

$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot\ldots\cdot a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}$, egalitatea având loc dacă şi numai dacă $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Justificarea relaţiei:

Dacă notăm cu $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ rezultă că $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot\ldots\cdot a_n \leq \underbrace{\frac{S}{n} \cdot \frac{S_1}{n} \cdot\ldots\cdot \frac{S_n}{n}}_{n\ \ factori}$ relaţia care este (maxim produs pentru suma constantă) echivalentă cu inegalitatea dintre media geometrică şi media aritmetică.

Analog notăm cu $P = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$ şi ţinând cont de minimul sumei pentru produs constant avem:

$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} \geq \frac{1}{p} + \frac{1}{p} + \ldots + \frac{1}{p} = \frac{n}{p}$, dar aceasta nu este altceva decât inegalitatea dintre medie geometrică şi media aritmetică. Apoi prin proprietatea de tranzitivitate rezultă inegalitatea scrisă.

O altă justificare se poate face prin inducţie matematică pentru $n \geq 2$, iar o a treia justificare se poate face cu ajutorul trinomului de gradul II. Ştim că $\forall a \in \mathbb{R}, a^2 \geq 0$.

Pornind de la inegalitatea evidentă $\sum_{i=1}^{n}\left(x\sqrt{a_1} + \frac{1}{\sqrt{a_1}}\right)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ se poate deduce inegalitatea mediilor.

Într-adevăr trinomul $\sum_{i=1}^{n}\left(x^2 a_i + 2x + \frac{1}{a_i}\right) \geq 0$ conduce la trinomul $x^2 \sum_{i=1}^{n} a_i + 2nx + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \geq 0$. Oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, care are loc numai pentru $a = \sum_{i=1}^{n} a_i > 0$ şi $\Delta \leq 0$ dar $\Delta = 4n^2 - 4 \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \leq 0, /:4$

$n^2 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}$ din care prin extragerea rădăcinii rezultă $\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i \geq \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}}$ (inegalitatea dintre m_a şi m_h)

Rezolvarea unor inegalităţi:

1.) Pentru $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ are loc: $\frac{a^3+b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$ care se poate rezolva cu inegalitatea $M_n(r_1, a, p) \leq M_n(r_2, a, p)$ şi anume $M_2(1, a) \leq M_2(3, a)$

2.) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ are loc

$\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c} + \frac{b^2+c^2+d^2}{b+c+d} + \frac{c^2+d^2+a^2}{c+d+a} + \frac{d^2+a^2+b^2}{d+a+b} \geq a + b + c + d$

Aplicând monotonia mediei cvasi-armonice ponderate $N_n(r_1, a, p) \leq N_n(r_2, a, p), r_1 < r_2$ avem $N_3(0, a) \leq N_3(1, a)$

Iar inegalităţile din culegerea de probleme pentru liceu (Năstăsescu), dacă a,b,c sunt numere reale pozitive, să se arate că:

1.) (a+b)(b+c)(c+a)$\geq$ 8abc

Se aplică $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$. Aplicată inegalitatea scrisă sub forma $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ pentru perechiile (a,b);(b,c) şi (c,a) şi înmulţind membru cu membru, rezultă inegalitatea scrisă.

2) $(a^2 + b^2) \cdot c + (b^2 + c^2) \cdot a + (c^2 + a^2) \cdot b \geq 6abc$

Din inegalitatea mediilor pentru numerele pozitive a^2,b^2,c^2 avem:

$a^2+b^2 \geq 2ab/\cdot c$

$b^2+c^2 \geq 2bc/\cdot a$ şi adunând acestea, rezultã inegalitatea .

$c^2+a^2 \geq 2ac/\cdot b$

3.) $2(a^3+b^3+c^3) \geq (a+b)ab+(b+c)bc+(c+a)ca$

Ştim cã $(x+y)^2 \geq 0$ din care $x^2-xy+y^2 \geq xy$,aplicãm inegalitatea scrisã pentru (a,b),(b,c),(c,a) şi înmulţind respectiv cu a+b, b+c, şi c+a apoi adunându-le obţinem inegalitatea datã.

4.) $\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a} \leq \frac{a+b+c}{2}, a,b,c \in \mathbb{R}_+^*$

Ştim cã $m_a \geq m_h, \frac{a+b}{2} \geq \frac{2ab}{a+b}$ din care $\frac{ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{4}$ scriind pentru (b,c) şi (c,a) apoi le adunãm şi rezultã inegalitatea.

5.) Sã se determine condiţiile în care se realizeazã minimul funcţiei $f:(0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x)=ax^r+bx^{-r}+c$ cu a,b,c>0.

Putem observa cã f(x) este suma a trei numere reale pozitive, deci putem aplica inegalitatea mediilor. $ax^r+bx^{-r}+c \geq 3\sqrt[3]{(ax^{-r})(bx^{-r})c}$astfel

$ax^r+bx^{-r}+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$ sau $f(x) \in 3\sqrt[3]{abc},\infty)$ atunci $f\sqrt[3]{abc}_{min}$ valoarea care este atinsã

în caz de numere reale:$ax^r=bx^{-r}=c \Rightarrow ab=c^2, x=\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{1}{r}}$.

6.) Dacã a,bϵ (0,1) , atunci $log_a \frac{2ab}{a+b}+log_b \frac{2ab}{a+b} \geq 2$

Folosind monotonia şi semnul funcţiei logaritmice cu baza subunitarã şi inegalitatea mediilor 0 pentru a,b ϵ (0,1) rezultã

$log_a \sqrt{ab}+log_b \sqrt{ab} \leq log_a \frac{2ab}{a+b}+log_b \frac{2ab}{a+b}$

sau

$log_2 \frac{2ab}{a+b}+log_2 \frac{2ab}{a+b} \geq \frac{1}{2}(log_a a\, b+log_b a\, b)=$

$\frac{1}{2}(1+log_a b+1+log_b a) \geq \frac{1}{2}\left[2+2\sqrt{\underbrace{log_a b \cdot log_b a}_{1}}\right]=\frac{1}{2}\cdot 4=2$

$\Rightarrow log_a \frac{2ab}{a+b}+log_b \frac{2ab}{a+b} \geq 2.$

7.) Ţinând seama cã $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2, \forall a,b \in \mathbb{R}_+^*$ sã se demonstreze : $\frac{(x_1^2+x_1+1)(x_2^2+x_2+1)\ldots(x_n^2+x_n+1)}{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n} \geq 3^n, x_i>0$

Rezolvare:

Ştim cã $x^2+x+1 \geq 3\sqrt[3]{x^2\cdot x\cdot 1}, x^2+x+1 \geq 3x$ din care $\frac{x^2+x+1}{x} \geq 3$ aplicând pentru fiecare factor şi înmulţind avem:

$\frac{x_1^2+x_1+1}{x_1}\cdot\frac{x_2^2+x_2+1}{x_2}\cdot\ldots\cdot\frac{x_n^2+x_n+1}{x_n} \geq \underbrace{3\cdot 3\cdot\ldots\cdot 3}_{n-ori}=3^n.$

BIBLIOGRAFIE

[1] Cherata, V., Voicilă, J. Mîndruleanu, L. (1994). Metode şi tehnici de rezolvare a problemelor de aritmetică, clasele I-VI, Editura Sibila, Craiova,.
[2] Cucoş, C. (1998). Psihopedagogie pentru examenele de definitivare şi grade didactice, Ed. Polirom, Iaşi
[3] Nicolescu, M., Dinculeanu, M., Maraus, S. (1971). Analiza matematică, Ed. Didactică
[4] Roşu, M. (2016). Elemente de matematică pentru profesorii din învăţământul primar, Editura Aramis Print, Bucureşti
[5] Stănăşilă, O. (1989). *Analiza matematică, Editura Didactica si Pedagogica*

DETERMINAREA UNEI FUNCȚII OLOMORFE CÂND SE CUNOAȘTE PARTEA IMAGINARĂ

Anda-Patricia MOZA

Studentă anul II, Matematică, Facultatea de Informatică și Științe, Universitatea din Oradea,
andamoza2002@gmail.com

Rezumat: *Dacă se dă partea imaginară a unei funcții olomorfe, se cunoaște metoda determinării funcției prin integrarea unei diferențiale totale pe un drum format din reuniunea a clasei de drumuri paralele cu axele de coordonate. În această lucrare vom arăta ca se poate determina funcția prin integrarea unei derivate parțiale ale unei funcții integrabilă în raport cu o anumită variabilă.*

Cuvinte cheie: funcție olomorfă, parte imaginară

Preliminarii:

Reluarea noțiunilor legate de diferențiabilitatea unei funcții reale $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de n variabile reale, definită într-un domeniu D.

Printr-un domeniu vom înțelege o mulțime deschisă și convexă. O mulțime A, spunem că este deschisă dacă oricare ar fi un punct $\alpha \epsilon A$, există un disc $U(\alpha, r) \subset A$. Despre mulțimea A, spunem că este conexă(sau dintr-o bucată) dacă oricare ar fi două puncte M, N din mulțimea A pot fi unite printr-o linie poligonală conținută în A.

Spunem că funcția $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de n variabile reale definită pe acest domeniu D este diferențiabilă în punctul $(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \dots, \overset{\circ}{x}_n)$ dacă avem într-o vecinătate $U_{(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \dots, \overset{\circ}{x}_n)}$

$$\text{(1)} \qquad \Delta u = (u_1 + \xi_1)\Delta x_1 + (u_2 + \xi_2)\Delta x_2 + \cdots + (u_n + \xi_n)\Delta x_n,$$

unde prin Δu am notat a creșterea funcției u corespunzătoare creșterii $\Delta x_1 = x_i - \overset{\circ}{x}_i$, u_i sunt numere fixe și $\xi_n \longrightarrow 0$ atunci când $\Delta x_1 \to 0, \Delta x_2 \longrightarrow 0, .., \Delta x_n \longrightarrow 0$.

Dacă o funcție $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ definite pe D, este diferențiabilă în punctul interior $(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \dots, \overset{\circ}{x}_n)$, atunci există în $\left(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \dots, \overset{\circ}{x}_n\right)$ derivatele parțiale $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ egale cu u_i.

Într-adevăr punând în $x_2 = \overset{\circ}{x}_2, x_3 = \overset{\circ}{x}_3, \dots, x_n = \overset{\circ}{x}_n$ avem :

$$\lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{u\left(\overset{\circ}{x}_1 + \Delta x_1, \overset{\circ}{x}_2, \overset{\circ}{x}_3, \dots, \overset{\circ}{x}_n\right) - u\left(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \dots, \overset{\circ}{x}_n\right)}{\Delta x_1} = \lim_{\Delta x_1 \longrightarrow 0} (u_1 + \xi_1) = u_1.$$

Folosind acest rezultat, relația (1) se scrie:

$$\text{(2)} \qquad \Delta u = \frac{\partial u}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\Delta x_2 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\Delta x_n + \xi_1 \Delta x_1 + \xi_2 \Delta x_2 + \cdots + \xi_n \Delta x_n.$$

Definiția 1: Partea principală din relația (2) se numește diferențiala funcției$u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ în punctul $(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \dots, \overset{\circ}{x}_n)$ și se notează

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n} dx_n$$

unde dx_i sunt diferențialele variabilelor independente x_i.

Dacă funcția $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ este derivabilă parțial în raport cu variabila x_i în punctul $(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \dots, \overset{\circ}{x}_n)$ atunci ea este continuă parțial cu x_i în punctul $(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \dots, \overset{\circ}{x}_n)$.

Dacă funcția $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ este derivabilă parțial în raport cu fiecare variabilă atunci funcția este continuă în raport cu fiecare variabilă.

În concluzie, funcția $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ este diferențiabilă în punctul $(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \dots, \overset{\circ}{x}_n)$ dacă:

1°. Există derivatele parțiale $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ finite ($\frac{\partial u}{\partial x_i} \in \mathbb{R}$) a punctului $(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \dots, \overset{\circ}{x}_n)$

2°. Aceste derivate sunt continue în $(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \dots, \overset{\circ}{x}_n)$.

Vom relua pentru funcția reală de două variabile reale(x, y) condiția necesară și suficientă ca derivatele mixte de ordinul doi să fie egale. (Teorema A. Schwarz). Dacă funcția $u(x, y)$ are derivatele parțiale mixte de ordinul doi într-o vecinătate a lui $u(x, y) \in D$ și dacă $f''_{xy}(x, y)$ este continuă, atunci $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$.

Diferențiala unei funcții de mai multe variabile se numește diferențială totală.

O funcție $f: D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, se numește funcție complexă de variabilă complexă $z = x + iy$, care face ca fiecărui număr complex $z \in D$ să-i corespundă un singur număr complex $w = f(z)$.

Observație: Dacă funcția f face ca unui număr complex $z \in D$ să-i corespundă mai multe valori atunci vom defini o funcție complexă multiformă ca de exemplu:
$f(z) = \ln z, z \in \mathbb{C}^*$ *sau* $f(z) = \sqrt{z}, z \in \mathbb{C}$.

Dacă $z = x + iy;\ x, y \in \mathbb{R}$, atunci $w = f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, unde $x, y, u, v \in \mathbb{R}$;
atunci pun în evidență două funcții reale $u: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, v: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

În acest caz egalitatea $w = f(z)$, poate fi interpretată ca transformarea punctuală care transformă punctele din planul (z), numit planul variabilei independente în punctul din planul (w) numit planul variabilei dependente.

Studiul unei funcții complexe de variabilă complexă revine la studiul unui cuplu de două funcții reale de două variabile reale

$$u(x, y) = Ref(z), v(x, y) = Imf(z).$$

Fie $f(z) = u(x, y) + iv(x, y),\ \ z = x + iy \in D \subset \mathbb{R}^2$.

Definiție : Fie $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, o funcție complex de variabilă $z = x + iy$ definite în D și $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$. Prin definiție derivate în z_0, este :

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y}$$

dacă limita există și este finite. Dacă derivate $f'(z_0)$ esxistă atunci spunem că funcția este monogenă.

Pentru ca limita să existe este necesar să existe limitele pe dreapta $y = y_0$ pentru $\Delta x \longrightarrow 0$ și pentru $x = x_0$ pentru $\Delta y \longrightarrow 0$ și aceste limite să fie egale.

Prima limită

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (\frac{\Delta u}{\Delta x} + i\frac{\Delta v}{\Delta y}) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_{0,} y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

A doua limită:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{i\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{i}\left(\frac{\Delta u}{\Delta y} + i\frac{\Delta v}{\Delta y}\right)$$
$$= \frac{1}{i}\left[\lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{\Delta y} + i \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{\Delta y}\right]$$
$$= \frac{1}{i}\left[\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{y}(x_0, y_0)\right].$$

Pentru ca limita să existe este necesar ca cele două limite să fie egale în z_0.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} + i\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y}\right).$$

Egalitate echivalentă cu:
$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+i\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}=\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y}-i\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y}$$
De unde obținem condițiile Cauchy-Riemann:
$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)=-\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}\end{cases}$$
În acest caz
$$f'(z_0)=\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+i\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}\ sau\ f'(z_0)\ =-i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)+\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)\ sau$$
$$f'(z_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\ \ sau\ f'(z_0)=\frac{1}{i}\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}.$$
Fie funcția $f: D\subset\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{C}$, o funcție de clasă $C^2\ pe\ D$.

Funcția $\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ se numește laplacianul funcției $f\ pe\ D$.

Dacă $\Delta f=0$ funcția f se numește armonică pe Ω.

Definiție: Fie $u(x,y)\ și\ v(x,y)$ două funcții armonice pe D. Dacă $\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$ în orice punct din D, atunci $v(x,y)$, se numește conjugata armonică a funcției $u(x,y)$.

Observație: În general nu orice funcție armonică pe un domeniu D, admite o conjugată armonică. Dacă însă D este un domeniu simplu conex atunci orice funcție $u(x,y)$ armonică pe D admite o conjugată armonică $v(x,y)$ și numai una, abstracție făcând de o constantă aditivă (reală sau complexă).

Analizând definiția de mai sus se poate introduce următoarea definiție:

Definiție: Funcțiile $u(x,y)\ și\ v(x,y)$ pentru care funcția $f(z)=u(z)+iv(z)$ este olomorfă de pe D se numesc funcții armonice.

Dacă se dă partea imaginară a unei funcții olomorfe $f(z)=u(z)+iv(z)$ pe un domeniu D simplu conex atunci pentru determinarea ei vom judeca astfel. Pentru ca o funcție $w(x,y)$ să fie conjugata armonică a funcției $v(x,y)$ este nevoie să satisfacă condițiile Cauchy-Riemann:
$$\begin{cases}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial w}{\partial x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{\partial w}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$$
Pe de altă parte funcția $v(x,y)$ este conjugata armonică a unei funcții armonice $u(x,y)$ și au loc relațiile lui Cauchy-Riemann:
$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$$
Să determinăm condiția care leagă aceste conjugate:

Dacă: $\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial x} = -\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{\partial(-u)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial(-u)}{\partial y} \end{cases}$

De unde rezultă că $w(x,y) = -u(x,y)$.

Folosind această egalitate obținem expresia funcției olomorfe $f(z) = w(x,y) + iv(x,y) = -u(x,y) + iv(x,y)$.

Pentru determinarea funcției $w(x,y)$ olomorfă și conjugata armonică a funcției $v(x,y)$ armonică vom aplica două metode.

Metoda I: scriem definiția conjugatei unei funcții date, avem: $\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$

Și $\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$ unde $\frac{\partial v}{\partial x}$ $și$ $\frac{\partial v}{\partial y}$ sunt funcții continue de unde rezultă că $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}$ sunt contiune, deci $w(x,y)$ este o funcție diferențiabilă și are loc egalitatea:

$$dw(x,y) = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy = -\frac{\partial v}{\partial y}dx + \frac{\partial v}{\partial x}dy.$$

Deoarece funcția $v(x,y)$ este armonică rezultă că expresia $-\frac{\partial v}{\partial y}dx + \frac{\partial v}{\partial x}dy$ este o diferențiabilă totală, deci poate fi integrată pe un drum γ conținut într-un domeniu D, și are loc:

$$\int_\gamma dw(x,y) = \int_\gamma \left[-\frac{\partial v}{\partial y}dx + dy\right].$$

Deoarece funcția v este o funcție armonică, integrala curbilinie din membrul drept poate fi integrate pe un drum $\gamma = AB \cup BM$, format din reuniunea a două drumuri paralele cu axele Ox $și$ Oy, considerând că $A(x_0,y_0)$ și $M(x,y_0)$, obținem:

$w(x,y) = \int_{x_0}^{x}\left(-\frac{\partial v(t,y_0)}{\partial y}\right)dx + \int_{y_0}^{y}\left(\frac{\partial v(x,r)}{\partial x}\right)dr + k, unde\ t\epsilon[x_0,x]\ și\ r\epsilon[y_0,y], k\epsilon\mathbb{R}.$

Metoda a II-a: Din definiția conjugată avem:

$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$ $unde$ $\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}$ este o funcție de două variabile reale (x,y) continuă și deci integrabilă:

$$\int \frac{\partial w}{\partial y}dy = \int \frac{\partial v}{\partial x}dy + C(x),$$

De unde obținem $w(x,y) = \int \frac{\partial v}{\partial x}dy + C(x)$, unde funcția $C(x)$ se determină folosind a doua relație a lui Cauchy-Riemann.

Exemplu 1

Fie $v(x,y) = 2xy$. Să se determine funcția olomorfă pe $\mathbb{C}$ care are partea imaginară $v(x,y) = 2xy$.

Arătăm că funcția $v(x,y)$ este o funcție armonică. Pentru aceasta calculăm:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0\,, \frac{\partial v}{\partial y} = 2x \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, de\ unde\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

De unde rezultă că $v(x,y) = 2xy$ este o funcție armonică. Pentru ca $w(x,y)$ să fie conjugate armonică a funcției $v(x,y)$ este nacesar să satisfacă condițiile lui Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial w}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{\partial w}{\partial x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial y} = (2xy)'_x = 2y \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} = -(2xy)'_y = -2x \end{cases}$$

Pentru determinarea funcției w vom folosi două metode.

Metoda I:

Analizând derivatele parțiale $\frac{\partial w}{\partial x}$ $și$ $\frac{\partial w}{\partial y}$ observând că sunt funcții continue pe $\mathbb{R}^2$. Atunci funcția $w(x,y)$ este o funcție diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2$ și avem

$$dw(x,y) = \frac{\partial w(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial w(x,y)}{\partial y}dy = -\frac{\partial v}{\partial y}dx + \frac{\partial v}{\partial x}dy$$

Deoarece funcția $v(x,y)$ este o funcție armonică atunci $-\frac{\partial v}{\partial y}dx + \frac{\partial v}{\partial x}dy$ este o diferențiabilă totală pe $\mathbb{C}$ și expresia poate fi integrată pe o curbă γ.

$$\int_\gamma dw(x,y) = \int_\gamma \left(-\frac{\partial v}{\partial y}dx + \frac{\partial v}{\partial x}dy\right) = \int_\gamma (-2xdx + 2ydy)$$

Deoarece membrul drept este o diferențiabilă totală, integrala este o integrală independentă de drum și vom integra pe $\gamma = AB \cup BM$, unde AB este un segment paralel cu axa Ox $și$ BM un segment paralel cu axa Oy.

$$w(x,y) + k = \int_{AB\cup BM} (-2xdx + 2ydy) = \int_{AB} (-2xdx + 2ydy) + \int_{BM} (-2xdx + 2ydy).$$

Pentru ca integrala curbilinie să fie calculată este necesar să construim o reprezentare parametrică a drumurilor:

$$AB: \begin{cases} x = \varphi(t) = t \\ y = \psi(t) = 0' \end{cases}$$

$$t\epsilon[0,x] \quad BM: \begin{cases} x = \varphi(x) = x \\ y = \psi(v) = v' \end{cases} x\epsilon\mathbb{R}, v \qquad \epsilon[0,y]$$

$$w(x,y) + k = \int_0^x -2tdt + 2\cdot 0\cdot 0 + \int_0^y -2x\cdot 0 + 2vdv$$

$$w(x,y) = -x^2 + y^2 + C$$

Ținând cont de definiția conjugatei funcției $v(x,y) = Imf(z)$, avem $w(x,y) = -w(x,y) = x^2 - y^2 + C$. Rezultă că funcția $f(z) = x^2 - y^2 + i2xy + C$. Vom rezolva, folosind metoda doua adică integrând o derivată parțială.

Metoda a II-a:

Am arătat că $v(x,y) = 2xy$, este o funcție armonică, deci admite o conjugată armonică. Fie $w(x,y)$ conjugata armonică a funcției $v(x,y) = 2xy$, atunci satisface condiția lui Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial w}{\partial x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial w}{\partial y} = 2y \\ \frac{\partial w}{\partial x} = -2x \end{cases}$$

Fiecare derivată parțială este continuă deci integrabilă

$$\int \frac{\partial w}{\partial y}dy = \int 2ydy + C(x) \Rightarrow w(x,y) = y^2 + C(x).$$

Constanta variabilă $C(x)$ se determină impunând ca funcția $w(x,y)$ să satisfacă condiția din relațiile lui Cauchy-Riemann:

$\frac{\partial w(x,y)}{\partial x} = (y^2 + C(x))'_x = C'(x) \Rightarrow C'(x) = -2x$ de unde $C(x) = -x^2 + C$. Înlocuind în $w(x,y) = y^2 + C(x) = y^2 - x^2 + C(x)$. Ținând cont de definiția conjugatei armonice obținem că $u(x,y) = Ref(z) = -w(x,y) = x^2 - y^2 + C$.
Funcția olomorfă care are partea imaginară $v(x,y) = 2xy$ este
$f(z) = x^2 - y^2 + i2xy + C,\ C\epsilon\mathbb{R}$. Din acest exemplu rezultă că cele două metode sunt echivalente. A doua metodă are avantajul în a calcula mai simplu.

Exemplul 2
Să se determine funcția olomorfă pe $\mathbb{C}^*$ care are partea imaginară
$v(x,y) = 3 + x^2 - y^2 - \frac{y}{2(x^2+y^2)}$.
Arătăm că funcția $v(x,y)$ este armonică. Pentru aceasta calculăm:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2x + \frac{xy}{(x^2+y^2)^2},\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 2 + y\frac{-3x^2+y^2}{(x^2+y^2)^3}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -2y - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -2 - y\cdot\frac{-3x^2+y^2}{(x^2+y^2)^3}$$

Obținem:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

De unde rezultă că v este o funcție armonică. Pentru ca $w(x,y)$ să fie conjugată armonică a funcției $v(x,y)$ este necesar să satisfacă condițiile lui Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial w}{\partial x} \end{cases}$$

Pentru determinarea funcției vom folosi metoda integrării unei derivate parțiale integrabilă in raport cu o anumită variabilă și folosind o constantă variabilă pe care o determinăm folosind cealaltă relație a lui Cauchy-Riemann.

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \left(3 + x^2 - y^2 - \frac{y}{2(x^2+y^2)}\right)'_x = 2x + \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}$$

Deoarece $\frac{\partial w}{\partial y}$ este o funcție continuă pe $\mathbb{C}^*$, ea este o funcție integrabilă pe $\mathbb{C}^*$, în raport cu variabila y și are loc egalitatea:

$$\frac{\partial w}{\partial y}dy = \left(2x + \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\right)dy$$

Integrând egalitatea avem:

$$w(x,y) = \int\left[2x + \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\right]dy + C(x) = 2xy - \frac{x}{2(x^2+y^2)} + C(x)$$

Pentru determinarea constantei variabilei $C(x)$, folosim ceea de a doua relație a lui Cauchy-Riemann .

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} = 2y + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Calculăm

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \left[2xy - \frac{x}{2(x^2+y^2)} + C(x)\right]'_x = 2y - \frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+y^2)-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} + C'(x) = 2y - \frac{1}{2}\cdot\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + C'(x).$$

Egalând cele două expresii$2y+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=2y+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}+C'(x)$
De unde obținem $C'(x)=0$, deci avem $C(x)=k$.
Am obținut:

$$w(x,y)=2xy-\frac{x}{2(x^2+y^2)}+k.$$

Din definiția conjugatei funcției $Imf(z), w(x,y)=-u(x,y)$, rezultă
$u(x,y)=Ref(z)=-2xy+\frac{x}{2(x^2+y^2)}+k$, obținem

$$f(z)=-2xy+\frac{x}{2(x^2+y^2)}+i\cdot\left(x^2-y^2-\frac{y}{2(x^2+y^2)}+3\right)+k.$$

BIBLIOGRAFIE

[1] Ahlfors, L.V. (1966). Complex Analysis, Mc Graw-Hill New York
[2] Angheluță, T. (1957). Curs de teoria funcțiilor de variabilă complexă, Editura Tehnică, București
[3] Boboc, N. (1969). Funcții complexe, Editura Didactică și Pedagogie București,;
[4] Călugăreanu, G. (1963). Elemente de teoria funcțiilor de o variabilă complexă, Editura Didactică și pedagogică București
[5] Mocanu, P.T. (1972). Funcții complexe, Partea I, Cluj
[6] Mocanu, P.T. (2001). Funcții complexe, Editura Universității din Oradea
[7]Mocanu, P.T. Bicaz, D. Oors, G. I. Oros, G. (2009). Analiză complexă , Editura Aeternitas, Alba Iulia
[8] Oros, G., Oros, G.I., Cătaș, A. (2001). Matematici superioare, Culegere de probleme, Vol. I, Editura Universității din Oradea

ÎNVĂŢĂMÂNTUL PREŞCOLAR LA BAZA PREGĂTIRII PENTRU ŞCOALĂ

Ioana MUREȘAN

GPP nr 25 Oradea, jud. Bihor, profesor pentru învățământul preșcolar, ioanamuresan80@yahoo.com

Rezumat: *Rolul activităţii matematice în grădiniţă este de a iniţia copilul în procesul de matematizare, pentru a asigura înţelegerea unor modele uzuale ale realităţii având ca ipoteză de lucru specificul formării reprezentărilor matematice pe nivele de vârstă. Procesul de matematizare trebuie conceput ca o succesiune de activităţi – observare, deducere, concretizare, abstractizare – fiecare conducând la un anumit rezultat.*
Cuvinte cheie: activiăți matematice, abilități matematice

Pentru asigurarea unei continuităţi în dezvoltarea copilului şi mai ales pentru a i se potenţa şansa unei optime integrări în clasa pregătitoare, se prevede organizarea în grădiniţele de copii a unor grupe mari care să-i pregătească pe copii pentru acestă grupă pregătitoare de la şcoală. Constituirea acestor clase pregătitoare reprezintă o şansă dată tuturor pentru a se însuşi elementele formative care conduc la aptitudinile de şcolaritate.

Grupa mare îşi poate găsi finalitatea atunci când există o cooperare permanentă între educatoare şi învăţătoare, ambele fiind abilitate din punct de vedere psihopedagogic să lucreze cu copiii de această vârstă. Raţiunea constituirii acestor grupe în grădiniţă este de a asigura, prin structurile conţinutului şi ale activităţilor specifice, dezvoltarea copilului sub aspect cognitiv şi al limbajului, dezvoltarea psiho-motorie şi fizică şi formarea unor abilităţi artistico-estetice şi socio-afective. Aceste componente structurează, de fapt, direcţiile de dezoltare a personalităţii copilului care, pe parcursul şcolarizării, dobândeşte o altă devenire.

Clasa pregătitoare de la şcoală are la bază o strategie şi conţinuturi care nu copiază modelele şcolare. Strategiile adoptate promovează un alt sistem decât cel de până acum şi anume, o educaţie individualzată, cu accentuate valenţe formative, în funcţie de ritmul propriu de dezvoltare al fiecărui copil, de cerinţele, capacităţile şi nevoile sale.

Pornindu-se de la acest deziderat, se preconizează o nouă abordare a educaţiei preşcolarului în perspectiva drepturilor sale, ca persoană care trebuie respectată şi încurajată, care solicită o permanentă apreciere. Din acest punct de vedere conceptul de „educaţie timpurie" trebuie înţeles nu ca o coborâre a perioadei de şcolaritate ci ca un ansamblu de demersuri în următoarea perspectivă:

○ unicitatea copilului, copilul este unic, cu ritm de dezvoltare propriu, cu potenţialitatea sa, cu cerinţele sale;

○ abordarea copilului de la 0-6 ani în continuitate firească de dezvoltare, în care educaţia să aibă un caracter dinamic;

○ respectarea dreptului fundamental al copilului la joc şi, prin această activitate ludică, la învăţare;

○ pregătirea copilului pentru a învăţa;

○ accesul copilului la educaţie activă şi creativă;

○ accesul la formele democratice, specifice ale învăţământului românesc;

○ sprijinirea dezvoltării personaliăţii copilului fără hiatusuri sau disfuncţii;

○ formarea aptitudinii de şcolaritate, aşadar, o abordare complexă, din punct de vedere socio-emoţional,cognitiv, estetic şi psiho-motor, cu acent pe elementele formative.

Din această perspectivă, programa învăţământului preşcolar acceptă orice inovare a conţinutului, însă solicită respectarea şi atingerea ţintelor pe care le prefigurează obiectivele generale şi specifice ale învăţământului preşcolar.

Neavând obiective structurate pe grupe de vârstă, programa pare la prima vedere (mai ales pentru nespecialişti), incomodă. Din acest punct de vedere, educatoarele întâmpină dificultăţi în elaborarea planificărilor şi în structurarea conţinuturilor. Aceasta este doar o aparenţă, în realitate, pornind de la observaţia ştiinţifică asupra copilului, efectuată în cadrul unei evaluări predictive, educatoarea sesisează că există mari diferenţe în dezvoltarea copiilor din grupă, chiar dacă ei au aproximativ aceeaşi vârstă. Diferenţele apar cu mai mare pregnanţă la vârsta de 5-6 ani a copilului, în special la copiii normal dezvoltaţi şi care în familie au beneficiat de o atentă supraveghere, sau la cei care provin din medii socio-culturale defavorizate. În aceste situaţii, educaţia globală devine ineficientă, accentuează disfuncţiile şi prefigurează sistemul de educaţie, cu accent pe instrucţie şi nu pe educaţie, pe dezvoltarea liberă a creativităţii copilului, a întregii sale personalităţi.

Premisele de la care porneşte programa stau, deci, la baza conceptului de „educaţie timpurie" şi de sprijinire diferenţiată, în funcţie de capacităţile şi trebuinţele copilului, pe dezvoltarea lui, astfel încât acesta să fie capabil de însuşirea valorilor umaniste. Programa este un instrument de lucru în sprijinul educatoarei şi se adresează cadrelor didactice specializate în educaţia preşcolară; acestea îşi vor delimita conţinuturile ce urmează a fi predate, îşi vor ale strategiile care să conducă la alegerea şi asimilarea acestor conţinuturi, vor efectua evaluările care măsoară şi apreciază progresele copiilor: iniţiale, intermediare şi finale.

În ceea ce priveşte activitatea matematică, în programa şcolară se urmăreşte ca obiectivele specifice acestei discipline să se realizeze în conţinuturi adecvate vârstei preşcolare, printr-o abordare interdisciplinară şi cu valeţe practice evidente. De exemplu, formarea deprinderii de determinare a dimensiunii, a volumului, de cunoaştere a cifrelor, de discriminare a cantităţii, etc. se poate aborda în orice activitate care se organizează cu copiii. În prezentarea conţinutului unor asemenea activităţi s-a urmărit latura practică cu care copilul se confruntă cotidian. În acest fel, activitatea matematică din grădiniţă nu se va desfăşura ca un scop în sine; se va urmării dezvoltarea gândirii, formarea unor abilităţi care să-l conducă pe copil la rezolvarea unor situaţii problemă sau a unor situaţii fireşti de viaţă. Pentru categoria de „mulţime" se va folosi şi termenul de „colecţie", utilizat în manualele alternative de la clasa I. Termenii specifici se adresează, în primul rând, educatoarelor, urmărind ca acestea să-i introducă gradat, în conţinutul activităţilor organizate cu copiii.

De mare utilitate credem că vor fi fişele pentru exerciţii grafice şi pentru activităţi matematice, pe care educatoarele le pot interpreta ca modele sau sugestii de elaborare în realizarea sarcinilor didactice. Fişele conţin formularea obiectivului urmărit, mijloacele prin care poate fi realizat, cerinţele în legătură cu elementele ilustrative ce compun fişa, precum şi unele aspecte cu privire la evaluarea rezultatelor, atunci când se doreşte să se facă interpretarea globală, comparativă sau individuală.

Se ştie faptul că, în prezent copiii recunosc cifrele, fac exerciţii individuale şi în grup cu obiecte, piese geometrice, cu materiale distribuite individual, sau chiar efectuează simple exerciţii aritmetice în care se folosesc cifrele. La grupele mari, ponderea acestora va fi însemnată dar nu numai în activităţile matematice. De exemplu, la sectorul „Ştiinţă", copiii, prin joc, au posibilitatea să ordoneze seminţe, obiecte, plane, frunze, să le numere, să le aşeze spaţial unde doresc, să le diferenţieze, să le clasifice după diferite criterii, să le asambleze în diferite figuri. În sectorul „Construcţii" cel mai frecvent solicitat în organizarea grupului de joc, copiii pot număra piesele, componentele truselor respective, pot stabili caracteristice acestora (culorile, mărimea, asperitatea, duritatea, formele, criteriile de asamblare pe orizontală, verticală, în spaţiu), pot delimita aceste elemente în funcţie de ceea ce doresc să realizeze. În toate demersurile pe care le întreprinde cu copiii, educatoarea va urmări careacterul practic al activităţilor matematice.

Bine organizate, activităţile matematice din grădiniţă vor dezvolta capacităţi intelectuale, vor forma abilităţi practice care, mai târziu, vor conduce la formarea comportamentului pozitiv al copilului faţă de situaţiile concrete ce urmează să le rezolve.

Fără o cunoaştere profundă a acestui domeniu, fără abordarea ştiinţifică a obiectivelor, conţinuturilor, strategiile de realizare a acestora şi fără o evaluare continuă a rezultatelor (atât al activităţii educatoarelor, cât şi a progresului copiilor) nu se poate vorbi de strategia dezvoltării învăţământului preşcolar, de finalităţile sale în perspectiva reformei învăţământului.

Grupa mare, cuprinzând copiii de vârste între 5 şi 6 ani de grădiniţă, reprezintă puntea de legătură între învăţământul preşcolar şi cel primar. Aceasta are caracter obligatoriu, pentru o mai bună conturare a atitudinii de şcolaritate, pentru crearea premiselor integrării copiilor, cu şanse sporite de reuşită în activitatea şcolară.

Este necesară proiectarea unui conţinut optim şi coerent de instruire şi educare menit să vizeze dezvoltarea capacităţilor intelectuale, educarea afectivităţii, sociabilităţii şi a motivaţiei, dezvoltarea psiho-motorie a copilului şi să contribuie la maturizarea şcolară a acestuia.

Prin influenţele formative la care sunt supuşi copiii, pe fondul activităţii ludice şi opţionale, al interrelaţiilor promovate, se înregistrează mari progrese în cele trei domenii ale activităţii psihice: cognitive, afectiv-motivaţionale şi dezvoltarea voinţei şi a conduitei social-morale.

La intrarea în şcoală, copilul va dispune de un comportament cognitiv conturat care, deşi dependent de caracteristicile vârstei, constituie o premisă pentru asimilările viitoare.

Se cuvine ca educatorul şi învăţătorul să cunoască îndeaproape copilul, fiinţă activă, entitate cu particularităţi riguros individualizate, să înveţe să-l observe, să-i asculte dorinţele, să-i acorde sprijin, dându-i în acelaşi timp încredere în forţele proprii, încurajându-i tendinţa de independenţă şi autonomie în acţiune, să cultive aspiraţia, motivaţia, interesul pentru învăţătură şi pentru orice fel de activitate.

O dată cu capacităţile perceptive se dezvoltă şi reprezentările. Percepţia se detaşează de situaţii concrete determinate prin intermediul acţiunilor cu obiectele. Copilul învaţă să observe, să examineze obiectele, operând cu diverse criterii: formă, mărime, culoare, volum; percepe raporturile între mărimi şi obiecte diferite, raportul spaţial – poziţional al obiectelor aşezate în ordine crescătoare şi descrescătoare a şirului numeric, aspect foarte important pentru psihogeneza elementelor gândirii matematice.

În învăţământul preşcolar activitatea matematică contribuie la trecerea treptată la gândirea logică, abstractă, pregătind copiii pentru înţelegerea şi însuşirea matematicii în clasa întâi. Rolul activităţilor matematice nu este de a-i învăţa pe copii anumite noţiuni abstracte, ci de a pune bazele formării deprinderii de muncă intelectuală, de a-i face apţi să înţeleagă şi să descopere relaţii abstracte.

În învăţământul preşcolar rolul activităţilor matematice este de a iniţia copilul în procesul de matematizare. Procesul de matematizare este conceput ca o succesiune de activităţi: observare, deducere, concretizare, abstractizare, fiecare conducând la un anumit rezultat.

Cercetările în domeniul psihologiei învăţării matematice evidenţiază necesitatea acţiunii concrete cu obiecte, atât în învăţământul preşcolar, cât şi în învăţământul primar, pentru interiorizarea operaţiilor, precum şi pentru utilizarea proprietăţilor de comutativitate şi asociativitate în scopul însuşirii conştiente şi depline a operaţiilor aritmetice.

Programa activităţilor matematice din învăţământul preşcolar are obiective cadru, obiective de referinţă şi conţinuturi specifice diferitelor grupe de vârstă. Acestea sunt structurate în conformitate cu noua concepţie a studierii matematicii în ciclul primar.

În clasa pregătitoare principalele cunoştinţe, priceperi şi deprinderi matematice pe care le dobândeşte elevul se referă la numărul natural şi la operaţiile de adunare şi scădere, în grădiniţă copiii însuşindu-şi cunoştinţele pregătitoare pentru înţelegerea acestora.

Realizarea activităţii din grădiniţă impune nevoia acţiunii convergente educator – grupă mare – învăţător – clasa pregătitoare – pentru realizarea ţelului comun – trecerea treptată şi firească a copilului de la grădiniţă la şcoală.

Având un rol cu preponderenţă formativ, învăţământul preşcolar dezvoltă gândirea, inteligenţa, spiritul de obervaţie al copiilor, exersând operaţiile de analiză, sinteză, comparaţie, abstractizare, generalizare. Prin mânuirea materialului didactic în grădiniţă, copiii învaţă să formeze mulţimi de obiecte, descoperă proprietăţile lor caracteristice, stabileşte relaţiile dintre ele, efectuează operaţii cu ele. În cadrul jocurilor matematice, copiii sunt familiarizaţi cu unele noţiuni elementare despre mulţimi şi relaţii. Rezolvând exerciţii de gândire logică pe mulţimi concrete (figuri geometrice), ei dobândesc pregătirea necesară pentru înţelegerea numărului natural şi a operaţiilor cu numere naturale, pe baza mulţimilor şi a operaţiilor cu mulţimi (conjuncţia, disjuncţia, echivalenţa mulţimilor). Astfel, se desfăşoară exerciţii de clasificare, comparare şi ordonare a mulţimilor de obiecte.

BIBLIOGRAFIE

[1] Alb Lupaș, A. (2013). Matematica în grădiniță, Ed. Universității din Oradea
[2] Dumitrana, M. (2002). Activităţi matematice în grădiniţă, Bucureşti:Editura Compania
[3] Neagu, M., Mocanu, M. (2007). Metodica predării matematicii în ciclul primar, Iaşi: Editura Polirom
[4] Nicolae, C. (1982). Educarea capacităţii creatoare în procesul de învăţământ, Bucureşti :Editura EDP
[5] Oprescu, N. Dumitru, G. Dănilă, I. Novac, C. Ilie, V. Bunăiaşu, C. Cămăraşu, G. Păunescu, A. (2007). Metodica activităţilor instructiv-educative în învăţământul preşcolar, Craiova: Editura Didactica Nova
[6] Popa, C. (2006). Elemente de pedagogie preşcolară aplicată, Oradea:Editura Universităţii din Oradea

SECȚIUNEA DE AUR ÎN MUZICĂ

Andrea Csilla NEGRU

Liceul de Arte Oradea, județul Bihor, profesor de matematică, negru.andrea@yahoo.com

Rezumat: *În prezentul articol studiează din punct de vedere matematic numărul de aur φ, pe unul dintre cele mai misterioase numere, constituind de secole o fascinaţie pentru matematicieni artişti și muzicieni.*

Cuvinte cheie: secțiunea de aur, numărul de aur, numărul φ.

„Nu s-ar putea oare reprezenta muzica drept matematică a simţurilor şi matematica drept muzică a raţiunii? Căci muzicianul simte matematica, iar matematicianul concepe muzica. Muzica-i vis, matematica viaţa practică ! ” *- Sylvester*

Definiţie:

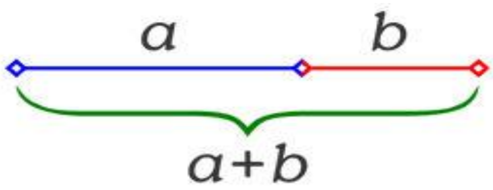


Fig.1

Secţiunea de Aur a segmentului **a+b** din desen este realizată atunci când raportul dintre ***a+b*** şi ***a*** este egal cu raportul dintre ***a*** şi ***b***. În această ilustraţie ***a*** este numit "extremă raţie", iar ***b*** este numit "medie".

Euclid l-a denumit pe *φ* ca fiind simpla împărţire a unui segment de dreaptă în ceea ce el a numit "medie" şi "extremă raţie". Iată cuvintele lui: "*Spunem că un segment de dreaptă a fost împărţit în medie şi extremă raţie atunci când segmentul întreg se raportează la segmentul mai mare precum se raportează segmentul cel mare la cel mai mic*".

Cu alte cuvinte, în Fig.1, dacă

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

atunci segmentul $a+b$ a fost împărţit intr-o secţiune de aur cu simbolul φ.

Raportul de aur este un număr iraţional, şi poate fi calculat din ecuaţia:

$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \varphi$, care conduce la: $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$, având ca rezultat:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}6180339887\ldots$$

În secolul V. î.Hr. matematicianul grec Hispassus din Metapontum a descoperit că φ este un număr cu un număr infinit de zecimale, care nu prezintă nici o regularitate în repetarea lor (adică este neperiodic, şi anume iraţional). El a descoperit că φ nu poate fi exprimat ca un raport între două numere întregi (de ex. 1/2;3/4;76/98;...etc.)..

Muzica, arta care exprimă cu ajutorul sunetelor sentimente si stări psihice, sunete combinate melodios şi armonic spre a fi plăcute auzului, a apărut de timpuriu în istoria culturii; de muzică a dispus omul înainte de a articula cuvinte, poate din paleolitic, sigur din neolitic. Ea se bazează pe sunetele produse de vibraţiile regulate ale corpurilor elastice, adică pe sunete muzicale (muzica electronică modernă foloseşte însaă uneori, pe lângă sunete muzicale, si zgomote, adică vibraţii neregulate; iar aşa-numita muzică abstractă utilizează cu precădere-zgomote.

Pitagora era şi fan al muzicii. El juca pe diferite instrumente muzicale cum ar fi un monocord, o cutie de rezonanţă cu o singură coardă. Pitagora a vrut să vadă ce sunete obţine dacă foloseşte un culisor pentru a modifica lungimea coardei vibrante. În lipsa acestui culisor, avem un sunet inţial elementar. Dacă acest culisor este plasat în centru, de fiecare parte a coardei vibrante vom obţine acelaşi sunet si anume un ton cu o octava mai ridicat decât acel sunet elementar. Dacă împărţim coarda în 3/5 sau 2/5 (trei cincimi sau doua cincimi), vom obţine o cvintă perfectă. În mod straniu, Pitagora a observat că dacă nu împarte coarda în rapoarte simple, notele obţinute erau discordante. Se pare că notele care impresionează cel mai plăcut urechea sunt cele obţinute prin plasarea culisorului în locul care împarte coarda în raportul de aur.

Numai matematica singură însă nu este capabilă să explice totul în muzică. Nu se va ajunge niciodată să se scrie muzică cu ajutorul simbolismului matematic ca, de exemplu, muzică în ecuaţii. Dar muzica poate fi tratată prin mijlocirea matematicii, aceasta dându-i un fundament solid de mare profunzime. În sprijinul acestei idei, calculatoarele pot fi folosite la mecanizarea orchestraţiilor compoziţiilor muzicale. În scrierea programelor, intervin legile armoniei.

Cine studiază istoria matematicii constată că Gh. Ţiţeica, Dimitrie Pompeiu, Traian Lalescu si Petre Sergescu cântau la vioară, Victor Vâlcovici la flaut, Mihail Ghermanescu la violoncel. Toţi aceştia nu erau simpli diletanţi, ci executanţi foarte buni ai compoziţiilor muzicale clasice. La Paris era arhicunoscut un cvartet desavârşit, din care făceau parte matematicienii Henri Poincare si C.A. Laisant, cvartet care interpreta în special pe L.van Beethoven.

Şi în muzica intervine, ca şi în poezie, cadenţa si măsura; numai aşa se asigură trăinicia si estetica operelor muzicale. Cum cadenţa si măsura înseamnă matematica, iată legătura strânsă dintre arta care poate exprima toate sentimentele omeneşti si ştiinţa certitudinii.

Toate cvartetele de coarde și toate orchestrele simfonice folosesc și astăzi descoperirea lui Pitagora cu privire la raporturile în numere întregi dintre diversele sunete muzicale. În plus, în programele de învățământ din Grecia antică și până în epoca medievală, muzica era considerată o parte a matematicii, iar muzicienii și-au concentrat eforturile asupra înțelegerii bazei matematice a sunetelor. Conceptul de „muzică a sferelor" a reprezentat o glorioasă sinteză dintre muzică și matematică, iar în imaginația filozofilor și muzicienilor el lega întregul cosmos într-un unic mare proiect care putea fi perceput doar de cei puțini, înzestrați în acest sens. După cum spunea marele orator și filozof roman Cicero (cca 100-43 î. Cr.): ”Urechile muritorilor sunt pline de acest sunet, dar ei sunt incapabili să-l perceapă... La fel de bine puteți încerca să priviți direct Soarele, ale cărui raze sunt prea puternice pentru ochii voștri." Abia în secolul XII s-a desprins muzica de rețetele și formulele matematice. Dar chiar și în secolul XVIII, filozoful raționalist german Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) scria: „Muzica este un exercițiu aritmetic secret, iar cel ce se ocupă cu ea nu-și dă seama că operează cu numere". Cam în aceeași perioadă, marele compozitor german Johann Sebastian Bach (1685-1750) avea o fascinație pentru jocurile cu note muzicale și cu numere. De exemplu, el și-a încifrat semnătura în unele din compozițiile sale prin coduri muzicale. În vechea notație muzicală germană, *B* însemna Si-bemol, iar *H* însemna Si-becar, deci Bach și-a putut scrie numele pe note: Si-bemol, La, Do, Si-becar. O altă criptare folosită de Bach se baza pe *Gematria*. Luând A=1, B=2, C=3 ş.a.m.d, B-A-C-H=14, iar J-S-B-A-C-H=41 (deoarece J şi I erau aceeași literă în alfabetul german din vremea lui Bach). In amuzanta sa carte *Bachanalia* (1994), matematicianul Eric Altschuler dă numeroase exemple pentru aparițiile lui 14 (codificat BACH) şi 41 (codificat JSBACH) în muzica lui Bach, apariții despre care crede că au fost introduse deliberat de Bach.

Data fiind această relație istorică între muzică şi numere, e cât se poate de firesc să ne întrebăm dacă Secțiunea de Aur (sa numerele lui Fibonacci) au jucat vreun rol fie în dezvoltarea instrumentelor muzicale, fie în compoziția muzicală.

Vioara este un instrument în care Secțiunea de Aur apare frecvent. De regulă, cutia de rezonanță a viorii conține douăsprezece sau mai multe arcuri de curbură (curbele viorii) pe fiecare parte. Arcul plat de la bază este deseori centrat în punctul corespunzând Secțiunii de Aur de deasupra liniei centrale.

Unele dintre cele mai cunoscute viori au fost făurite de Antonio Stradivari (1644-1737) din Cremona, Italia. Desene originale arată că Stradivari s-a preocupat în mod special si plaseze geometric „ochii" găurilor în formă de *f* în poziții determinate de Secțiunea de Aur. Puțini sunt cei ce își închipuie că Secțiunea de Aur este cea care-i conferă unei viori Stradivarius calitatea ei superioară. Elemente cum ar fi lacul, lemnul și meșteșugul artizanal în genere sunt citate drept potențial ingredient ”secret". Mulți experți sunt de acord că popularitatea viorilor din secolul XVIII ţine de faptul că se pot folosi în săli mari de concert. Majoritatea acestor experți vă vor mai spune că nu există nici un ”secret" al viorilor Stradivarius - ele sunt pur şi simplu inimitabile opere de artă, suma tuturor componentelor reprezentând măiastra lor realizare.

BIBLIOGRAFIE

[1] Livio, M. (2005) *Secțiunea de aur povestea lui phi, cel mai uimitor număr*, Editura Humanitas, București, pp. 209-212, 215-218, 221, 271-272

[2] http://shinjinblog.blogspot.com/search?q=Simbioza+dintre+matematica%2C+natura+si+muzica

[3] https://ro.scribd.com/doc/84961919/Matematica-si-muzica

[4] https://edict.ro/povestea-numarului-pi/

TIPURI DE DATE CU PRECIZIE MARE PENTRU APLICAȚII DE ZOOM

Roland PALI[1] , George-Daniel PECHERLE[2], Eugen LASLO[3]

[1,2] Student anul I, Informatică, Facultatea de Informatică și Științe, Universitatea din Oradea
[3] Lect. univ. dr. Departamentul de Matematică și Informatică, Facultatea de Informatică și Științe, Universitatea din Oradea, lasloeugen@yahoo.com

Rezumat: *În această lucrare ne propunem construcția unui tip abstract de date, cu precizie virtual nelimitată, pentru a fi capabili sa obținem un zoom infinit asupra fractalilor.*
Fractalul este o figură geometrică fragmentată sau frântă care poate fi divizată în părți, astfel încât fiecare dintre acestea să fie (cel puțin aproximativ) o copie miniaturală a întregului, motiv pentru care imaginea poate fi mărită la infinit.
Fractalul asupra căruia s-au făcut simulările se numește Mulțimea lui Mandelbrot.
Cuvinte cheie:fractali, tipuri de date, precizie nelimitată

INTRODUCERE

Pornind de la provocarea de a reprezenta Mulțimea lui Mandelbrot[2] în mod vizual[Fig. 1], iar mai apoi de a fi capabili să apropiem imaginea in mod repetat [1], am observat repede limitările de precizie a tipului de date „double”. Cu tipul de date „float” nici măcar nu am încercat sa lucrăm, știind limitările de precizie si mai drastice de cât cele ale tipului double.

Crezând că o să rezolvăm problema de precizie cu ajutorul tipului „decimal”, am folosit acest tip de date in calculele programului nostru, mult mai precis, dar care vine cu un cost suplimentar din punct de vedere al timpului in care putem obține o apropiere a imaginii. Decimal ne-a ajutat destul de mult, pentru că am fost capabili să ajungem de la o precizie de ~15-17 cifre zecimale, a tipului double, la o precizie mult mai mare, de 28-29 de cifre la partea fracționară.

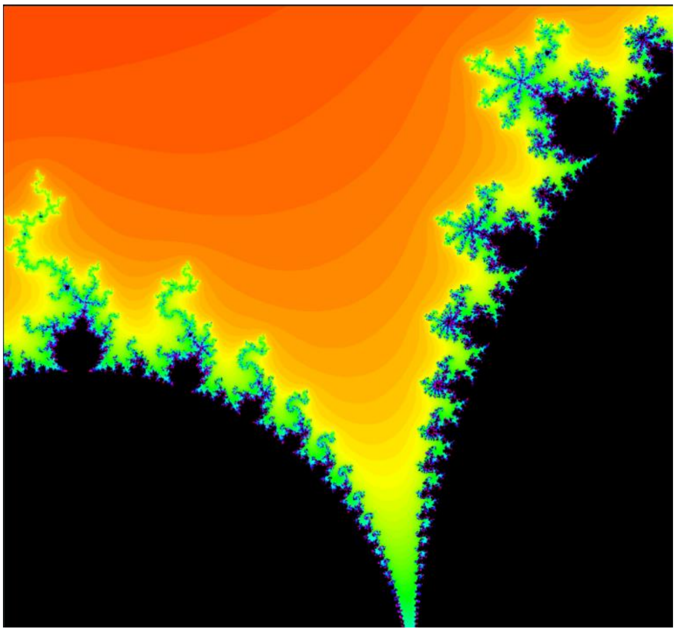


Fig. 1 – Un exemplu de zoom pe setul Mandelbrot

Faptul ca nu eram capabili sa apropiem o imagine a unui fractal la infinit în limbajul de programare C#, ne-a determinat să ne creăm propriul tip de date, care să poată stoca numere cu o parte fracționară cu precizie virtual infinită, singura limitare in acest sens venind doar de la resursele de stocare ale calculatorului.

Am definit această structură„HighPrecisionDecimal”, pe care urmează să v-o prezentăm în următoarele rânduri.

DEZVOLTAREA APLICAȚIEI LA NIVEL STRUCTURAL

Aplicația în care am integrat structura „HighPrecisionDecimal” se numește „MandelbrotVisualizer”[Fig. 2], și are ca scop, după cum ii spune si numele,de vizualizare a Mulțimii lui Mandelbrot.

Prima capabilitate (feature), cea mai importantă, a aplicației noastre este cea de apropiere (zoom) asupra setului Mandelbrot, capabilitate pe care ne-am propus-o încă de la începutul proiectului.

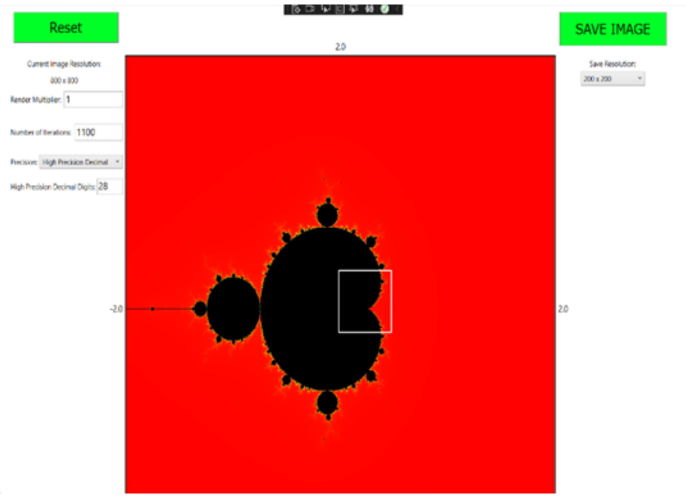


Fig. 2 – Instanță a programului de simulare

O altă capabilitate, care are un rol important pentru claritatea si frumusețea imaginilor, este alegerea numărului maxim de iterații pentru care se testează dacă un punct aparține sau nu mulțimii Mandelbrot. Numărul de iterații este important pentru că dacă se fac multe iterații, imaginile vor fi mai colorate și se vor vedea limitele setului mai frumos, într-o varietate de culori.[4]

În plus, față de anterioarele, aplicația poate salva o imagineMandelbrot rezultată la un anumit moment,cu extensia „png”, iar dimensiunea in pixeli a imaginii salvate poate fi selectatăchiar de către utilizatorul aplicației.

De asemenea, prin intermediul aplicației vizuale se poate selecta precizia si tipul de date folosit (double, decimal sau HighPrecisionDecimal). Totodată, aplicația conține limitele intervalelor de pe axa Ox si Oy pentru care se analizează mulțimea Mandelbrot.

La nivelul structurii HighPrecisionDecimal, aceasta suportă operații aritmetice, cum ar fi adunarea, scăderea si înmulțirea, dar implementează si operatori relaționali, cum ar fi „mai mare”, „mai mic”, „diferit” sau „egal”. Alte metode ale structurii sunt „Absolute” (modul), „Negative” (care transformă un număr pozitiv in număr negativ) sau„Clone” (care creează o clonă a obiectului).

Structura interacționează cu celelalte tipuri de date cu ajutorul constructorilor si a metodelor de conversie.

Constructorii pot transforma alte tipuri de date in tipul HighPrecisionDecimal. Primul constructor transformă un string (șir de caractere) inHighPrecisionDecimal, pe când cel de al doilea constructor transformă o variabilă de tip decimal in această structură.

Metodele de conversie create pentru această structură, care sunt folosite in aplicația de zoom, sunt „ToDouble” și „ToDecimal”, care convertesc structura noastră de date in tipul double, respectiv decimal.

Prezentăm în continuare definiția clasei HighPrecisionDecimal, care implementează interfețele „IComparable” și„IEquatable” [5]:

```
public struct HighPrecisionDecimal :IEquatable<HighPrecisionDecimal>,
IComparable<HighPrecisionDecimal>
  {
     public static HighPrecisionDecimal Four = new HighPrecisionDecimal(4m);
     public static HighPrecisionDecimal Two = new HighPrecisionDecimal(2m);
     public static HighPrecisionDecimalMinusOne = new HighPrecisionDecimal(-1m);
     public static HighPrecisionDecimal Zero = new HighPrecisionDecimal(0m);
     public static int CurrentMaxPrecision = 28;
```

```
        bool isPositive;
        int intValue;
int[] fraction;
        int? _uD;
        int usedDecimals{ … }
        int CurrentSize{ get { return fraction.Length; } }
        public HighPrecisionDecimal(string value) { … }
        public HighPrecisionDecimal(decimal value) { … }
        public HighPrecisionDecimal() { … }
        public static HighPrecisionDecimal operator +(HighPrecisionDecimal left,
HighPrecisionDecimal right) { … }
        public static HighPrecisionDecimal operator -(HighPrecisionDecimal left,
HighPrecisionDecimal right) { … }
        public static HighPrecisionDecimal operator *(HighPrecisionDecimal left,
HighPrecisionDecimal right) { … }
        public static bool operator <(HighPrecisionDecimal left, HighPrecisionDecimal right) {
… }
        public static bool operator >(HighPrecisionDecimal left, HighPrecisionDecimal right) {
… }
        public static bool operator <=(HighPrecisionDecimal left, HighPrecisionDecimal right) {
… }
        public static bool operator >=(HighPrecisionDecimal left, HighPrecisionDecimal right) {
… }
        public static bool operator ==(HighPrecisionDecimal left, HighPrecisionDecimal right) {
… }
        public static bool operator !=(HighPrecisionDecimal left, HighPrecisionDecimal right) {
… }
HighPrecisionDecimalNegative() { … }
HighPrecisionDecimalAbsolute() { … }
HighPrecisionDecimalClone() { … }
        public override string ToString() { … }
        public int CompareTo(HighPrecisionDecimal other) { … }
        public bool Equals(HighPrecisionDecimal other) { … }
        public override bool Equals(object? obj) { … }
        public override int GetHashCode() { … }
```

CONCEPTE FOLOSITE

Structura dezvoltată de noi a fost construită in așa fel încât sa fie ușor de integrat in alte proiecte, pentru a fi folosită de noi și de cei care au nevoie de acest tip de date, care aleg sa evite implementarea acestuia, implementare ce poate fi dificilă, mai ales când vine vorba de operatorii aritmetici, pe numere cu semn.

De asemenea, am încercat să obținem o implementare a programului cât mai lizibilă, din punct de vedere al citirii de cod C#, cu funcții cat mai scurte si denumiri ale variabilelor cât mai ușor de înțeles, in limba engleză, pentru a putea fi folosit si extins de pasionații de cod din întreaga lume. [5]

Un alt concept pe care ne bazăm este programarea paralelă[3], de care ne-am folosit pentru a crește considerabil viteza de „randare" a imaginii din setul Mandelbrot, la un anumit moment de zoom.

Instrucțiunea „pentru" (for), folosită in mod paralel [3], are puterea de a accesa mai multe fire de execuție (threads), pentru a obține diferite parți din imagine, calculate în același timp. În funcție de procesor, acesta poate avea până la 2 fire de execuție per nucleu (de exemplu, un procesor cu 8 nuclee va avea 16 fire de execuție). Un număr mare de fire de execuție folosite simultan, cum ar fi 16, crește viteza de „randare” a imaginii de 16 ori, cu ajutorul programării paralele.

Pe partea de „debugging” a calculelor ce folosesc structura HighPrecisionDecimal, am folosit o aplicație de consolă (ConsoleApp) unde am testat fiecare operator implementat și unde am comparat răspunsurile date, cu cele corecte, pentru a ne asigura că logica implementată de noi este in concordanță cu logica matematică din punct de vedere al calculelor.

REZULTATE ȘI CONCLUZII

Aplicația noastră obține imagini vizuale ale mulțimii Mandelbrot și este capabilă de zoomrelativ infinit. Nivelul preciziei se schimbă atunci când este cazul, de la variabile păstrate cu tipul double, mai apoi la variabile de tip decimal, iar in final, pentru valori cu peste 29 de cifre la partea fracționară, se folosește tipul HighPrecisionDecimal.

Nivelul maxim de zoom la care am ajuns până acum este o imagine de 1 x 10^{-70} din cea inițială, comparativ, cea mai mică unitate de măsură observabilă, unitatea planck, are o dimensiune de1.61 × 10^{-35} metri, deci imaginea noastră este mai mult mai mică decât orice observabil în lumea reală, practic inexistentă, cel puțin în zilele noastre.Această imagine are o precizie de 70 de cifre la partea fracționară.Am atașat imaginea obținută în partea dreaptă[Fig. 3]. Durata obținerii acestei imagini a fost de aproximativ 4 ore, pe un singur fir de execuție.

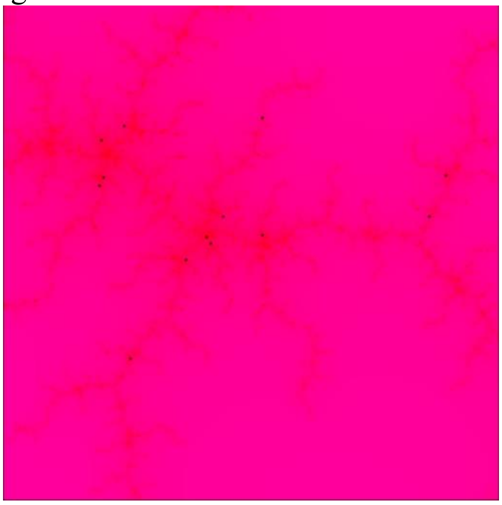


Fig. 3 – Zoom 10^{-70}

HighPrecisionDecimal este un tip de date gândit in special pentru a satisface cerințele aplicației noastre, unde avem nevoie de precizie relativ infinită, la partea fracționară, dar unde partea întreagă este de obicei intre valori unitare (-2 si 2), motiv pentru care partea întreaga a tipului nostru de date este stocatăîntr-o variabilă de tip „int” (intre -2.147.483.648 si 2.147.483.647).

Am ales această reprezentare pentru a economisi timp de execuție si spațiu, dar tipul creat de noi poate fi extins spre a putea fi calculate si alte operații matematice cu acesta (de exemplu: radicalul, ridicarea la putere).

Dacă sunteți interesați de modul în care am programat aplicația pentru zoom pe mulțimea Mandelbrot sau vreți sa integrați in programele voastre structura „HighPrecisionDecimal”, puteți să găsiți proiectul, in mod public, pe profilul de GitHub al lui Roland**:**

https://github.com/roland31x/MandelbrotVisualizer

Vă recomandăm să studiați subiectul Mulțimii Mandelbrot și a fractalilor la rândul vostru, pentru că puteți găsi răspunsuri la întrebări la care nu aveți încă unul.

BIBLIOGRAFIE

[1] Arthur, C. (1995). Clarke'sFractals: The Colors Of Infinity
[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Mandelbrot set
[3] https://learn.microsoft.com/en-us/dotnet/standard/parallel-programming/
[4] https://stackoverflow.com/questions/2288498/how-do-i-get-a-rainbow-color-gradient-in-c
[5] https://weirdbearddev.com/2020/03/19/implementing-iequatable-and-icomparable/

APLICAȚII ALE FUNCȚIILOR INDEFINIT DERIVABILE

Nicoleta Andreea PAUL

Studentă anul III, Matematică, Facultatea de Informatică și Științe, Universitatea din Oradea
andreeapaul14@yahoo.ro

Rezumat: *În această lucrare se prezintă aplicații ale funcțiilor indefinit derivabile pentru scierea dezvolărilor în serie Taylor și în serie Mac-Laurin ale funcțiilor* e^x, $\cos x$, $\sin x$, *și funcțiile hiperbolice.*

Cuvinte cheie: funcție indefinit derivabilă, seria Taylor, seria Mac-Laurin, funcția e^x, funcția $\cos x$, funcția $\sin x$, funcții hiperbolice.

1. INTRODUCERE

Pentru studierea dezvoltărilor în serie a funcțiilor avem nevoie de formula lui Taylor și de formula lui Mac-Laurin.

a) Formulele lui Taylor și Mac-Laurin.

Fie f o funcție continuă, pe $[\alpha,\beta]$, împreună cu primele $(p+1)$ derivate succesive $f'(x)$, $f''(x)$,..., $f^{(p)}(x)$, $f^{(p+1)}(x)$ în intervalul $[\alpha,\beta]$.

Formula lui Taylor este o generalizare a formulei creșterilor finite (sau formula lui Lagrange):
$f(b)-f(a)=(b-1)f'(c)$, unde a și b sunt valori oarecare din intervalul $[\alpha,\beta]$, fixate, iar c un număr din intervalul (a,b). Pentru formula lui Lagrange este ca funcția f să admită o derivată $f'(x)$ pe intervalul (a,b) și derivată să fie continuă pe (a,b).

Pentru deducerea formulei lui Taylor procedăm astfel:
Fie a și b două valori fixate în intervalul (α,β). Putem scrie

$$(1)\ f(b)=f(a)+(b-a)f'(a)+k(b-a)^2,$$

unde k este dat de egalitatea $k=\frac{f(b)-f(a)+(b-a)f'(a)}{(b-a)^2}$.

Definim funcția $\varphi:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$,

$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-(x-a)f'(a)+k(b-a)^2.$$

Avem $\varphi(a)=0$, $\varphi(b)=0$, deci $f'(c_1)=0, c_1\in(a,b)$.

Dar

$$\varphi'(x)=f'(x)-f'(a)-2k(x-a).$$

Deci $\varphi'(a)=0$ și $f'(c_1)=0$, rezultă din Teorema lui Rolle că există un punct $c_2\in(a,c_1)$ astfel încât $f''(c_2)=0$.

Calculăm $\varphi''(x)=f''(x)-2k$.

Pentru $x=c_2$, avem $\varphi''(c_2)=f''(c_2)-2k$.

Rezultă $k=\frac{1}{2}f''(c_2)$.

Înlocuind în (1), pe k, obținem:

$$(2)\ f(b)=f(a)+(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2}f''(c_2).$$

Formula (2) o putem generaliza sub forma:

$$(3)\ f(b)=f(a)+\frac{(b-a)}{1!}f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{(b-a)^p}{p!}f^{(p)}(a)+\frac{(b-a)^{p+1}}{(p+1)!}k,$$

numărul k fiind determinat de egalitatea (3).

Constanta k poate fi determinată și de altă expresie, formând funcția φ.

$$(4)\ \varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{x-a}{1!}f'(a)-\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)-\cdots-\frac{(x-a)^p}{p!}f^{(p)}(a)-\frac{(x-a)^{p+1}}{(p+1)!}k.$$

Avem $\varphi(a)=0$, $\varphi(b)=0$, deci $f'(c_1)=0, c_1\in(a,b)$.

Dar

(5) $\varphi'(x) = f'(x) - f'(a) - (x-a)'' f''(a) - \cdots - \frac{(x-a)^{p-1}}{(p-1)!} f^{(p)}(a) - \frac{(x-a)^p}{(p)!} k.$

Dacă în (5) facem $x = a$, obținem $\varphi'(a) = 0$. Cum $\varphi'(c_1) = 0$, va trebui ca $f''(c_2) = 0$, cu $c_2 \in (a, c_1)$.

Din aproape în aproape, observând că derivatele de ordinul p ale lui $(x-a)^{p+1}$ se anulează pentru $x = a$ și vom avea:

$$\varphi''(a) = 0, \varphi''(c_2) = 0, \text{deci}, \varphi''(c_3) = 0,$$

...

$$\varphi^p(a) = 0, \varphi^p(c_p) = 0, \text{deci}, \varphi^{(p+1)}(c_{(p+1)}) = 0,$$

unde $c_3 \in (a, b), \dots, c_{p+1} \in (a, b)$.

Dar

(6) $\varphi^{p+1}(x) = f^{p+1}(x) - k,$

deoarece toți ceilalți termeni de derivare au dispărut, deoarece proveneau dintr-un polinom de gradul p iar derivata de ordin $(p+1)$ a lui $(x-a)^{p+1}$ este $(p+1)!$.

Înlocuind pe $x = c_{p+1}$ în (6), obținem:

$$\varphi^{p+1}(c_{p+1}) = f^{p+1}(c_{p+1}) - k = 0 \text{ de unde } k = f^{p+1}(c_{p+1}).$$

Dacă notăm $c_{p+1} = c$ și $c \in (a, b)$, obținem:

(7) $f(b) = f(a) + \frac{(b-a)}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^p}{p!} f^{(p)}(a) + \frac{(b-a)^{p+1}}{(p+1)!} f(c).$

Formula (7) se numește formula lui Taylor.

Formula lui Taylor poate fi scrisă și sub forma:

Notând $b = x + h$ și $x = a$, avem:

(8) $f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \cdots + \frac{h^p}{p!} f^{(p)}(x) + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} f^{(p+1)}(x + \theta h).$

unde $0 < \theta < 1$.

Formula (8) ne dă valoarea funcției f pentru $(x+h)$ cunoscând funcția și derivatele ei pentru valoarea x a variabilei.

Dacă în formula lui Taylor (7) înlocuim $b = x$ și $a = 0$ obținem:

(9) $f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots + \frac{x^p}{p!} f^{(p)}(0) + \frac{x^{p+1}}{(p+1)!} f^{(p+1)}(\theta x).$

unde $0 < \theta < 1$.

Sub această formă, formula (9) poartă numele de formula lui Mac-Laurin.

Vom da expresia formulei lui Taylor și Mac-Laurin pentru un polinom de gradul unde p.

$$p(x) = p(a) + \frac{x-a}{1!} p'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} p''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^p}{p!} p^{(p)}(a).$$

Pentru $a = 0$, obținem formula lui Mac-Laurin:

$$p(x) = p(0) + \frac{x}{1!} p'(0) + \frac{x^2}{2!} p''(0) + \cdots + \frac{x^p}{p!} p^{(p)}(0).$$

2. SERIA TAYLOR ȘI SERIA MAC-LAURIN

Să presupunem că funcția $f(x), x \in [\alpha, \beta]$, este continuă și indefinit derivabilă și că în intervalul (α, β) toate derivatele ei sunt mărginite superior de un număr fix, adică:

$$|f^{(n)}(x)| < M, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}.$$

Atunci avem $|R_p| < \frac{(x-a)^p}{p!} M$.

Seria cu termenul general $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{|x-a|^p}{p!} M$ este convergentă, deoarece $\lim_{p\to\infty} \frac{|x-a|^p}{p!} M = 0$, de unde rezultă că $\lim_{p\to\infty} R_{p+1} = 0$.

Să considerăm seria:

(10) $\quad f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\cdots.$

Notăm cu $S_{n+1}(x)$ suma primelor $(n+1)$ termeni:

$$S_{n+1}(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a).$$

Atunci

(11) $\quad f(x)=S_{n+1}(x)+R_{n+1}(x)$ unde $R_{n+1}(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi).$

Calculând limita lui (11), avem:

$f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}S_{n+1}(x)+\lim\limits_{x\to\infty}R_{n+1}(x)=\lim\limits_{x\to\infty}S_{n+1}(x),$

de unde rezultă că seria este convergentă și obținem:

(12) $\quad f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\cdots,$

numită seria Taylor.

Dacă în (12) $a=0$, obținem:

(13) $\quad f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\cdots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\cdots,$

numită seria Mac-Laurin .

3. APLICAȚII ALE DERIVABILITĂȚII FUNCȚIILOR

Vom da dezvoltarea în serie Taylor și în serie Mac-Laurin pentru unele funcții indefinit derivabile:

a) Pentru funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x, x\in\mathbb{R}$.

Deoarece $f'(x)=e^x$, $f''(x)=e^x,\dots,f^n(x)=e^x,\dots$ funcția este indefinit derivabilă și toate derivatele sunt funcții continue pe $\mathbb{R}$.

Seria Taylor este:

$$\begin{aligned}e^x&=e^a+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\cdots=\\&e^a+\frac{x-a}{1!}e^a+\frac{(x-a)^2}{2!}e^a+\cdots+\frac{(x-a)^n}{n!}e^a+\cdots=\\&e^a\left(1+\frac{x-a}{1!}+\frac{(x-a)^2}{2!}+\cdots+\frac{(x-a)^n}{n!}+\cdots\right)\end{aligned}$$

Dacă $a=0$, obținem seria Mac-Laurin:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots.$$

Atât seria Taylor cât și seria Mac-Laurin a funcției $f(x)=e^x$ sunt serii convergente pe $\mathbb{R}$.

b) Fie acum funcția $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}, f(z)=e^z$, care este o funcție monogenă pe $\mathbb{C}$ și indefinit derivabilă.

Se știe că $(e^z)'=e^z,(e^z)^{(n)}=e^z$.

Fie acum un $z_0\in\mathbb{C}$, atunci $f(z_0)=e^{z_0}$ și $(e^z)^{(n)}(z_0)=e^{z_0},\forall n\in\mathbb{N}$.

Dezvoltarea și seria Taylor în jurul punctului z_0, este:

$$e^z=e^{z_0}\left(1+\frac{z-z_0}{1!}+\frac{(z-z_0)^2}{2!}+\cdots+\frac{(z-z_0)^n}{n!}+\cdots\right),\forall z\in\mathbb{C}.$$

Dacă $z_0=0$, obținem dezvoltarea și seria Mac-Laurin:

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots,\forall z\in\mathbb{C}.$$

c) Dezvoltarea funcției $f(x)=\cos x$.

Vom calcula derivatele succesive ale ei:

$$(\cos x)' = -\sin x = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$$
$$(\cos x)'' = \left[\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]' = -\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = +\cos\left(x+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x+2\frac{\pi}{2}\right).$$

Prin inducție se poate determina că:

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right), \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

Seria Taylor pentru funcția $f(x) = \cos x$ și $x = x_0$ este:

$$\cos x = \cos x_0 + \frac{x-x_0}{1!}\cos\left(x_0+\frac{\pi}{2}\right) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}\cos\left(x_0+2\frac{\pi}{2}\right) + \cdots$$
$$+\frac{(x-x_0)^n}{n!}\cos\left(x_0+n\frac{\pi}{2}\right) + \cdots.$$

Dacă $x_0 = 0$, obținem seria Mac-Laurin:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \ldots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \forall x \in \mathbb{R}.$$

d) Dezvoltarea funcției $f(x) = \sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Se știe că funcția sinus este indefinit derivabilă pe $\mathbb{R}$.

Să calculăm derivatele sale:

$$(\sin x)' = \cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right).$$
$$(\sin x)'' = \left[\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]' = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x+2\frac{\pi}{2}\right).$$

Prin inducție se poate deduce că $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$.

Avem pentru funcția $f(x) = \sin x$, dezvoltarea în serie Taylor:

$$\sin x = \sin x_0 + \frac{x-x_0}{1!}(\sin x_0)' + \frac{(x-x_0)^2}{2!}(\sin x_0)'' + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}(\sin x_0)^{(n)} + \cdots.$$

Dacă ținem cont că $f^{(2n)}(0) = 0$ și $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$, pentru $x_0 = 0$ obținem dezvoltarea lui Mac-Laurin:

$$\sin x = 0 + \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!}\cdot 0 + \frac{x^3}{3!}\cdot(-1) + \cdots = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

Dacă înlocuim pe $x = z \in \mathbb{C}$, obținem dezvoltarea în serie Mac-Laurin:

$$\sin z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \forall z \in \mathbb{C},$$

și

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} \ldots + (-1)^n \cdot \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \forall z \in \mathbb{C}.$$

Cele două serii complexe sunt convergente pe $\mathbb{C}$, adică au raza de convergență $\rho = \infty$.

Observație: Dacă se cunoaște seria

$$\sin x = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

atunci putem obține dezvoltarea în serie a funcției $\cos x$. Seria din membrul drept având raza de convergență $\rho = \infty$ este convergentă pe orice interval $J \subseteq \mathbb{R}$, deci poate fi integrată termen cu termen.

Fie $x \in \mathbb{R}^*$ fixat, atunci avem:

$$\int_0^x \sin t\, dt = \sum_{n\geq 0} \int_0^x \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1} dt = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+2},$$

deci

$$-\cos x + 1 = \frac{x^2}{2!} - \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 - \cdots.$$

de unde obținem

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots.$$

e) Formula lui Euler

Din dezvoltările în serie ale funcțiilor $e^z, \sin x, \cos x$, rezultă unele formule remarcabile date de Euler care ne vor permite să definim funcții transcedente și hiperbolice.

Vom defini simbolic e^{ix}, înlocuind pe x prin ix în dezvoltarea în serie a lui e^x și avem:

$$e^{ix} = \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots + (-1)^n \cdot \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots\right]$$
$$+ i\left[\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots\right],$$

unde am avut $i^n \in \{-i, i, -1, 1\}$. $(i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i, i^6 = -1)$

Ținând cont de dezvoltarea în serie a funcțiilor $\sin x, \cos x$ obținem formula:

$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Înlocuind $x = -t$, obținem:

$$e^{-it} = \cos(-t) + i\sin(-t) = \cos t - i \sin t,$$

deoarece $\cos(-t) = \cos t$ și $\sin(-t) = -\sin t$.

Din relațiile $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ și $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$ obținem:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \sin x = \frac{e^{ix} - ie^{-ix}}{2i},$$

numite formulele lui Euler.

Observație: Dacă

$$x = \frac{\pi}{2}, \quad e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = 1 + i \cdot 0 = 1$$
$$x = \pi, \quad e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 + i \cdot 0 = -1$$
$$x = \frac{3\pi}{2}, \quad e^{i\frac{3\pi}{2}} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = 0 - 1 \cdot i = -i$$
$$x = 2\pi, \quad e^{i2\pi} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1 + i \cdot 0 = 1$$
$$x = 2k\pi, \quad e^{i2k\pi} = \cos 2k\pi + i\sin 2k\pi = 1,$$

deoarece:

$$\cos 2k\pi = \begin{cases} \cos 0 = 1, k = 0 \\ \cos 2\pi = 1, k = 1 \\ \cos 4\pi = 1, k = 2 \\ \dots \end{cases} \Rightarrow \cos 2k\pi = 1, k \in \mathbb{Z},$$

$$\sin 2k\pi = \begin{cases} \sin 0 = 0, k = 0 \\ \sin 2\pi = 0, k = 1 \\ \sin 4\pi = 0, k = 2 \\ \sin(-2\pi) = 0, k = -1 \\ \dots \end{cases} \Rightarrow \sin 2k\pi = 0, k \in \mathbb{Z}.$$

f) Funcțiile hiperbolice

Definiție: Vom defini funcțiile $ch, sh, th: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, prin:

$$ch\ x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, sh\ x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, th\ x = \frac{sh\ x}{ch\ x} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

Toate aceste funcții sunt funcții de clasa C^∞ pe $\mathbb{R}$ și au proprietățile:

1) $ch'x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = sh\ x;$

2) $sh'x = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = ch\ x;$

3) $ch^2x - sh^2x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$

$$= \frac{e^{2x} + 2e^xe^{-x} + e^{-2x} - e^{2x} + 2e^xe^{-x} - e^{-2x}}{4} = \frac{4e^x \cdot e^{-x}}{4} = e^x \cdot e^{-x}$$

$= e^0 = 1;$

4) $sh\ 2x = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \frac{e^x - \frac{1}{e^{2x}}}{2} = \frac{e^{4x} - 1}{2e^{2x}},$

$sh\ x \cdot ch\ x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x} \cdot \frac{e^{2x} + 1}{2e^x} = \frac{(e^{2x})^2 - 1^2}{4e^{2x}} = \frac{e^{4x} - 1}{4e^{2x}} \Rightarrow sh\ 2x$

$= 2\ sh\ x \cdot ch\ x.$

5) $ch\ 2x = ch^2x + sh^2x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = 1.$

Dezvoltarea în serie Mac-Laurin, a funcțiilor hiperbolice este:

$$sh\ x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots,$$

$$ch\ x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$, dezvoltare care se obține folosind formulele pentru e^xși e^{-x}.

Observație: Denumirea funcțiilor hiperbolice provine din faptul că $M(ch\ t, sh\ t), t \in \mathbb{R}$, descrie o ramură a hiperbolei echilaterale $x^2 - y^2 = 1$.

Într-adevăr punctul $M(ch\ t, sh\ t), t \in \mathbb{R}$ satisface ecuația: $ch^2x - sh^2x = 1$, conform proprietății 3).

BIBLIOGRAFIE

[1] Iacob, C. (1957). Curs de matematici superioare, Editura Tehnică, București

[2] Roşculeț, M., (1966). Analiză matematică, vol. I,II, Editura Didactică și Pedagogică, București

[3] Sirețchi, G. (1985). Calcul diferențial și integral, vol. I, II, Editura Științifică și Enciclopedică, București

[4] Şabac, G. I. (1954). Matematici speciale, volumul I, Editura Didactică și Pedagogică, București

GENERALIZED CHAOTIC MAPS

Andreea Nicoleta PAUL

Studentă anul III, Informatică, Facultatea de Informatică și Științe, Universitatea din Oradea, andreeapaul14@yahoo.ro

Rezumat: *În această lucrare se prezintă generalizarea hărților haotice și asemănarea dintre ele.*
Cuvinte cheie:coeficienți, relații matematice, nonliniaritate.

În această lucrare studiem generalizarea hărților haotice. Conținutul fiecărei harți este obținut diferit, pe baza unor regului matematice specifice si cu ajutorul principiilor de generalizare si simbolizare.

Folosind anumiți coeficienți ajungem la hărți personalizate cum ar fi: harta logistică care este cea mai utilizată hartă în teoria sistemelor dinamice neliniare, harta Lorenz, harta Hennon și multe altele.

Generalizarea hărților haotice este un proces complex, deoarece hărțile haotice pot avea caracteristici foarte variate și comportament imprevizibil. Cu toate acestea, există câteva direcții generale pe care le poți urma pentru a generaliza hărțile haotice:

1. Studiază hărțile haotice existente: Începe prin a analiza diferite hărți haotice deja dezvoltate și studiate, cum ar fi harta logistică, harta Henon sau sistemul Lorenz. Înțelege proprietățile, ecuațiile și comportamentul acestor hărți.

1.1. Harta logistică: Harta logistică este una dintre cele mai simple și cunoscute hărți haotice. Ea este definită de ecuația logistică:

$$x_{n+1} = r * x_n(1 - x_n)$$

Unde x_n este valoarea la pasul n, iar r este un parametru care controlează comportamentul hărții. Harta logistică prezintă o gamă variată de comportamente, incluzând perioade fixe, traiectorii periodice și comportament haotic, în funcție de valoarea parametrului r.

1.2. Harta Henon: Harta Henon este o altă hartă haotică simplă, dar cu un comportament complex. Este definită de următoarele ecuații:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - a{x_n}^2 + y_n \\ y_{n+1} = bx_n \end{cases}$$

Unde x_n și y_n sunt coordonatele punctului la pasul n, iar a și b sunt parametri. Harta Henon produce traiectorii haotice cu proprietăți fractale și atractori haotici.

2. Identifică caracteristicile comune: Caută similitudini sau modele comune între hărțile haotice. Poate fi vorba de dependență sensibilă de condițiile inițiale, nonlinearitate sau alte trăsături caracteristice ale haosului. Identifică structurile sau relațiile matematice pe care le împărtășesc aceste hărți.
3. Analizează ecuațiile guvernatoare: Analizează ecuațiile guvernatoare ale hărților haotice pentru a înțelege principiile fundamentale care stau la baza comportamentului haotic. Aceasta poate implica studiul ecuațiilor diferențiale, ecuațiilor de diferențe sau altor formulări matematice care descriu hărțile.

3.1. Ecuațiile diferențiale: Unele hărți haotice, cum ar fi sistemul Lorenz, sunt definite prin ecuații diferențiale. Aceste ecuații descriu ratele de schimbare ale variabilelor de stare în funcție de timp. Prin analiza sistemului de ecuații diferențiale și a punctelor critice, se poate obține o înțelegere a atracțorilor haotici și a comportamentului traiectoriilor în timp.

3.2. Ecuațiile de diferențe: Alte hărți haotice, cum ar fi harta logistică, sunt definite prin ecuații de diferențe. Aceste ecuații reprezintă evoluția variabilelor de stare într-un mod discret, pas cu pas. Analiza ecuațiilor de diferențe poate dezvălui comportamentul haotic, traiectorii periodice, punctele fixe sau ciclurile în harta haotică.

3.3. Sisteme de ecuații: Unele hărți haotice pot fi reprezentate prin sisteme de ecuații diferențiale sau ecuații de diferențe. Aceste sisteme implică interacțiuni complexe între mai multe variabile și pot genera comportamente haotice complexe. Analiza sistemelor de ecuații poate implica metode matematice precum analiza stabilității, punctele critice, atractori sau diagrame bifurcaționale.

4. Definește un cadru generalizat: Pe baza caracteristicilor comune și a principiilor subiacente identificate, formulează un cadru generalizat sau un set de ecuații care poate descrie o gamă largă de hărți haotice. Acest cadru ar trebui să captureze elementele esențiale ale haosului, permițând totuși variații și personalizări.

4.1. Nonlinearitate: Cadru generalizat ar trebui să includă ecuații nonlineare sau componente nonlineare semnificative. Nonlinearitatea este o trăsătură esențială care contribuie la comportamentul haotic.

4.2. Sensibilitatea la condițiile inițiale: Cadru generalizat ar trebui să captureze sensibilitatea la condițiile inițiale. Acest aspect poate fi realizat prin includerea termenilor sau relațiilor care permit propagarea erorilor inițiale și generarea traiectoriilor haotice distincte.

4.3. Atractori haotici: Cadru generalizat ar trebui să permită apariția atractorilor haotici. Aceasta poate fi realizată prin includerea relațiilor matematice care conduc la forme complexe și comportament haotic.

4.4. Variabilitate și personalizare: Cadru generalizat ar trebui să permită variații și personalizări. Acest lucru poate fi realizat prin includerea unor parametri ajustabili care pot influența comportamentul hărții și prin posibilitatea de a adăuga sau modifica componente specifice pentru a obține trăsături particulare.

5. Validează și testează: Odată ce ai cadru generalizat, testează-l pe hărți haotice cunoscute pentru a te asigura că poate reproduce comportamentul lor. Verifică dacă generalizează corect trăsăturile esențiale ale haosului și dacă este capabil să redea comportamentul hărților haotice specifice.

5.1. Reproducerea hărților haotice cunoscute: Începe prin testarea cadrelor generalizate pe hărți haotice cunoscute și bine studiate, cum ar fi harta logistică sau harta Henon. Compară rezultatele obținute din cadru cu comportamentul și trăsăturile deja documentate pentru aceste hărți. Asigură-te că cadru reproduce corect atracțorii haotici, ciclurile, sensibilitatea la condițiile inițiale și alte caracteristici relevante.

5.2. Testarea cu valori limită și condiții extreme: Verifică cum se comportă cadru generalizat în situații limită și condiții extreme. Acest lucru poate implica utilizarea valorilor inițiale și parametrilor extreme pentru a evalua stabilitatea și comportamentul hărților haotice generate de cadru. Asigură-te că cadru se comportă într-un mod plauzibil și coerent în astfel de situații.

5.3. Analiza parametrilor și ajustarea cadrelor: Experimentează cu parametrii cadrelor generalizate și observă cum aceștia influențează comportamentul hărților haotice generate. Ajustează valorile parametrilor și observă cum se modifică atractorii, ciclurile sau alte caracteristici ale haosului. Verifică dacă cadru permite variații și personalizări adecvate pentru a obține rezultate diverse.

5.4. Compararea cu date reale sau simulări: Pentru a valida și testa în continuare cadru generalizat, poți compara rezultatele generate de cadru cu date experimentale sau cu simulări reale ale unor fenomene haotice cunoscute. Compară traiectoriile generate de cadru cu cele observate sau simulare și analizează dacă cadru poate reproduce aceleași modele și comportamente haotice.

Există mai multe hărți haotice cunoscute, fiecare cu propriile sale caracteristici și comportamente distincte. Cu toate acestea, există câteva asemănări generale care pot fi observate între diferitele hărți haotice. Iată câteva dintre aceste asemănări:

6.1. Sensibilitatea la condițiile inițiale: Majoritatea hărților haotice prezintă o sensibilitate extremă la condițiile inițiale. Chiar și o mică modificare în valorile inițiale poate duce la rezultate complet diferite pe termen lung. Această sensibilitate la condițiile inițiale este o trăsătură caracteristică a haosului și este întâlnită în multe hărți haotice. De exemplu, harta Lotka-Volterra Systemși harta logistică.

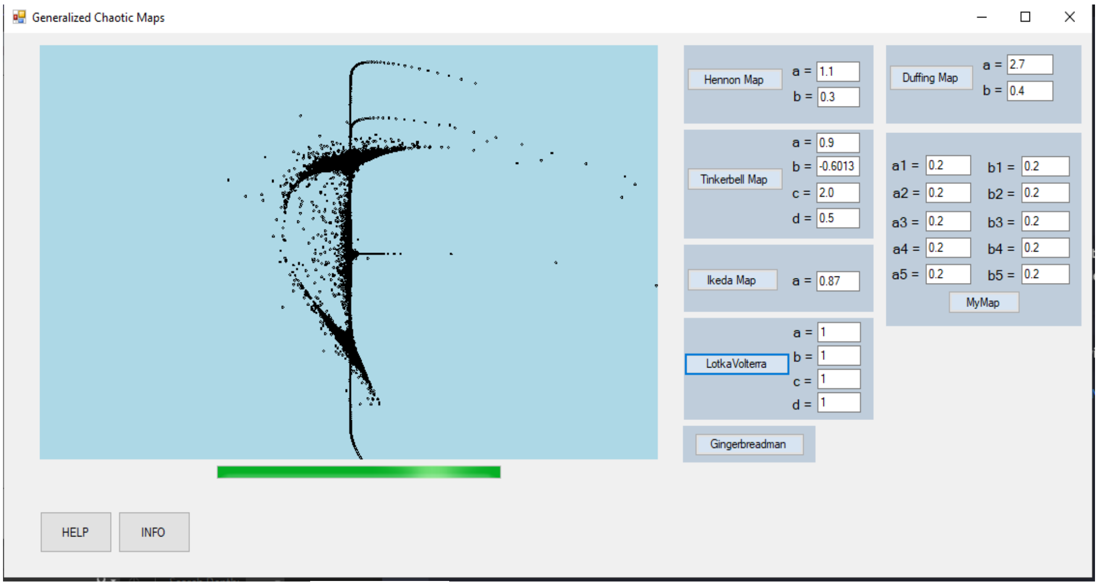


Fig. 6.1.1. (a = 1, b = 1, c = 1, d = 1)

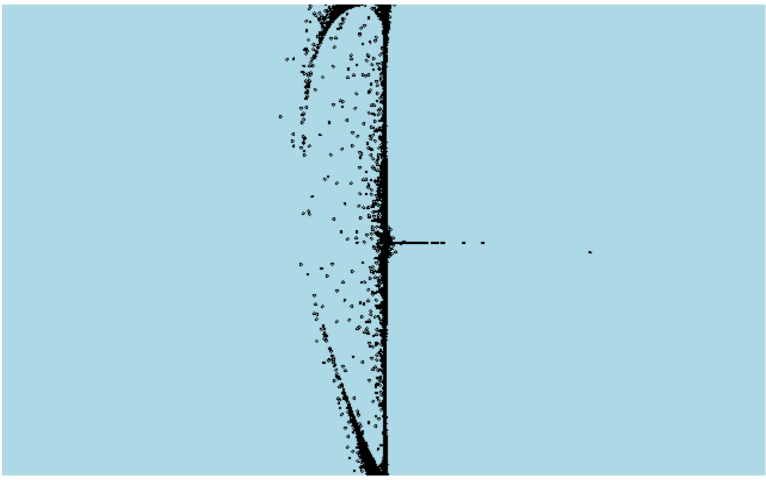


Fig. 6.1.2. (a = 0.4, b = 1, c = 1, d = 1)

6.2. Nonlinearitate: Hărțile haotice sunt în general expresii nonlineare sau conțin componente nonlineare semnificative. Nonlinearitatea este un factor crucial care contribuie la comportamentul haotic al acestor hărți. Ecuațiile guvernatoare ale acestor hărți implică de obicei termeni nonliniari care generează comportamentul imprevizibil caracteristic haosului. De exemplu, harta logistică și harta Henon.Nonlinearitatea este o trăsătură esențială care contribuie la comportamentul haotic al acestor hărți.

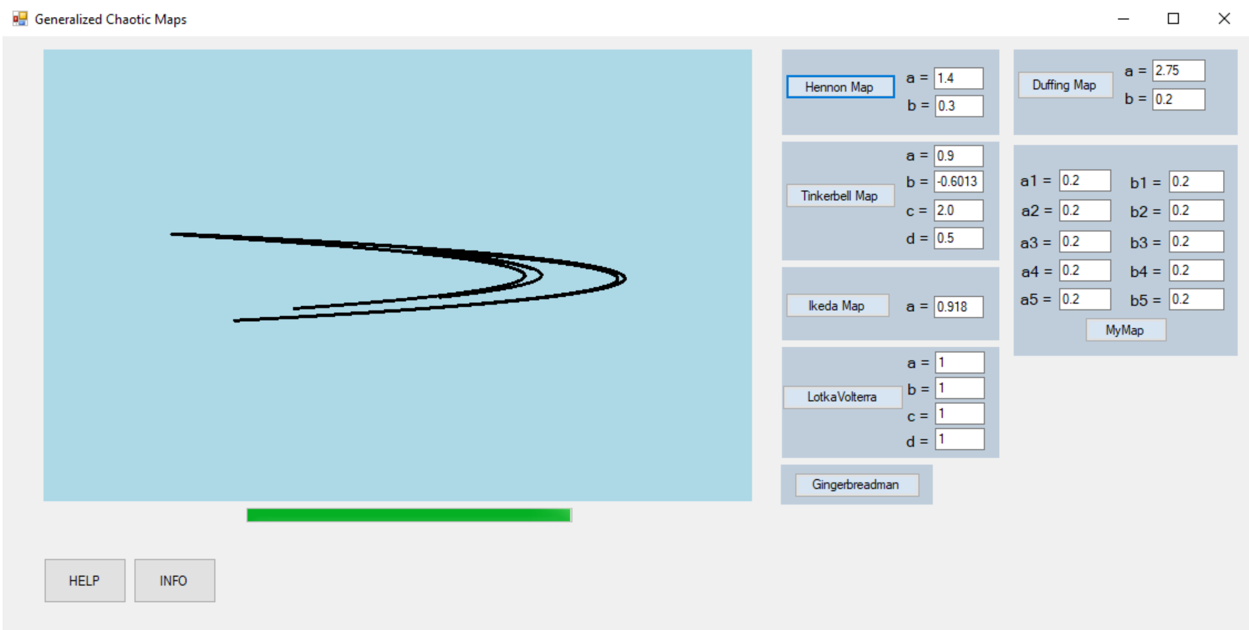


Fig. 6.2.1. Henon a = 1.4, b = 0.3

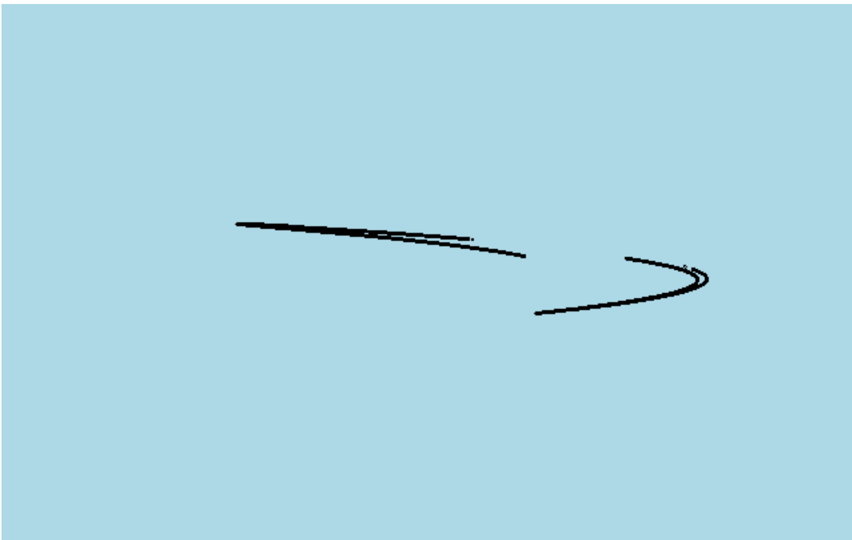


Fig. 6.2.2. Henon a = 1.1, b = 0.4

6.3. Repetiția ciclurilor: O altă asemănare între hărțile haotice este posibilitatea apariției ciclurilor sau a traiectoriilor periodice. Acestea pot varia în lungime și pot apărea sub forma unor secvențe repetitive în harta haotică. Cu toate acestea, aceste cicluri sunt adesea complexe și pot fi dificil de prezis. De exemplu harta Ikeda și harta Lorenz.

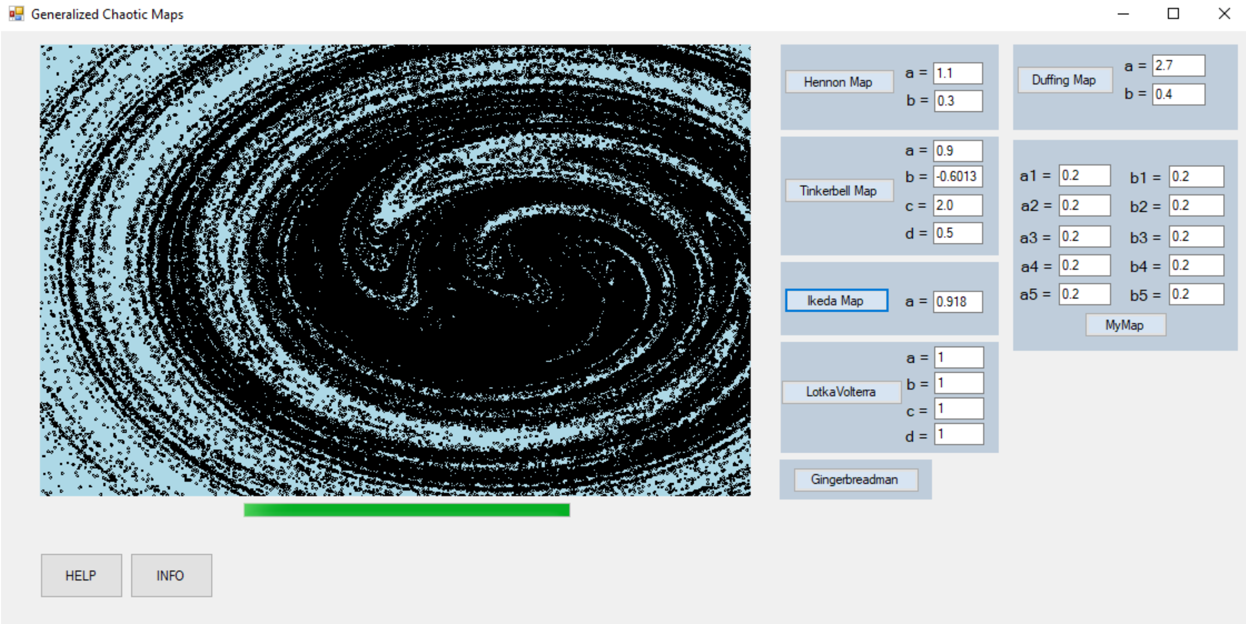


Fig. 6.3.1. Ikeda Map (a = 0.918)

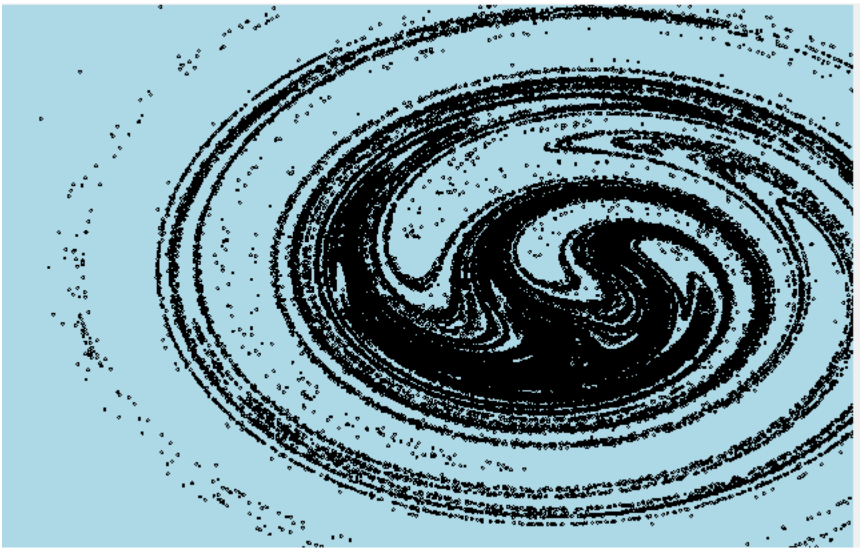


Fig.6.3.2. Ikeda Map (a = 0.87)

6.4. Atractori haotici: Multe hărți haotice prezintă atractori haotici, adică seturi de valori în jurul cărora traiectoriile se concentrează în mod aparent haotic. Acești atractori pot avea forme complexe, cum ar fi atractori atrăgători strânși, atractori în forma de aripă de fluture sau atractori în formă de coardă. Caracteristicile atractorilor haotici pot varia în funcție de harta haotică specifică. De exemplu harta Lorenz, cât și în harta Rössler.

6.5. Proprietăți fractale: Multe hărți haotice, cum ar fi harta Duffingși harta Henon, prezintă proprietăți fractale în traiectoriile lor. Aceasta înseamnă că aceste traiectorii au un aspect similar la diferite niveluri de detaliu.

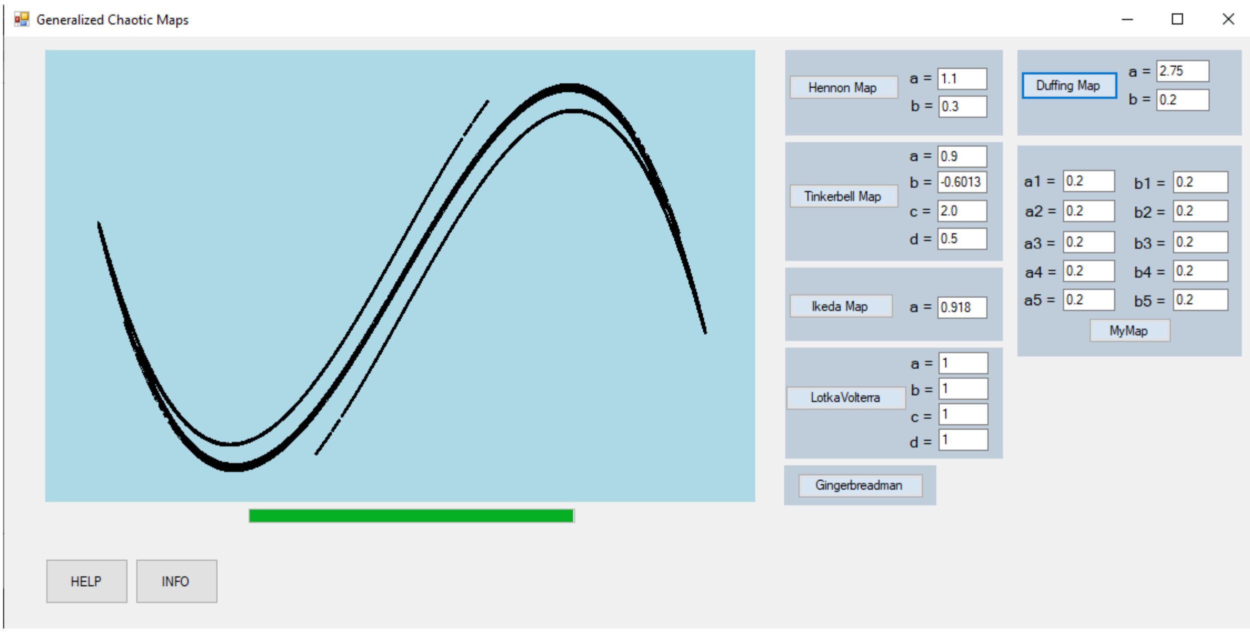


Fig. 6.5.1. Duffing Map (a = 2.75, b = 0.2)

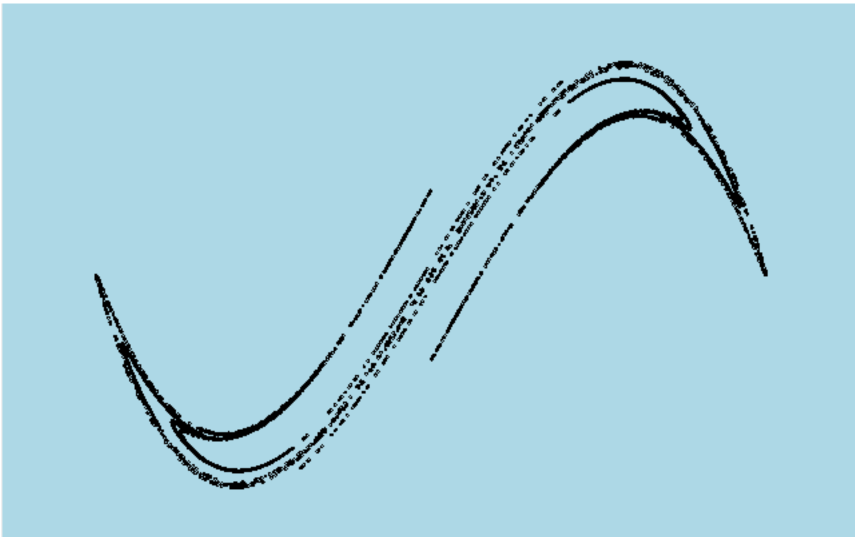


Fig. 6.5.2. Duffing Map (a = 2.7, b = 0.4)

BIBLIOGRAFIE

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Category:Chaotic_maps
[2] Ott, E. (2002). Chaos in Dynamical Systems, Cambridge University Press
[3] Devaney, R. L. (2003). Introduction to Chaotic Dynamical Systems, CRC Press
[4] Strogatz, S.H. (2014). Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering de, Westview Press.

ESTIMAREA ERORII DE INTERPOLARE POLINOMIALĂ LAGRANGE FOLOSIND CONSTANTE DE TIP LIPSCHITZ

Adrian Şerban RAŢ

Student anul II, Matematică, Facultatea de Informatică și Științe, Universitatea din Oradea, adirat10@gmail.com

Rezumat: *În domeniul analizei numerice este cunoscut polinomul de interpolare Lagrange și formula de estimare a erorii acestuia când funcția este de clasă $C^{(n+1)}[a,b]$. În această lucrare vom studia cazul în care funcția nu este de clasă $C^{(n+1)}[a,b]$, dar are derivata de ordinul n ca funcție Lipschitz. Aceasta are consecințe în cazurile particulare n=2 și n=3, cu noduri echidistante, la obținerea de noi estimări pentru formulele de cuadratură ale lui Simpson, respectiv Newton.*

Cuvinte cheie: interpolare, polinomul de interpolare Lagrange, estimare a erorii

Introducere

Se dau punctele din plan $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, $i = \overline{0,n}$ în care pe axa absciselor avem distribuirea în ordine strict crescătoare a valorilor x_i, $i = \overline{0,n}$, putând considera intervalul [a, b] cu $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$.

Să se determine o funcție polinomială $P : [a,b] \to \mathbb{R}$, având proprietatea $P(x_i) = y_i$, $\forall i = \overline{0,n}$. Egalitățile $P(x_i) = y_i$, $i = \overline{0,n}$ se numesc condiții de interpolare, iar polinomul căutat se va numi polinom de interpolare.

Ca soluție a acestei probleme se va căută un polinom de grad minim care sa îndeplinească condițiile de interpolare.

Fie $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ un astfel de polinom, și impunând condițiile de interpolare se obțin relațiile:

$a_n x_i^n + a_{n-1}x_i^{n-1} + \dots + a_1 x_i + a_0 = y_i$, $i = \overline{0,n}$, adică:

$$\begin{cases} a_n x_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + \dots + a_1 x_0 + a_0 = y_0 \\ a_n x_1^n + a_{n-1}x_1^{n-1} + \dots + a_1 x_1 + a_0 = y_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n x_n^n + a_{n-1}x_n^{n-1} + \dots + a_1 x_n + a_0 = y_n \end{cases} \qquad (1)$$

care pot fi privite ca ecuațiile unui sistem liniar neomogen cu n+1 necunoscute, $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$. În această abordare, determinantul sistemului este de tip Vandermonde.

$$V(x_0, x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^{n-1} & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-1} & x_{n-1}^n \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i,j=0, i\neq j}^{n} (x_i - x_j) \neq 0$$

fiind un determinant nenul deoarece $x_i \neq x_j$ pentru $i \neq j$. Atunci, rezultă că sistemul (1) este un sistem Cramer, având o soluție unică $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$, care se poate determina folosind metoda lui Cramer. Dacă y_i, $i = \overline{0,n}$ sunt valorile unei funcții $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $y_i = f(x_i), \forall\, i = \overline{0,n}$, atunci condițiile de interpolare devin: $P(x_i) = f(x_i), \forall\, i = \overline{0,n}$, iar polinomul căutat se va numi polinom Lagrange de interpolare a funcției f pe punctele (nodurile) de interpolare $x_i, i = \overline{0,n}$, notat prin $P = L_n(f)$.

Pentru a determina expresia acestui polinom vom folosi condițiile de interpolare căutând această expresie a polinomului sub forma:

$$L_n(f)(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) \cdot f(x_i)$$

în care polinoamele $l_i(x), i=\overline{0,n}$ (de gradul n) se numesc polinoame fundamentale Lagrange si ele nu depind de valorile funcției $f(x_i), i=\overline{0,n}$, ci doar de punctele $x_i, i=\overline{0,n}$. De asemenea, din condițiile de interpolare $L_n(f)(x_i)=f(x_i), \forall i=\overline{0,n}$, se observă că: $l_i(x_j)=\begin{cases}1, & dacă\ j=i\\ 0, & dacă\ j\neq i\end{cases}$ pentru orice $i=\overline{0,n}$.

Deci $l_i(x)$ are rădăcinile $x_0,x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n$, adică $x_j,\ j=\overline{0,n}, j\neq i$. Atunci există $c_i,\ i=\overline{0,n}$ astfel încât:

$$l_i(x)=c_i\cdot(x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_{i-1})\cdot(x-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_n)=c_i\prod_{j=0,j\neq i}^{n}(x-x_j)$$

$,\forall\ x\in[x_0,x_n]=[a,b], \forall\ i=\overline{0,n}$

Pentru determinarea constantelor $c_i,\ i=\overline{0,n}$, observăm că din $l_i(x_i)=1$ rezultă că $c_i\prod_{j=0,j\neq i}^{n}(x_i-x_j)=1$, adică $c_i=\frac{1}{\prod_{j=0,j\neq i}^{n}(x_i-x_j)}, \forall\ i=\overline{0,n}$.

Atunci, $l_i(x)=\frac{\prod_{j=0,j\neq i}^{n}(x-x_j)}{\prod_{j=0,j\neq i}^{n}(x_i-x_j)}$, iar expresia polinomului Lagrange devine:

$$L_n(f)(x)=\sum_{i=0}^{n}l_i(x)\cdot f(x_i)$$

$$L_n(f)(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_{i-1})\cdot(x-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdot\ldots\cdot(x_i-x_{i-1})\cdot(x_i-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x_i-x_n)}\cdot f(x_i)\quad,\forall\ x\in[a,b]$$

Notând $u(x)=(x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_{i-1})\cdot(x-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_n)$, $u_i(x)=\frac{u(x)}{x-x_i}, i=\overline{0,n}$

se va putea scrie $l_i(x)=\frac{u(x)}{(x-x_i)\cdot u_i(x_i)}=\frac{u_i(x)}{u_i(x_i)}, i=\overline{0,n}$.

Deoarece polinomul $L_n(f)$ va aproxima funcția f pe intervalul $[a,b]$, se poate scrie egalitatea:

$f(x)=L_n(f)(x)+R_n(x), \forall\ x\in[a,b]$

numită formula de interpolare Lagrange, în care funcția $R_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ este termenul rest descriind eroarea care se comite la aproximarea funcției f prin polinomul $L_n(f)$. Încrederea pe care o putem avea in aproximarea funcției f de către polinomul $L_n(f)$ este dată de estimarea termenului rest, care va stabili o margine superioară a erorii acestei aproximări. O asemenea estimare este dată în teorema următoare:

Teoremă(de estimare a erorii de interpolare)**:** Dacă $f\in C^{n+1}[a,b], atunci\ există\ \eta\in(a,b)\ astfel\ încât$:

$$|R(x)|\leq\frac{|u(x)|}{(n+1)!}\cdot\left|f^{(n+1)}(\eta)\right|, \forall x\in[a,b], u(x)=(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)$$

Demonstrația teoremei se găsește în sursa bibliografică [1].

Observație: Notând $M_{n+1}=\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty=\max\{\frac{f^{(n+1)}(x)}{x}\in[a,b]\}$ se obține estimarea erorii în formula de interpolare a lui Lagrange:

$$|R_n(x)|\leq\frac{|u(x)|}{(n+1)!}\cdot M_{n+1}\leq\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot M_{n+1}, \forall\ x\in[a,b].$$

Formulele de cuadratură ale lui Simpson și Newton
Formula lui Simpson:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b L_2(f)(x) + \int_a^b R_2(f)(x) = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] + R_2(f)$$

$$R_2(f) = \int_a^b R_2(f)(x)dx \Rightarrow |R_2(f)| \leq \int_a^b |R_2(f)(x)|dx \leq \frac{L''}{3!}\max_{x\in[a,b]}|u(x)|, \forall x \in [\mathrm{a,b}]$$

Demonstrație:

Fie $f(x) = L_2(f)(x) + R_2(f)(x), f \in C^2[a,b], f''$ - Lipschitziană

$u(x) = (x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

- pt. $x \in [a,b], x \neq a, x \neq b, x \neq \frac{a+b}{2}$, x fixat, difinim:

$$\varphi_x(t) = \begin{vmatrix} u(t) & R_2(f)(t) \\ u(x) & R_2(f)(x) \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow \varphi_x(x) = 0, \varphi_x(a) = \varphi_x(b) = \varphi_x\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$

$\Rightarrow \exists\, u, v, w \in (a,b)$ a. î. $\varphi_x'(u) = \varphi_x'(v) = \varphi_x'(w) = 0$

$\overset{\text{ROLLE}}{\Longrightarrow} \exists\, y, z \in (a,b)$ a.î. $\varphi_x''(y) = \varphi_x''(z) = 0, \quad y \neq z$

$\Rightarrow \varphi_x''(t) = \begin{vmatrix} 3!\,t + 2\propto & f''(t) - L_2''(f)(t) \\ u(x) & R_2(f)(x) \end{vmatrix}$, dar $L_2''(f)(t) = constant$

$\Rightarrow \varphi_x''(y) - \varphi_x''(z) = \begin{vmatrix} 3!\,(y-z) & f''(y) - f''(z) \\ u(x) & R_2(f)(x) \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow R_2(f)(x) = \dfrac{u(x)[f''(y) - f''(z)]}{3!\,(y-z)}$

$dar, |f''(y) - f''(z)| \leq L''|y-z|, \forall\, y, z \in [a,b] \Rightarrow$

$|R_2(f)(x)| \leq \frac{|u(x)|\,|f''(y)-f''(z)|}{3!\,|y-z|} \leq \frac{L''|u(x)|}{3!} \leq \frac{L''}{3!}\max_{x\in[a,b]}|u(x)|, \ \forall x \in [a,b].$

Aflarea maximului pe intervalul [0,1]:

$\max_{x\in[0,1]}|u(x)| = x(x - \frac{1}{2})(1-x)$

Fie $f(x) = x(1-x)(x-\frac{1}{2}) = -x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x \Rightarrow f'(x) = -3x^2 + 3x - \frac{1}{2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow -6x^2 + 6x - 1 = 0 \Rightarrow 6x^2 - 6x + 1 = 0$

$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}, x_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$

x	0		$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$		$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$		1
$f'(x)$	----------	----------	0	+++++	0	----------	----------
f(x)	0	$\searrow$	$\frac{-1}{12\sqrt{3}}$	$\nearrow$	$\frac{1}{12\sqrt{3}}$	$\searrow$	0

f(0) = 0
f(1) = 0
$f(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}) = \frac{-1}{12\sqrt{3}}$

$f(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6})=\frac{1}{12\sqrt{3}}$

$\Rightarrow f(x) \leq \frac{1}{12\sqrt{3}}, \forall\, x \in [0,1] \Rightarrow \max_{x\in[0,1]}|u(x)| = \frac{1}{12\sqrt{3}}.$

$$\Rightarrow |R_2(f)(x)| \leq \frac{L''}{3!}\cdot\frac{1}{12\sqrt{3}}, \forall\, x \in [0,1]$$

Aflarea maximului pe intervalul [a, b]:

$\max_{x\in[a,b]}|u(x)| = (x-a)(x-\frac{a+b}{2})(b-x)$

Fie

$f(x) = (x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(b-x) = -x^3+\frac{3}{2}x^2(a+b)-\frac{1}{2}x[(a+b)^2+2ab]+\frac{ab(a+b)}{2}$

$\Rightarrow f'(x) = -3x^2+3x(a+b)-\frac{(a+b)^2}{2}-ab$

$f'(x)=0 \Rightarrow 6x^2-6x(a+b)+(a+b)^2+2ab=0$

$\Delta = 12(a-b)^2$

$\Rightarrow x_1 = \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)a+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)b\,, x_2 = \left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)a+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)b$

x	a		$\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)a+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)b$		$\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)a+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)b$		b
$f'(x)$	---------	---	0	+++++	0	-----	---------
f(x)	0	$\searrow$	$\frac{1}{12\sqrt{3}}(a-b)^3$	$\nearrow$	$\frac{-1}{12\sqrt{3}}(a-b)^3$	$\searrow$	0

f(a) = 0

f(b) = 0

$f(\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)a+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)b) = \frac{1}{12\sqrt{3}}(a-b)^3$

$f(\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)a+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)b) = \frac{-1}{12\sqrt{3}}(a-b)^3$

$\Rightarrow f(x) \leq \frac{-1}{12\sqrt{3}}(a-b)^3, \forall\, x \in [a,b] \Rightarrow \max_{x\in[a,b]}|u(x)| = \frac{1}{12\sqrt{3}}(b-a)^3.$

$$\Rightarrow |R_2(f)(x)| \leq \frac{L''}{3!}\cdot\frac{1}{12\sqrt{3}}(b-a)^3, \forall\, x \in [a,b]$$

Formula lui Newton:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{8}\left[f(a)+3f\left(\frac{2a+b}{3}\right)+3f\left(\frac{a+2b}{3}\right)+f(b)\right]+R_3(f)$$

$$R_3(f) = \int_a^b R_3(f)(x)dx \Rightarrow |R_3(f)| \leq \int_a^b |R_3(f)(x)|dx \leq \frac{L'''}{4!}\max_{x\in[a,b]}|u(x)|, \forall\, x \in [a,b]$$

Demonstrație:

Fie $f(x) = L_3(f)(x)+R_3(f)(x), f \in C^3[a,b], f'''$ - Lipschitziană

$$u(x) = (x-a)\left(x-\frac{2a+b}{3}\right)\left(x-\frac{a+2b}{3}\right)(x-b) = x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$$

- pt. $x \in [a,b], x \neq a, x \neq b, x \neq \frac{2a+b}{3}, x \neq \frac{a+2b}{3}, x$ fixat, difinim

$$\varphi_x(t) = \begin{vmatrix} u(t) & R_3(f)(t) \\ u(x) & R_3(f)(x) \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow \varphi_x(x) = 0, \varphi_x(a) = \varphi_x(b) = \varphi_x\left(\frac{2a+b}{3}\right) = \varphi_x\left(\frac{a+2b}{3}\right) = 0$

$\Rightarrow \exists\, u, v, w, y \in (a,b)$ a.î. $\varphi_x'(u) = \varphi_x'(v) = \varphi_x'(w) = \varphi_x'(y) = 0$

$\overset{\text{ROLLE}}{\Longrightarrow} \exists\, m, m, p \in (a,b)$ a.î. $\varphi_x''(m) = \varphi_x''(n) = \varphi_x''(p) = 0$

$\overset{\text{ROLLE}}{\Longrightarrow} \exists\, r, s \in (a,b)$ a.î. $\varphi_x'''(r) = \varphi_x'''(s) = 0, \quad r \neq s$

$\Rightarrow \varphi_x''' = \begin{vmatrix} 4!\,t + 6 \propto & f'''(t) - L'''_3(f)(t) \\ u(x) & R_3(f)(x) \end{vmatrix},$ dar

$L_3'''(f)(t) = constant \quad \Rightarrow \varphi_x'''(r) - \varphi_x'''(s) = \begin{vmatrix} 4!\,(r-s) & f'''(r) - f'''(s) \\ u(x) & R_3(f)(x) \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow R_3(f)(x) = \frac{u(x)[f'''(r) - f'''(s)]}{4!(r-s)}$

$dar, |f'''(r) - f'''(s)| \leq L'''|r-s|, \forall\, r, s \in [a,b]$

$\Rightarrow |R_3(f)(x)| \leq \frac{|u(x)|\,|f'''(r) - f'''(s)|}{4!\,|r-s|} \leq \frac{L'''|u(x)|}{4!} \leq \frac{L'''}{4!} \max_{x \in [a,b]} |u(x)|, \ \forall x \in [a,b].$

Aflarea maximului pe intervalul [0,1]:

$\max_{x \in [0,1]} |u(x)| = x(x - \frac{1}{3})(x - \frac{2}{3})(1 - x)$

Fie f(x) = $x(x - \frac{1}{3})(x - \frac{2}{3})(1 - x)$= $-x^4 + 2x^3 - \frac{11}{9}x^2 + \frac{2}{9}x$

$\Rightarrow f'(x) = -4x^3 + 6x^2 - \frac{22}{29}x + \frac{2}{9}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow -36x^3 + 54x^2 - 22x + 2 = 0$

$\Rightarrow 36x^3 - 54x^2 + 22x - 2 = 0$

- aplicăm schema lui Horner cu x = $\frac{1}{2}$:

	x^3	x^2	x^1	x^0
	36	-54	22	-2
$\frac{1}{2}$	36	-36	4	0

$\Rightarrow 36x^3 - 54x^2 + 22x - 2 = (x - \frac{1}{2})(36x^2 - 36x + 4)$=0

$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}, \ x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{6}, \ x_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{6}$

x	0		$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{6}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{6}$		1
$f'(x)$	+++	+++	0	-----------	0	+++	0	------	------
f(x)	0	$\nearrow$	$\frac{1}{81}$	$\searrow$	$\frac{-1}{144}$	$\nearrow$	$\frac{1}{81}$	$\searrow$	0

f(0) = 0
f(1) = 0

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-1}{144}$

$f\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{6}\right) = \frac{1}{81}$

$f\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{6}\right) = \frac{1}{81}$

$\Rightarrow \mathrm{f(x)} \leq \frac{1}{81}, \forall\, x \in [0,1] \;\Rightarrow\; \max_{x\in[0,1]} |u(x)| = \frac{1}{81}.$

$$\Rightarrow |R_3(f)(x)| \leq \frac{L'''}{4!} \cdot \frac{1}{81}, \forall x \in [0,1]$$

Ca aplicabilitate, constantele de tip Lipschitz sunt utile pentru estimarea erorii metodei funcției Green aplicată la probleme bilocale.

BIBLIOGRAFIE

[1] Stancu, D.D., Coman, G., Agratini, O., Trimbitas, R. (2001). Analiză numerică și teoria aproximării, vol.1, Presa Univ. Clujeana, Cluj-Napoca

[2] Antia, A.M. (2012). Numerical methods for scientists and engineers, third edition, Hindustan Book Agency, New Delhi

[3] Kazemi, M. Doostdar, M.R. (2022). Optimal quadrature rules for numerical solution of the nonlinear Fredholm integral equations, Filomat, Vol. 31 (11), pp. 3827–3843

O METODĂ PENTRU DETERMINAREA UNEI FUNCȚII OLOMORFE CÂND SE CUNOAȘTE PARTEA EI REALĂ

Adrian Șerban RAȚ

Student anul II, Matematică, Facultatea de Informatică și Științe, Universitatea din Oradea, adirat10@gmail.com

Rezumat: *În literatura de specialitate este cunoscută metoda determinării părții reale sau a părții imaginare a unei funcții* $olomorfe$ *prin integrarea unei deplasări totale pe un drum format din reuniunea a două drepte paralele cu axele* Ox *și axa* Oy*. În această lucrare vom introduce o altă metodă de determinare a funcției căutate, folosind integrarea derivatelor parțiale ale funcției de două variabile continue în raport cu una din variabilele reale.*

Cuvinte cheie: funcție olomorfă, partea reală

Preliminarii

Reluăm noțiunile importante legate de funcțiile reale de două variabile reale. Fie $u(x,y)$ o funcție reală de două variabile reale și fie (a,b) un punct dintr-un domeniu D.

Funcția $u(x,y)$ este derivabilă parțial în punctul (a,b) în raport cu variabila x dacă $\lim\limits_{x\to a}\frac{u(x,b)-u(a,b)}{x-a}$ există și este finită. Limita însăși se numește derivata parțială a funcției $u(x,y)$ în raport cu x și se notează cu $u'_x(a,b)\ sau\ \frac{\partial u(a,b)}{\partial x}$.

Funcția $u(x,y)$ este derivabilă parțial în punctul (a,b) în raport cu variabila y dacă $\lim\limits_{y\to b}\frac{u(a,y)-u(a,b)}{y-b}$ există și este finită. Limita însăși se numește derivata parțială a funcției $u(x,y)$ în raport cu y și se notează cu $u'_y(a,b)\ sau\ \frac{\partial u(a,b)}{\partial y}$.

Dacă o funcție este derivabilă parțial în raport cu variabila x în fiecare punct, spunem că este derivabilă parțial în raport cu x pe domeniul D.

Teoremă(A. Schwarz): Dacă funcția $u(x,y)$ are derivate parțiale mixte de ordinul doi într-o vecinătate V a lui $(x,y)\in V$ și dacă u''_{xy} este continuă în (x, y), atunci $u''_{xy}(x,y)=u''_{yx}(x,y)$.

Dacă derivatele $u'_x(x,y)\ și\ u'_y(x,y)$ sunt continue pe domeniul D, atunci funcția $u(x,y)$ este o funcție derivabilă pe D și are loc egalitatea: $du(x,y)=u'_x(x,y)dx+u'_y(x,y)dy=\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}dy$. Diferențiala unei funcții u de mai multe variabile se numește diferențiala totală a funcției.

O funcție $u(x,y)$, definită pe un domeniu D, continuă împreună cu derivatele ei parțiale de ordinul întâi și doi și care satisface ecuația lui Laplace: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ se numește funcție armonică în D.

Fie $u(x,y)$ și $v(x,y)$ două funcții armonice în D. Dacă are loc egalitatea: $\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=-\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\end{cases}$ în orice punct din D, atunci $v(x,y)$ este conjugata armonică a funcției $u(x,y)$.

Teoremă: Fie $P(x,y)\ și\ Q(x,y)$ două funcții continue în domeniul simplu conex D. Dacă derivatele parțiale $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)$ și $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$ există și sunt continue în D, atunci condiția necesară și suficientă pentru ca integrala curbilinie $\int_{\gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ să nu depindă de drum în domeniul D, este ca în orice punct $(x,y) \in D$ să avem $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$.

În acest caz, expresia diferențială $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ este o diferențiala totală, deci funcțiile $P(x,y)$ *și* $Q(x,y)$ sunt derivatele parțiale ale unei funcții $g(x,y)$ și are loc egalitatea: $dg(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$.

Enunţăm o teoremă pe care o aplicăm în Metoda I pentru determinarea părţii imaginare a unei funcții $olomorfe$ pentru care se dă partea reală.

Teoremă: Fie ecuația diferențială $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, unde $P(x,y)$ *și* $Q(x,y)$ sunt funcții cu derivatele parțiale continue în domeniul $D \subset \mathbb{R}^2$ care verifică pentru orice $(x,y) \in D$ relația $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y),\ \forall (x,y) \in D$.

Integrala generală a ecuației date este: $\int_{x_0}^{x} P(t,y_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,v)\,dv = C, C \in \mathbb{C}$ *și* $(x_0,y_0) \in D$.

De reținut că punctul $(x_0,y_0) \in D$ trebuie să fie ales astfel încât drumul de integrare ABM să fie în întregime în domeniul D, $ABM = AB \cup BM$, unde segmentul AB este paralel cu axa Ox, iar segmentul BM este paralel cu axa Oy. Integrala generală se obține prin două operații de integrare, operații care se mai numesc și cuadraturi. Vom relua câteva noțiuni legate de funcția complexă de variabilă complexă.

Notăm cu $\mathbb{R}$ mulțimea numerelor reale și $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Pe mulțimea $\mathbb{R}^2$ definim relația de echivalență:

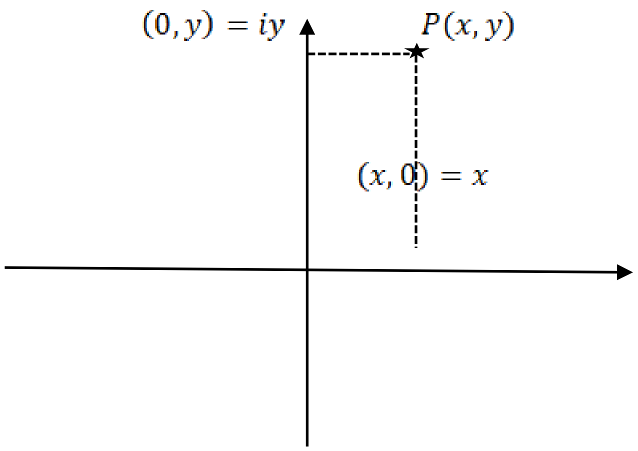
1) $(x,y) = (x',y') \Leftrightarrow \mathbf{x} = \boldsymbol{x'}$ ***și*** $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y'}$
2) *operația internă* $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x,y) + (x',y') = (x+x', y+y')$
3) *operația internă* $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x,y) \cdot (x',y') = (xx' - yy', xy' + x'y)$

Definiție: Mulțimea $\mathbb{R}^2$ dată cu aceste operații de adunare și înmulțire se va numi mulțimea numerelor complexe, notată cu $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

Se poate arăta că tripletul $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ formează o structură de corp comutativ, numit corpul numerelor complexe. Din această definiție rezultă că orice număr complex $z \in \mathbb{C}$ este deci o pereche ordonată de două numere reale, notat $z = (x,y)$ cu $x, y \in \mathbb{R}$.

Vom nota cu $0 = (0,0)$ elementul neutru pentru adunarea numerelor complexe, $1 = (1,0)$ elementul neutru pentru operația de înmulțire a numerelor complexe și $x = (x,0), \forall x \in \mathbb{R}$. Un rol special îl are numărul complex $i = (0,1)$ introdus de Euler și are expresia $i^2 = -1$ *sau* $i = \sqrt{-1}$, valoare care se poate obține folosind operația de înmulțire a două numere complexe: $i \cdot i = (0,1) \cdot (0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1,0) = -1$. Vom nota de asemenea $(0,y) = iy$.

Folosind aceste notații orice număr complex poate fi scris sub forma algebrică $z = (x,y) = (x,0) + (0,y) = x + iy$. Dacă notăm cu π planul euclidian și xOy este un reper ortogonal în π, atunci orice număr complex $z = x + iy$ se identifică prin punctul de coordonate (x,y); în acest context, axa Ox se numește axa reală, Oy se numește axa imaginară, iar π se mai numește planul lui Gauss al variabilei z.

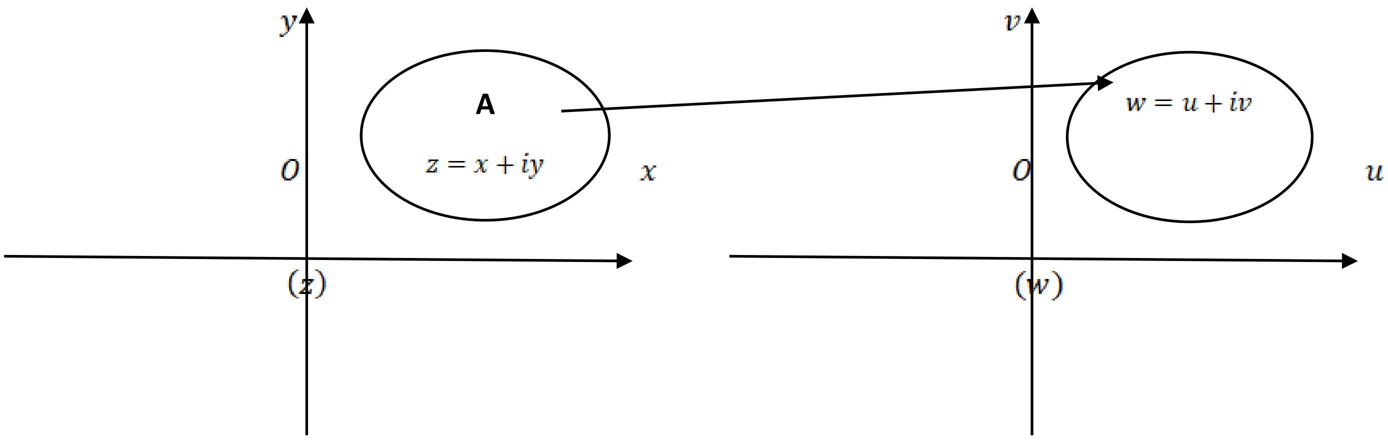


Vom defini funcția complexă de variabilă complexă o funcție $f: A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, care face ca fiecărui număr complex $z \in A$ să-i corespundă în mod univoc un punct $w \in \mathbb{C}$, pe care îl vom nota $w = f(z)$.

Corespondența dintre z *și* $w = f(z)$ definită de funcția f mai înseamnă că dându-se perechea ordonată $(x, y) \in A$, putem cunoaște în mod univoc perechea (u, v). Deci u și v vor fi două funcții reale de două variabile reale x și y definite pe A.
$u = u(x, y)$ *și* $v = v(x, y)$, adică putem scrie $w = f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + i\ v(x, y)$.

În acest fel, studiul unei funcții complexe de o variabilă complexă revine la studiul unui cuplu de două funcții reale de două variabile reale:
$u(x, y) = Re\, f(z),\ \ v(x, y) = Im\, f(z)$.

Din punct de vedere geometric, funcția complexă de o variabilă complexă poate fi interpretată ca o transformare punctuală care transformă punctele din planul (z) în punctele din planul (w): $(x, y) \to \big(u(x, y), v(x, y)\big)$.



O mulțime $A \subset \mathbb{C}$ este o mulțime deschisă dacă $\forall z \in A, \exists r > 0$ *astfel încât* $U(z, r) \subset A$, *adică există un disc deschis cu centrul în z și de rază r inclus în A.*
O mulțime deschisă $A \subset \mathbb{C}$ este conexă dacă orice două puncte din A pot fi unite printr-o linie poligonală continuă în A. O mulțime deschisă și conexă se numește domeniu, notat cu D.

Definiție: *Fie* $f: D \to \mathbb{C}$ o funcție complexă de variabilă complexă. Funcția f se numește *olomorfă* într-un punct $z_0 \in D$(sau $\mathbb{C}$-derivabilă în z_0 *sau monogenă în* z_0) dacă există și este finită(adică aparține lui $\mathbb{C}$) limita $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$.

Numărul complex $f'(z_0)$ se numește derivata complexă a lui f în z_0. Ca și în cazul funcțiilor reale, o funcție $\mathbb{C}$-derivabilă este continuă în punctul z_0. Funcția $f(z) = u(x,y) + i\, v(x,y)$ se numește R-diferențiabilă într-un punct din D dacă funcțiile reale $u(x,y)$ și $v(x,y)$ sunt diferențiabile în acel punct. Dacă o funcție este R-diferențiabilă în fiecare punct al domeniului D, atunci spunem că f este R-diferențiabilă pe D.
Condiția necesară și suficientă ca funcția f să fie $olomorf$ă în punctul $z_0 = (x_0, y_0)$ este ca f să fie R-diferențiabilă în z_0 și derivatele parțiale ale lui $u(x,y)$ și $v(x,y)$ să îndeplinească relațiile:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) \end{cases}$$ numite relațiile lui $Cauchy - Riemann$.

Pentru expresia derivatei într-un punct menționăm două forme:
$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$, unde prin $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$ se înțelege derivata parțială a funcției f în raport cu variabila reală x.
$f'(z_0) = -i(\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0))$, unde $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}$ reprezintă derivata parțială a funcției f în raport cu variabila reală y.
Fie funcția $f: D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}\ definit$ă $și\ olomorf$ă $pe\ D, f(z) = u(x,y) + i\, v(x,y)$.
Presupunem că funcțiile $u(x,y)$ și $v(x,y)$ au derivatele parțiale de ordinul I și II continue în D. Vom arăta că $u(x,y)$ și $v(x,y)$ sunt funcții armonice.
Din egalitatea lui $Cauchy - Riemann$ avem:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \end{cases}$$ ⇨ din teorema lui Schwarz avem: $\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$ ⇨

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ ⇨ $u(x,y)$ este o funcție armonică

Din $$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \end{cases}$$ ⇨ $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$ ⇨ $v(x,y)$ este o funcție armonică

Funcția $v(x,y)$ se numește conjugata armonică a funcției $u(x,y)$.
Să punem în evidență cine este conjugata armonică a funcției $v(x,y) = Im\, f(z)$. Pentru aceasta admitem că notăm cu $w(x,y)$ conjugata armonică a funcției $v(x,y)$.
După cum s-a definit conjugata armonică a funcției $u(x,y)$, pentru ca $w(x,y)$ să fie conjugata armonică este necesar să verifice condițiile $Cauchy - Riemann$:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial w}{\partial x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Dar funcția $v(x,y)$ satisface:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial(-u)}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial(-u)}{\partial x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2(-u)}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2(-u)}{\partial x \partial y} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

$$Din\ egalitatea \begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2(-u)}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2(-u)}{\partial x \partial y} \end{cases} \Rightarrow w = -u\ .$$

De unde rezultă că conjugata armonică a funcției $v(x,y)$ este $-u(x,y)$.

Observație: Deci funcțiile $u(x,y) = Re\, f(z)$ și $v(x,y) = Im\, f(z)$, care reprezintă partea reală, respectiv imaginară a unei funcții $olomorfe$ în D, nu pot fi funcții total arbitrare. Ele sunt funcții armonice legate între ele prin condițiile $Cauchy - Riemann$.
Dacă se dă partea reală $u(x,y) = Re\, f(z)$ ca fiind o funcție armonică a unei funcții $olomorfe$ f, există o conjugată armonică $v(x,y)$ legate între ele prin relațiile $Cauchy - Riemann$.
Vom prezenta pe scurt metoda folosită pentru determinarea funcției $v(x,y) = Im\, f(z)$.

Metoda I

Folosind relațiile lui $Cauchy - Riemann$ obținem relația $dv(x,y) = -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy$
Deoarece $u(x,y)$ și $v(x,y)$ sunt funcții armonice, diferențiala funcției este o diferențială totală și poate fi integrată pe o curbă γ conținută în domeniul D.

$$\int_\gamma dv(x,y) = \int_\gamma -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy$$

Deoarece membrul drept este integrala unei diferențiale totale, ea este independentă de drum, deci vom integra pe un drum $\gamma = AB \cup BM$, unde AB este un segment paralel cu Ox, iar BM este un segment paralel cu Oy, $AB \cup BM \subset D$ și obținem:

$v(x,y) = \int_{x_0}^{x} -\frac{\partial u}{\partial y}(t,y_0)\,dt + \int_{y_0}^{y}\frac{\partial u}{\partial x}(x,v)\,dv + C$, unde $t \in [x_0,x],\ v \in [y_0,y]$

Funcția $v(x,y)$, conjugata armonică, este unică, abstracție făcându-se de o constantă reală C.
În această lucrare vom introduce o altă metodă de determinare a conjugatei armonice, folosind integrarea unei derivate parțiale, derivată continuă în raport cu o anumită variabilă reală. Dacă derivata parțială este continuă în raport cu o anumită variabilă, atunci ea este integrabilă pe un domeniu de definiție în raport cu variabila respectivă.

Metoda a II-a

Deoarece se cunoaște funcția $u(x,y)$ și faptul că $v(x,y)$ este conjugata sa armonică, din relațiile lui $Cauchy - Riemann$ avem:
$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$, unde $\frac{\partial u}{\partial y}$ este continuă în raport cu variabila y, deci este integrabilă în raport cu y
Atunci $\frac{\partial v}{\partial x}dy = -\frac{\partial u}{\partial y}dy \Rightarrow v(x,y) = \int \frac{\partial u}{\partial y}dy + C(x)$, unde C(x) se determină folosind cea de-a doua relație a lui $Cauchy - Riemann$.

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = \left[-\int \frac{\partial u}{\partial y}dy + C(x)\right]_x' = -\left(\int \frac{\partial u}{\partial y}dy\right)_x' + C'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y} + C'(x)$$

Dar $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow -\frac{\partial u}{\partial y} + C'(x) = \frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow C'(x) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$

$\Rightarrow C(x) = \int \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)dx + C,\ C \in \mathbb{R}$

Rezultă că $v(x,y) = -\int \frac{\partial u}{\partial y}dy + \int \frac{\partial u}{\partial x}dx + \int \frac{\partial u}{\partial y}dx + C$.

Exemplu 1.
Să se determine funcția $olomorf$ă $f(z) = u(z) + i\,v(z),\ f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ dacă $u(z) = u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} + x^2 - y^2,\ z = x + iy\ \in \mathbb{C}^*$.
Metoda I

- Etapa I

Pentru ca funcția u să fie Re f(z) este necesar ca funcția să fie o funcție armonică pe $\mathbb{C}^*$. Verificăm dacă u este armonică:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + 2x \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2 + \frac{2x^3-6xy^2}{(x^2+y^2)^3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} - 2y \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2 + \frac{-2x^3+6xy^2}{(x^2+y^2)^3}$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 + \frac{2x^3-6xy^2}{(x^2+y^2)^3} - 2 + \frac{-2x^3+6xy^2}{(x^2+y^2)^3} = 0.$$

$\Rightarrow u(x,y)$ *este o funcție armonică*

Funcția fiind *olomorfă* pe $\mathbb{C}^*$, rezultă că ea admite o conjugată armonică $v(x,y)$. Din *olomorfia* funcției f și din definiția conjugatei armonice rezultă că funcțiile $u(x,y)$ *și* $v(x,y)$ satisfac condițiile lui *Cauchy − Riemann*:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + 2x \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\left(\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} - 2y\right) = 2y + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \end{cases}$$

- Etapa a II-a

Analizând derivatele parțiale ale funcției $v(x,y)$ remarcăm că sunt funcții raționale în două variabile reale x și y și sunt funcții continue pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} = \mathbb{C}^*$.

Deoarece derivate parțiale sunt continue pe domeniul de definiție rezultă că funcția $v(x,y)$ este o funcție diferențiabilă pe $\mathbb{C}^*$ și diferențiala sa este:

$$dv(x,y) = \left[2y + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right]dx + \left[\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + 2x\right]dy$$

- Etapa a III-a

Deoarece membrul drept al egalității este o funcție continuă pe $\mathbb{C}^*$, rezultă că $dv(x,y)$ este o funcție continuă pe $\mathbb{C}^*$, deci este integrabilă pe $\mathbb{C}^*$.

Funcția $dv(x,y)$ fiind o funcție de două variabile, rezultă că ne aflăm în cazul unei integrale curbilinii de speța a doua (sau în raport cu variabilele x și y).

Integrăm egalitatea pe o curbă γ care nu trece prin origine:

$$\int_\gamma dv(x,y) = \int_\gamma \left[2y + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right]dx + \left[\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + 2x\right]dy$$

Pentru a putea calcula o integrală curbilinie în raport cu variabilele este necesar să cunoaștem o reprezentare parametrică a curbei γ. Neavând nicio reprezentare dată, ne punem problema dacă integrala nu este o integrală independentă de drum. Pentru aceasta verificăm condiția necesară și suficientă ca integrala să fie independentă de drum.

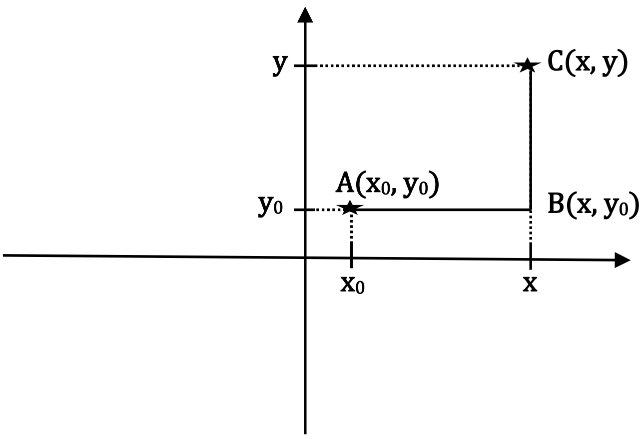
Calculăm $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}(x,y)$ *și* $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}(x,y)$

Deoarece $v(x,y)$ este o funcție armonică, rezultă că derivatele de ordinul întâi și doi sunt funcții continue. Din teorema lui Schwarz, dacă una din derivatele parțiale de ordinul doi este continuă, atunci cele două derivate sunt egale.

Să calculăm pentru exemplificare:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\right)=\left[\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+2x\right]'_x$$
$$=\frac{-2x(x^2+y^2)^2-(y^2-x^2)\cdot 2(x^2+y^2)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^4}+2$$
$$=\frac{-2x(x^2+y^2)-4x\cdot(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3}+2=2+\frac{2x^3-6xy^2}{(x^2+y^2)^3}$$

Cum $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\right)$ este o funcție continuă pe $\mathbb{C}^*$, rezultă că cele două derivate parțiale mixte sunt egale, de unde rezultă că $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\right)$. Această egalitate asigură independența de drum a integralei din membrul drept.
Dacă integrala este independentă de drum, atunci alegem un drum format din două drepte paralele cu axele de coordonate, având punctul de plecare într-un punct $(x_0,y_0), unde\ x_0\neq 0,\ y_0\neq 0$ și $punctul\ final\ (x,y),\ x\neq 0, y\neq 0.$



Vom înlocui curba $\gamma\ cu\ \gamma=AB\cup BC$ și obținem:

$$v(x,y)+C=\int_{AB\cup BC}\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)dx+\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)dy$$
$$=\int_{AB\cup BC}\left[2y+\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right]dx+\left[\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+2x\right]dy$$

Ținând cont de proprietățile integralei curbilinii avem:

$$v(x,y)+C=\int_{AB}\left[2y+\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right]dx+\left[\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+2x\right]dy$$
$$+\int_{BC}\left[2y+\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right]dx+\left[\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+2x\right]dy$$

Pentru rezolvarea integralei curbilinii pe drumurile AB și BC este necesar să cunoaștem o reprezentare parametrică a drumurilor:

$AB:\begin{cases} x=\varphi(t)=t \\ y=\Psi(t)=y_0 \end{cases}, t\in[x_0,x]$ $\qquad BC:\begin{cases} x=\varphi(t)=x \\ y=\Psi(v)=v \end{cases}, v\in[y_0,y]$

Folosind aceste ecuații parametrice ale celor două drumuri obținem:

$$v(x,y)+C=\int_{x_0}^{x}\left[2y_0+\frac{2ty_0}{(t^2+{y_0}^2)^2}\right]dt+\left[\frac{{y_0}^2-t^2}{(t^2+{y_0}^2)^2}+2t\right]\cdot 0$$
$$+\int_{y_0}^{y}\left[2v+\frac{2xv}{(x^2+v^2)^2}\right]\cdot 0+\left[\frac{v^2-x^2}{(x+v^2)^2}+2x\right]\cdot dv$$
$$=\int_{x_0}^{x}\left[2y_0+\frac{2ty_0}{(t^2+{y_0}^2)^2}\right]dt+\int_{y_0}^{y}\left[\frac{v^2-x^2}{(x+v^2)^2}+2x\right]\cdot dv$$
$$=\left(2y_0t-\frac{y_0}{t^2+{y_0}^2}\right)\Big|_{x_0}^{x}+\left(2vx-\frac{v}{x^2+v^2}\right)\Big|_{y_0}^{y}$$
$$=2y_0x-\frac{y_0}{x^2+{y_0}^2}-\left(2y_0x_0-\frac{y_0}{{x_0}^2+{y_0}^2}\right)$$
$$+\left[2xy-\frac{y}{x^2+y^2}-\left(2y_0x-\frac{y_0}{x^2+{y_0}^2}\right)\right]$$
$$=2y_0x-\frac{y_0}{x^2+{y_0}^2}-2y_0x_0+\frac{y_0}{{x_0}^2+{y_0}^2}+2xy-\frac{y}{x^2+y^2}-2y_0x$$
$$+\frac{y_0}{x^2+{y_0}^2}=2xy-\frac{y}{x^2+y^2}-\left(2y_0x_0-\frac{y_0}{{x_0}^2+{y_0}^2}\right)$$

Am obținut: $v(x,y)=2xy-\frac{y}{x^2+y^2}-\left(2y_0x_0-\frac{y_0}{{x_0}^2+{y_0}^2}-C\right)$

Deoarece $x_0,y_0,C\in\mathbb{R}$, notăm cu $a=-\left(2y_0x_0-\frac{y_0}{{x_0}^2+{y_0}^2}-C\right)\in\mathbb{R}$ și avem:

$$v(x,y)=2xy-\frac{y}{x^2+y^2}+a\,,a\in\mathbb{R}$$

Funcția

$f(z)=u(z)+v(z)=\frac{x}{x^2+y^2}+x^2-y^2+i\left(2xy-\frac{y}{x^2+y^2}+a\right)=\frac{x}{x^2+y^2}+x^2-y^2+2ixy-\frac{iy}{x^2+y^2}+ia=\frac{x-iy}{x^2+y^2}x^2+y^2+2ixy+ia=\frac{1}{z}+z^2+ia\,,a\in\mathbb{R}\,,z\in\mathbb{C}$

.

Metoda a II-a

Pentru determinarea funcției $olomorfe$ care are partea reală egală cu $u(z)=u(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}+x^2-y^2\,, pentru\ z=x+iy\in\mathbb{C}^*$ parcurgem următoarele etape:

- Etapa I : Arătăm că u este o funcție armonică
- Etapa a II-a

Considerăm sistemul $Cauchy-Riemann$

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+2x\\ \frac{\partial v}{\partial x}=2y+\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\end{cases}$$

Analizând derivata parțială $\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+2x$, remarcăm că este o funcție continuă pe $\mathbb{C}^*$, în raport cu fiecare variabilă x și y. Fiind o funcție continuă în raport cu variabila x, rezultă că este o funcție integrabilă în raport cu x.

Înmulțind egalitatea cu dx, avem:

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)dx = \left(2y + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right)dx$$

Integrând egalitatea obținem:

$$\int \frac{\partial v}{\partial x}(x,y)dx = \int \left(2y + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right)dx + \varphi(y)$$

$$\Rightarrow\ v(x,y) = y^2 - \frac{y}{x^2+y^2} + \varphi(y)$$

Pentru determinarea funcției $\varphi(y)$ folosim prima relație a lui $Cauchy - Riemann$:

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)dx = 2y - \frac{x^2+y^2-2y^2}{x^2+y^2} + \varphi'(y) = 2y - \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \varphi'(y)$$

$$\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + 2x = 2y - \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \varphi'(y)\ \Rightarrow\ \varphi'(y) = 2x - 2y$$

Integrând egalitatea în raport cu variabila y obținem:

$$\int \varphi'(y)dy = \int (2x-2y)dy = 2xy - y^2 + C$$

Rezultă că $v(x,y) = y^2 - \frac{y}{x^2+y^2} + 2xy - y^2 + C = 2xy - -\frac{y}{x^2+y^2} + C\ , C \in \mathbb{R}$

Observații:

1) Cele două metode sunt echivalente, rezultatul fiind același: $v(x,y) = 2xy - \frac{y}{x^2+y^2} + C\ , C \in \mathbb{R}$
2) Conjugata armonică $v(x,y)$ este unică, abstracție făcând de o constantă aditivă.

Exemplu 2.

Să se determine funcția $olomorf$ă $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ cu partea imaginară $u(x,y) = \ln(x^2+y^2) + x - 2y$.

Pentru determinarea părții reale vom aplica metoda a doua. Pentru aceasta parcurgem etapele:

Etapa I : Arătăm că $v(x,y)$ este o funcție armonică

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = [\ln(x^2+y^2) + x - 2y]'_x = \frac{2x}{x^2+y^2} + 1$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (\frac{2x}{x^2+y^2} + 1)'_x = \frac{2y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = [\ln(x^2+y^2) + x - 2y]'_y = \frac{2y}{x^2+y^2} - 2$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (\frac{2y}{x^2+y^2} - 2)'_y = \frac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

De unde obținem: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\ \Rightarrow\ u(x,y)$ este armonică, deci poate fi conjugata armonică a părții reale ale funcției $olomorfe$

Etapa a II-a : Funcția $u(x,y)$ satisface condițiile lui $Cauchy - Riemann$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2} + 1 \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 2 - \frac{2y}{x^2+y^2} \end{cases}$$

Analizând derivata parțială $\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)$ remarcăm că este o funcție continuă în raport cu fiecare variabilă x și y pe $\mathbb{C}^*$. Fiind continuă în raport cu y, este integrabilă în raport cu y. În acest caz, variabila x o considerăm o constantă și orice funcție de o variabilă x, cum ar fi $C(x)$, se consideră o variabilă care depinde de x.

$\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)dy = \left(\frac{2x}{x^2+y^2}+1\right)dy$

Membrul drept este o funcție integrabilă în raport cu variabila y și are loc egalitatea:

$$v(x,y) = \int \left(\frac{2x}{x^2+y^2}+1\right)dy + C(x) = \int \left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)dy + \int dy + C(x)$$

$$= 2arctg\frac{y}{x} + y + C(x)$$

Pentru determinarea funcției $C(x)$ folosim a doua relație a lui $Cauchy - Riemann$, derivând funcția $v(x,y)$ în raport cu x:

$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 2 - \frac{2y}{x^2+y^2} + C'(x)$ relație egală cu $\frac{-2y}{x^2+y^2} + C'(x) = \frac{-2y}{x^2+y^2} + 2$

$\Rightarrow\ C'(x) = 2\ \Rightarrow\ \int C'(x)\,dx = \int 2\,dx = 2x + C$

$\Rightarrow C(x) = 2x + C$

Așadar, $v(x,y) = 2arctg\frac{y}{x} + y + 2x + C$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \frac{-2y}{x^2+y^2} + 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x,y)dx = \left(\frac{-2y}{x^2+y^2}+2\right)dx$$

$$\Rightarrow\ v(x,y) = \int \frac{-2y}{x^2+y^2}dx + 2\int dx + C(x) = -2arctg\frac{x}{y} + 2x + C(y)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -2\frac{\left(\frac{y}{x}\right)'_y}{1+\frac{x^2}{y^2}} + C'(y) = -2\frac{\frac{-x}{y^2}}{\frac{y^2+x^2}{y^2}} + C'(y) = \frac{2x}{x^2+y^2} + C'(y)$$

$$\frac{2x}{x^2+y^2} + C'(y) = \frac{2x}{x^2+y^2} + 1 \quad \Rightarrow C'(y) = 1 \quad \Rightarrow C(y) = \int dy = y + C$$

$$\Rightarrow\ v(x,y) = 2arctg\frac{x}{y} + 2x + y + C$$

Funcția căutată este:

$$f(z) = u(z) + i\,v(z) = \ln(x^2+y^2) + x - 2y + i(2arctg\frac{x}{y} + 2x + y + C)$$

Exemplu 3.

Să se determine funcția $olomorf$ă $f = u + iv$ pe domeniul $D \subset \mathbb{C}, unde\ u(x,y) = (x\cos x - y\sin x)e^{-y}, z = x + iy \in \mathbb{C}$.

Vom rezolva problema folosind metoda a doua, urmărind următoarele etape:

Etapa I : Arătăm că u este o funcție armonică, condiție necesară și suficientă ca funcția să fie partea reală a unei funcții $olomorfe$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = [(x\cos x - y\sin x)e^{-y}]'_x = (\cos x - x\sin x - y\cos x)e^{-y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = [(\cos x - x\sin x - y\cos x)e^{-y}]'_x = (-x\cos x - 2\sin x + y\sin x)e^{-y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = [(x\ cosx - y\sin x)e^{-y}]'_y = (-x\ cosx + y\sin x - sin\ x)e^{-y}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = [(-x\ cosx + y\sin x - sin\ x)e^{-y}]'_y = (x\ cosx - y\sin x + 2sin\ x)e^{-y}$$
$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0 \ \Rightarrow u(x,y) \text{ este o funcție armonică}$$

Etapa a II-a : Pentru ca funcția $v(x,y)$ să fie conjugata armonică a funcției $u(x,y)$, este necesar să satisfacă condițiile $Cauchy - Riemann$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = (x\ cosx - y\sin x + sin\ x)e^{-y} \\ \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = (cos\ x - x\sin x - y\ cos\ x)e^{-y} \end{cases}$$

Etapa a III-a : Analizăm derivatele parţiale $\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$ şi $\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)$

Ambele derivate parţiale sunt funcţii continue pe $\mathbb{R}^2$, deci sunt integrabile.

$$v(x,y) = \int (x\ cosx - y\sin x + sin\ x)e^{-y}\,dx$$
$$= e^{-y}\int x\cos x\,dx - ye^{-y}\int \sin x\ dx + e^{-y}\int \sin x\,dx$$
$$v(x,y) = e^{-y}(x\sin x + \cos x) + ye^{-y}\cos x - e^{-y}\cos x + C = e^{-y}(x\ sin\ x + y\cos x) + C$$

Dacă analizăm derivata parţială în raport cu y avem:

$$v(x,y) = \int (cosx - x\sin x - y\ cos\ x)e^{-y}\,dy$$
$$= \cos x\int e^{-y}dy - x\ sin\ x\int e^{-y}\,dy - \cos x\int ye^{-y}\,dy$$
$$v(x,y) = -\cos x\,e^{-y} + x\sin x\,e^{-y} - \cos x\,(-ye^{-y} - e^{-y}) = e^{-y}(x\sin x + y\cos x) + C$$

Funcția căutată este:

$$f(z) = u(z) + i\,v(z) = (x\ cos\ x - y\sin x)e^{-y} + ie^{-y}(x\sin x + y\cos x) + iC$$
$$f(z) = \ e^{-y}(x\cos x + ix\ sinx\ - y\sin x\ iy\cos x) + iC$$
$$f(z) = \ e^{-y}[(x+iy)\cos x + ix\sin x + i^2 y\sin x] + iC$$
$$f(z) = \ e^{-y}[(x+iy)\cos x + i\sin x(x+iy)] + iC$$
$$f(z) = \ e^{-y}(z\cos x + iz\sin x) + iC \ = z\,e^{-y}(\cos x + i\sin x) + iC$$
$$f(z) = z\,e^{-y}\cdot e^{ix} + iC = z\,e^{ix-y} + iC \ = z\,e^{ix+i^2 y} + iC = z\,e^{i(x+iy)} + iC$$
$$f(z) = z\,e^{iz} + iC.$$

BIBLIOGRAFIE:

[1] Roşculeț, M. (1966). Analiză Matematică, vol. I şi II, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti

[2] Călugăreanu, G. (1963). Elemente de teoria funcțiilor de o variabilă complexă, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti

[3] Boboc, N. Funcții complexe, (1969). Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti

[4] Ceauşu, T., Suciu, N. (2001). Funcții complexe, Probleme şi exerciții, Editura Mirton, Timişoara,

[5] Mocanu, G., Stoian, G., Vişinescu, E. (1970). Teoria funcțiilor de o variabilă complexă, Culegere de probleme, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti

[6] Mocanu, P. T. Breaz, D. Oros, G. I. Oros, G. (2009). Analiză complex, Editura Aeternitas, Alba Iulia

UTILIZAREA ELEMENTELOR DE ÎNVĂȚARE ACTIVĂ LA ORELE DE MATEMATICĂ

Mariana Ioana RĂDIȚĂ

Liceul Tehnologic „Felix“, Sânmartin, jud. Bihor, profesor pentru învățământ primar, i_radita@yahoo.com

Rezumat: *Metodele active de învățare fac lecțiile interesante, îi ajută pe elevi să emită judecăți de substanță și fundament, îi sprijină pe elevi să înțeleagă conținutul pe care sunt capabili să îl aplice în viața reală.*
Cuvinte cheie: învățare activă, metode interactive

Învățare activă înseamnă, conform dicționarului, procesul de învățare centrat pe interesele/nivelul de înțelegere/nivelul de dezvoltare al participanților la proces. Învățarea activă pune bazele comportamentelor care sunt altfel observabile:

- comportamente care denotă participare (elevul este activ, participă la activități)
- gândire creativă (elevul are propriile sugestii, propune noi interpretări)
- învățare aplicată (elevul devine capabil să aplice o strategie de învățare într-o anumită situație de învățare)
- construirea cunoștințelor (în loc să fie pasiv, elevul îndeplinește sarcini care îl vor conduce la înțelegere)

Competențele generale urmărite în învățarea activă sunt:

- dezvoltarea capacităţii de abordare sistemică a procesului de învăţământ, prin evidenţierea interdependenţei dintre principalele sale funcţii (predare, învăţare, evaluare)
- prezentarea principalelor teorii ale învățării, insistând asupra variabilelor care argumentează ideea unei învățări active
- dezvoltarea capacităţii de a aplica strategii active de învăţare în procesul de predare-învăţare a diferitelor discipline educaţionale
- dezvoltarea abilităților de comunicare și lucru în echipă
- însuşirea metodelor şi tehnicilor de cunoaştere şi autocunoaştere a elevilor.

Metodele active de învățare fac lecțiile interesante, îi ajută pe elevi să emită judecăți de substanță și fundament, îi sprijină pe elevi să înțeleagă conținutul pe care sunt capabili să îl aplice în viața reală. Printre metodele care activează predarea-învățarea se numără cele prin care elevii lucrează între ei, își dezvoltă abilități de colaborare și de ajutor reciproc. Ele pot avea un impact extraordinar asupra elevilor datorită numelor lor, naturii lor jucăuşe și oferă copiilor alternative de învățare. Pentru a dezvolta gândirea elevilor, trebuie să folosim, în special, unele strategii activ-participative, creative. Acestea nu trebuie separate de cele tradiționale, ele marchează un nivel superior în spirala modernizării strategiilor didactice.

Specific metodelor interactive de grup este faptul că acestea promovează interacțiunea între mințile participanților, între personalitățile acestora, conducând la o învățare mai activă și cu rezultate evidente. Acest tip de interactivitate identificarea subiectului cu situația de învățare în care este implicat duce la transformarea elevului în maestru al propriei pregătiri. Printre metodele moderne specifice învățării active care pot fi aplicate cu succes la orele de matematică se numără: brainstormingul, metoda mozaicului, metoda cubului, turul galeriei, metoda ciorchinelui.

Brainstormingul este o metodă care ajută la crearea de idei și concepte creative și inovatoare. Pentru un brainstorming eficient, inhibițiile și criticile suspendate vor fi lăsate deoparte. Astfel, exprimarea va deveni liberă, iar participanții la un proces de brainstorming își vor exprima ideile și opiniile fără teama de a fi respinși sau criticați. Se prezintă un concept, o idee sau o problemă și fiecare are propria părere despre ceea ce s-a spus și absolut tot ce-i vine în minte, inclusiv idei comice sau inaplicabile.

Figura 1. Metoda brainstorming

O sesiune de brainstorming bine condusă oferă tuturor posibilitatea de a participa la dezbateri şi poate fi o acțiune foarte constructivă. Paşii pentru un brainstorming eficient sunt următorii:

- deschiderea sesiunii de brainstorming în care este prezentat și discutat scopul acesteia tehnicile și regulile de bază care vor fi utilizate
- perioada de cazare dureaza 5-10 minute si are ca scop introducerea grupului in atmosfera de brainstorming, unde participanții sunt încurajați să discute idei generale pentru a trece la un nivel superior;
- partea creativă a brainstormingului durează 25-30 de minute.

Se recomandă ca în în această etapă, învăţătorul ar trebui să-și amintească timpul care a trecut și cât timp a mai rămas și la sfârșitul părții creative să acorde 3-4 minute în plus. În acest timp, grupul participant ar trebui încurajat să-și exprime opiniile fără ezitare.

- la sfârșitul părții creative coordonatorul brainstorming clarifică ideile care au fost notate pot fi luate în considerare: talentele și aptitudinile grupului, distribuția timpului și punctele care au fost obținute.
- în vederea stabilirii unui acord obiectiv, cei care au participat la brainstorming își vor exprima opinia și vor vota cele mai bune idei. Grupul de brainstorming trebuie să determine singuri care idei se potrivesc cel mai bine cu conceptul discutat.

Este important de menționat că scopul principal al metodei de brainstorming este de libera exprimare a opiniilor. Prin urmare, acceptați toate ideile, chiar și nebune, neobișnuite, absurde, fanteziste, așa cum vin în minte elevilor, indiferent dacă duc sau nu la rezolvarea problemei. Pentru a determina progresul de învatare al elevilor este necesara formarea acestora in schimbul de idei.

Exemplul 1. Aplicarea metodei brainstorming pentru a rezolva o problemă de geometrie la clasa a IV-a în care se teorema lui Pitagora și funcțiile trigonometrice.

Mozaicul sau metoda grupului interdependent este o strategie bazată pe învăţarea în echipă. Fiecare elev are o sarcină de studiu în care trebuie să devină expert. Totodată, el este responsabil de transmiterea informațiilor asimilate altor colegi.

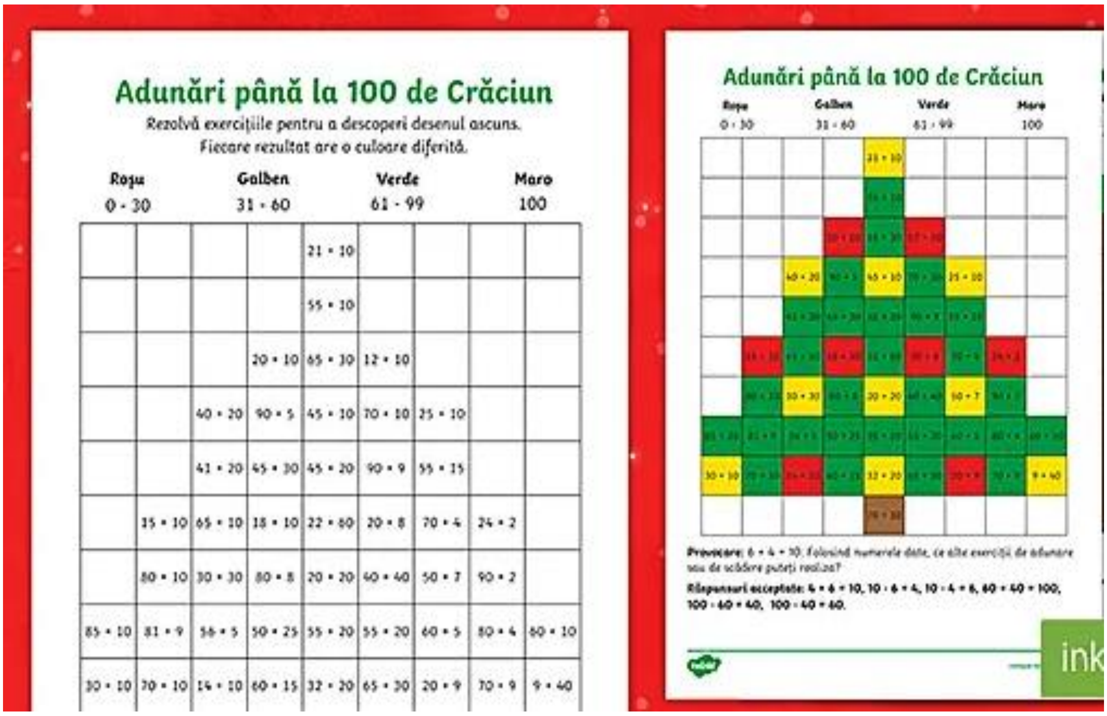


Figura 2. Metoda mozaic

În cadrul aceastei metode rolul învăţătorului este mult diminuat, el intervine semnificativ la începutul lectiei cand împarte elevii in grupe de lucru si traseaza sarcinile si la finalul activitatii cand va prezenta concluziile activitatii. Există mai multe variante ale metodei mozaic şi vă vom prezenta varianta standard a acestei metode care se realizează în cinci etape care constau în pregătirea materialului de studiu, organizarea colectivului, construirea grupului expert, reîntoarcerea în echipa iniţială, evaluarea.

Metoda cubului presupune explorarea unui subiect, a unei situații din mai multe perspective, permițând o abordare complexă și integratoare a unui subiect.

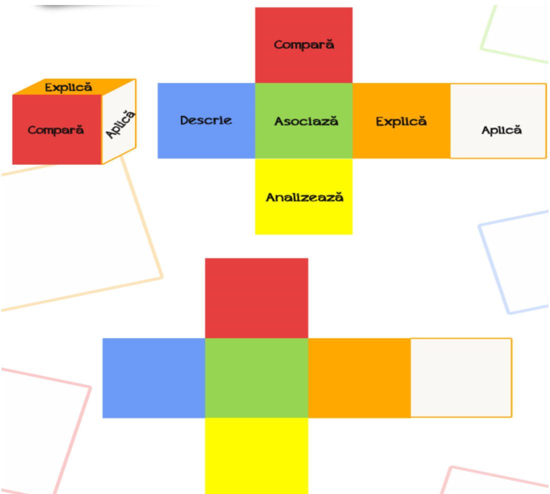


Figura 3. Metoda cubului

Se recomandă următorii pași:

- Realizați un cub pe fețele cărora sunt scrise cuvintele: descrieți, comparați, analizați, asociază, aplică, argumentează.
- Anunțarea subiectului
- Împărțiți clasa în 6 grupe, fiecare dintre ele examinând subiectul din perspectiva cerinței de pe una dintre fețele cubului:

-Descrie: culori, forme, dimensiuni etc.
-Comparați: ce este asemănător? Ce este diferit?
-Analizează: spune din ce este făcută, din ce este făcută.
-Asociat: ce te îndeamnă să gândești?
-Aplicați: ce puteți face în acest sens? La ce poate fi folosit?
- Argumentați: pro sau contra și enumerați o serie de motive care susțin afirmația dvs.

- Scrierea finală și împărtășirea cu alte grupuri.
- Afișați forma finală pe tablă sau pe pereții clasei.

Exemplul 3. Aplicarea la lecţia de recapitulare şi sistematizare a cunoştinţelor - Poliedre - clasa a IV-a.

Turul galeriei este o metodă de învățare interactivă bazată pe colaborarea dintre copii, care au pornit să găsească soluții la probleme. Această metodă presupune evaluarea interactivă și profund formativă a produselor realizate de către grupuri de elevi. Astfel, turul galeriei constă în următoarele:

1. Elevii, în grupuri de trei sau patru, rezolvă o problemă (o sarcină de învățare) care este probabil să o facă a avut mai multe soluții (mai multe perspective).

2. Produsele muncii grupului se concretizează într-o diagramă, inventar de idei etc. scris pe o bucată de hârtie (un poster).

3. Afișele sunt expuse pe pereții sălii de clasă, transformate într-o adevărată galerie.

4. La semnalul învăţătorului, grupurile parcurg pe rând fiecare afiș pentru a examina soluțiile propus de colegi. Comentariile sunt scrise pe posterul analizat.

5. După ce turul galeriei se încheie (grupurile revin la poziția de pornire înainte de plecare) fiecare echipa reexaminează produsul muncii lor în comparație cu altele și discută comentariile notate de colegi pe propriul poster, aceasta moetodă se dovedeşte a fi foarte distractivă şi interactivă.

Deși este o variantă mai simplă de brainstorming, *ciorchinele* este o metodă care implică identificarea legăturilor logice dintre idei poate fi folosită cu succes atât la începutul unei lecţii pentru actualizarea cunoştinţelor predate anterior, cât și în cazul lecţiilor de sinteză, recapitulare, sistematizare a cunoştinţelor.

Metoda ciorchinelui este o tehnică de găsire a modalităților de a accesa propriile cunoştinţe prin evidențierea modului de a înțelege un anumit subiect, un anumit conţinut.

Ciorchinii sunt o tehnică eficientă de predare și învățare care încurajează elevii să gândească liber și deschis. Metoda grupului funcționează în următorii pași:

1. Scrieți un cuvânt/temă (de cercetat) în mijlocul tablei sau pe o bucată de hârtie.

2. Elevii vor fi rugați să noteze toate ideile, frazele sau cunoștințele pe care le au în minte.

în legătură cu subiectul, în jurul cuvântului din centru, trasând linii între ele și cuvântul original.

3. Pe măsură ce vin în minte idei noi și notează-le cu cuvintele, elevii vor desena linii
între toate ideile care par a fi legate.

4. Activitatea se oprește când toate ideile sunt epuizate sau când s-a atins termenul alocat.

Există câteva reguli de urmat atunci când utilizați tehnica grupului:

- Notați tot ce vă vine în minte despre subiectul/problema discutată.
- Nu judeca/evaluează ideile produse, ci doar notaţiile.
- Nu te opri până când nu ai epuizat toate ideile care îți vin în minte sau până nu a trecut timpul alocat; dacă ideile refuză să vină insistă și zăbovesc pe subiect până apar unele idei.
- Permite legături cât mai multe și variate între idei.

Ciorchinele este considerat o tehnică flexibilă, putând fi realizat fie individual, fie în perechi, fie ca activitate de grup. Folosit în grup, el poate servi drept cadru pentru ideile grupului, ceea ce îi oferă fiecărui participant ocazia de a afla asociațiile și relațiile logice stabilite de ceilalți.

Folosirea acestor metode antrenează elevii într-o participare și colaborare continuă, crește motivația intrinsecă pentru că li se cere să descopere fapte, să aducă argumente pro și contra. Munca în echipă dezvoltă o atitudine de toleranță față de ceilalți și motivele stresului sunt eliminate și emoțiile sunt atenuate.

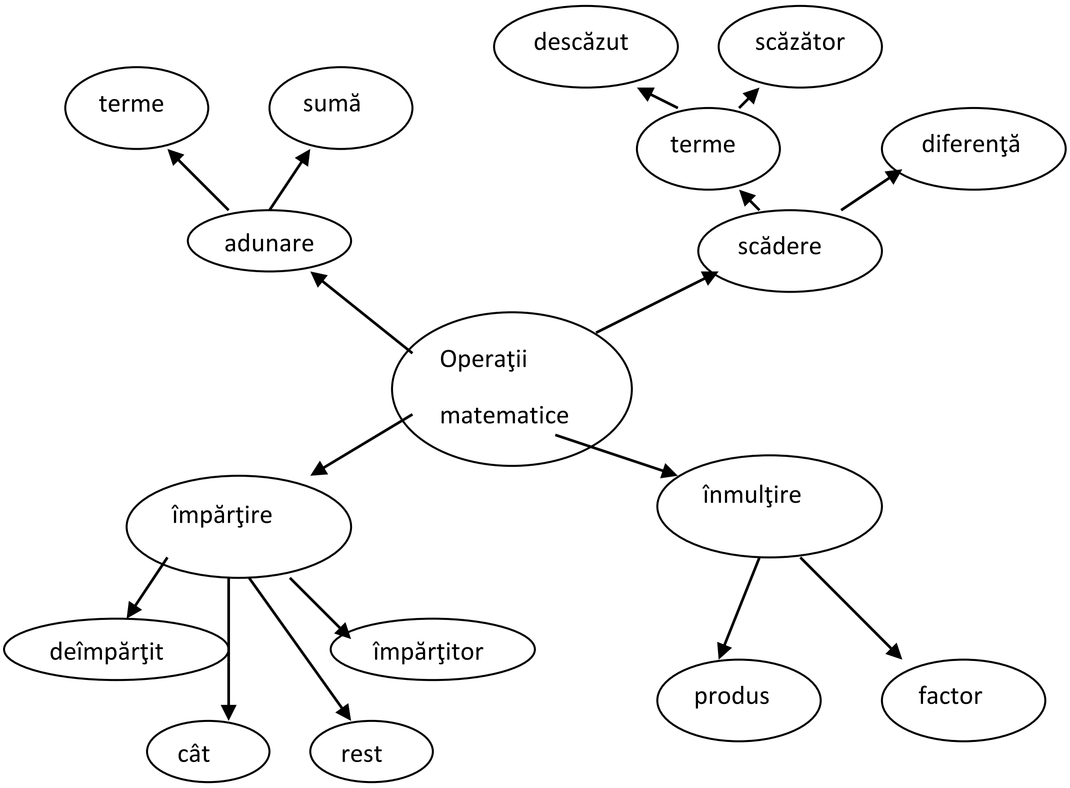


Figura 4.Tehnica ciorchinelui

BIBLIOGRAFIE

[1] Alb Lupaş, A. (2013). Predarea matematicii în învăţământul primar. Aspecte metodice, Editura Universităţii din Oradea
[2] Ardelean, L. Secelean, N. (2007). Didactica matematicii-managementul , proiectarea și evaluarea activităților didactice, Editura Universității "Lucian Blaga", Sibiu
[3] Bocoș, M. (2013). Instruirea interactivă, Editura Polirom
[4] Cerghit, I. (1976). Metode de învăţământ, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti
[5] Ionescu, M., Radu, I. (1995). Didactica modernă, Editura Dacia, Cluj-Napoca
[6] M. Neagu, C. Petrovici, Aritmetică – exerciţii, jocuri şi probleme, clasa a IV-a, Editura Polirom, Iaşi, 1997.
[7] Potolea, I., Neacşu, D., Pânişoară, O., Romiță, B. (2008). Pregătirea psihopedagogică. Manual pentru definitivat şi gradul II didactic, Editura Polirom, Iaşi

PARTEA ÎNTREAGĂ ȘI PARTEA FRACȚIONARĂ A UNUI NUMĂR REAL. APLICAȚII

Carmen RUSU

Liceul Teologic Penticostal „Betel”, Oradea, România, profesor de matematică, ocrusu@yahoo.com

Rezumat: *Tematica aleasă este legată îndeosebi de subiectele propuse pentru olipiadele școlare. Conținutul este format dintr-o scurtă trecere în revistă a noțiunilor teoretice, urmată de o serie de aplicații. Materialul ar putea fi util atât elevilor care se antrenează pentru competiții, cât și profesorilor care îi pregătesc pe aceștia pentru examenele naționale și concursurile școlare.*

Cuvinte cheie: partea întreagă a unui număr real, partea fracționară a unui număr real, identitatea lui Hermite

INTRODUCERE

Pentru început, voi prezenta noțiunile teoretice: definiții și notații, proprietăți, identitatea lui Hermite, consecințe și cazuri particulare.

Definiție. Fie $x \in \mathbb{R}$. Se numește ***partea întreagă a unui număr real***, cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu x. Se notează cu $[x]$, și avem: $[x] = max\{z \in \mathbb{Z} |\ z \leq x\}$.
Numărul real $\{x\} = x - [x]$ se numește ***partea fracționară*** a lui x.

Proprietăți

1. $[x] \leq x \leq [x] + 1, \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$;
2. $x - 1 < [x] \leq x, \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$;
3. $x < z \Leftrightarrow [x] < z, \forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, z \in \mathbb{Z}$;
4. $[x] = x \ \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$;
5. $[x + \alpha] = x, \forall\, x \in \mathbb{Z}, \forall\, \alpha \in [0,1)$;
6. $[x + z] = [x] + z \ \Leftrightarrow z \in \mathbb{Z}$;
7. $[x] = [y] \Leftrightarrow x, y \in [z, z+1)$, unde $z \in \mathbb{Z}$;
8. $[x] + [y] \leq [x + y] \leq [x] + [y] + 1, \forall\, x, y \in \mathbb{R}$;
9. $[-x] + [x] = -1, \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$;
10. $\{x\} \in [0,1), \forall\, x \in \mathbb{R}$;
11. $\{x\} = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$;
12. $\{x\} = \{y\} \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$;
13. $\{x + z\} = \{x\} \Leftrightarrow z \in \mathbb{Z}$;
14. $[[x]] = [x], \ \ \{\{x\}\} = \{x\}, \ \ [\{x\}] = \{[x]\} = 0, \ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Identitatea lui Hermite

$$[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \cdots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx], \forall\, x \in \mathbb{R} \text{ și } \forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Demonstrație (Matsouka)
Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = [x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \cdots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] - [nx]$.
Calculăm $f\left(x + \frac{1}{n}\right) = \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \left[x + \frac{3}{n}\right] + \cdots + [x + 1] - [nx + 1] = \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \cdots [x] + 1 - [nx] - 1 = f(x)$. Și avem $f(x) = 0, \forall\, 0 \leq x < \frac{1}{n}$. De unde rezultă că $f(x) = 0, \forall\, x \in \mathbb{R}$, ceea ce dovedește identitatea cerută.
Caz particular

Dacă $x = \frac{k}{n}$ rezultă $\left[\frac{k}{n}\right] + \left[\frac{k+1}{n}\right] + \left[\frac{k+2}{n}\right] + \cdots + \left[\frac{k+n-1}{n}\right] = [k]$, $\forall\, 0 \le k \le n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}, n \ge 2$.

Următoarele două aplicații le putem considera consecințe ale identității lui Hermite.

Consecința 1.

Fie numerele naturale $n, p \ge 2$. Arătați că pentru orice număr real x avem:

$$[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \cdots + \left[x + \frac{p}{n}\right] = [nx] \Leftrightarrow p = n - 1.$$

Demonstrație

Dacă $n = p - 1$ rezultă identitatea lui Hermite.

Dacă are loc relația $[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \cdots + \left[x + \frac{p}{n}\right] = [nx]$ (1), pentru orice număr real x, putem da $x = 0$ și atunci rezultă că $\left[\frac{1}{n}\right] + \left[\frac{2}{n}\right] + \left[\frac{3}{n}\right] + \cdots + \left[\frac{p}{n}\right] = 0$ (2). De aici avem $p \le n - 1$. Tot în relația (1) punem pe $x = \frac{1}{n}$ și avem atunci $\left[\frac{1}{n}\right] + \left[\frac{2}{n}\right] + \left[\frac{3}{n}\right] + \cdots + \left[\frac{p+1}{n}\right] = 1$, de unde, conform cu (2) avem $\left[\frac{p+1}{n}\right] = 1$ (3). Dacă presupunem acum că $p < n - 1$, atunci ar însemna că $\frac{p+1}{n} < \frac{n-1+1}{n} = 1$ și am avea $\left[\frac{p+1}{n}\right] = 0$ ceea ce e contradicție cu (3). Așadar, $p = n - 1$.

Consecința2. .

Fie numărul natural nenul n. Arătați că pentru orice număr real x avem:

$$\{x\} + \left\{x + \frac{1}{n}\right\} + \left\{x + \frac{2}{n}\right\} + \cdots + \left\{x + \frac{n-1}{n}\right\} = \frac{n-1}{2} + \{nx\}.$$

Demonstrație

În baza definiției părții fracționare $\{x\} = x - [x]$ și a identității lui Hermite, relația de mai sus devine:

$$\{x\} + \left\{x + \frac{1}{n}\right\} + \left\{x + \frac{2}{n}\right\} + \cdots \left\{x + \frac{n-1}{n}\right\} = nx + \frac{(n-1)n}{2n} - [x] - \left[x + \frac{1}{n}\right] - \left[x + \frac{2}{n}\right] - \cdots - \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = nx + \frac{n-1}{2} - [nx] = \frac{n-1}{2} + \{nx\}$$

.

În secvența următoare se găsesc aplicații ce se pot folosi ca modele de antrenament pentru aprofundarea noțiunilor de parte întreagă și parte fracționară a unui număr real, multe dintre acestea fiind subiecte date la olimpiadele de matematică în anii anteriori sau propuse în edițiile Gazetei Matematice.

1. Calculați:

$$\left[\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{98}}\right] =$$

Soluție

$$\left[\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{98}}\right]$$
$$= \left[\sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + \ldots + \sqrt{99} - \sqrt{98}\right] = \left[\sqrt{99} - 1\right]$$
$$= \left[\sqrt{99}\right] - 1 = 9 - 1 = 8$$

2. Rezolvați ecuația: $2\{x\} + [x] = \frac{1}{2}$.

Soluție

$$2(x - [x]) + [x] = \frac{1}{2}$$

$$2x-[x]=\frac{1}{2}$$
$$[x]=\frac{4x-1}{2}\Rightarrow\frac{4x-1}{2}\in\mathbb{Z}$$
$$\frac{4x-1}{2}\le x<\frac{4x+1}{2}$$
$$4x-1\le 2x<4x+1$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x\le 1\Rightarrow x\le\frac{1}{2}\\ 2x>-1\Rightarrow x>-\frac{1}{2}\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x\in\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]\Leftrightarrow 4x\in(-2;2]\Leftrightarrow 4x-1\in(-3;1]$$

$$\left.\begin{array}{r}\frac{4x-1}{2}\in\left(-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right]\\ \frac{4x-1}{2}\in\mathbb{Z}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{4x-1}{2}\in\{-1;0\}\Rightarrow x\in\left\{-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right\}$$

3. Arătați că numărul $\left[\sqrt{n^2+1}\right]+\left[\sqrt{n^2+2}\right]+\cdots+\left[\sqrt{n^2+n}\right]$ este pătrat perfect, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

Soluție

1) $\left[\sqrt{n^2+1}\right]=n$ pentru că $\Leftrightarrow\ n^2\le n^2+1<n^2+2n+1\Leftrightarrow\ n^2\le n^2+1<n^2+2n+1\ \ \forall n\in\mathbb{N}^*$

2) $\left[\sqrt{n^2+n}\right]=n$ pentru că $\Leftrightarrow n\le\sqrt{n^2+n}<n+1\Leftrightarrow n^2\le n^2+n<n^2+2n+1$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

$$\xRightarrow{(1)(2)}\left[\sqrt{n^2+1}\right]=\left[\sqrt{n^2+2}\right]=\left[\sqrt{n^2+3}\right]=\cdots=\left[\sqrt{n^2+n}\right]=n$$
$$\Rightarrow\left[\sqrt{n^2+1}\right]+\left[\sqrt{n^2+2}\right]+\cdots+\left[\sqrt{n^2+n}\right]=n^2,\qquad\forall n\in\mathbb{N}^*$$

4. Rezolvați ecuația: $\left[\frac{3x-7}{4}\right]+\left[\frac{3x-5}{4}\right]=\frac{5x+3}{7}$.

Soluție

$$\left.\begin{array}{r}[a]+\left[a+\frac{1}{2}\right]=[2a]\\ a=\frac{3x-7}{4}\Rightarrow a+\frac{1}{2}=\frac{3x-5}{4}\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\frac{3x-7}{4}\right]+\left[\frac{3x-5}{4}\right]=\left[2\cdot\frac{3x-5}{4}\right]=\left[\frac{3x-5}{2}\right]$$

Ecuația devine $\left[\frac{3x-5}{2}\right]=\frac{5x+3}{7}\Rightarrow\frac{5x+3}{7}\in\mathbb{Z}$

Fie $\frac{5x+3}{7}\le\frac{3x-5}{2}<\frac{5x+10}{7}\Leftrightarrow\begin{cases}10x+6\le 21x-35\\ 21x-35<10x+20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}11x\ge 41\\ 11x<55\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left[\frac{41}{11};5\right)$

Ştim că $\frac{5x+3}{7}\in\mathbb{Z}$ și că $\frac{5x+3}{7}\in\left[\frac{208}{11};4\right)\Rightarrow\frac{5x+3}{7}\in\{2;3\}\Rightarrow x\in\left\{\frac{11}{5};\frac{18}{5}\right\}$

5. Fie $a_n=\frac{5}{1\cdot 2}+\frac{9}{2\cdot 3}+\frac{15}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{n^2-n+3}{(n-1)^n};n\in\mathbb{N};n>1.$ Să se determine $[a_n]$ și $\{a_n\}$.

Soluție

$$a_n=1+\frac{3}{1\cdot 2}+1+\frac{3}{2\cdot 3}+1+\frac{3}{3\cdot 4}+\cdots+1+\frac{3}{(n-1)n}$$
$$=n-1+3\cdot\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}\right)$$

$$= n - 1 + 3 \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{n^2 - n + 3n - 3}{n} = \frac{n^2 + 2n - 3}{n} = n + 2 - \frac{3}{n}$$

Caz 1: $n = 2 \Rightarrow a_2 = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow [a_2] = 2; \{a_2\} = \frac{1}{2}$

Caz 2: $n = 3 \Rightarrow a_3 = 4 \Rightarrow [a_3] = 4; \{a_3\} = 0$

Caz 3: $n > 3 \Rightarrow a_n = n + 1 + \frac{n-3}{n} \Rightarrow [a_n] = n + 1; \{a_n\} = \frac{n-3}{n}$

6. Rezolvați ecuația: $[x] + \frac{1}{[x]} = \{x\} + \frac{1}{\{x\}}$

Soluție

$[x] + \frac{1}{[x]} = \{x\} + \frac{1}{\{x\}} \Leftrightarrow [x] - \{x\} = \frac{[x]-\{x\}}{[x]\{x\}}$ Condiții: $[x] \neq 0;\ \{x\} \neq 0 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}$

Caz 1: Dacă $[x] = \{x\} \Rightarrow x = 0$ imposibil

Caz 2: Dacă $[x] \neq \{x\} \Rightarrow [x]\{x\} = 1 \Rightarrow \{x\} = \frac{1}{[x]} \Rightarrow x = n + \frac{1}{n};\ unde\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1; 0; 1\}$

7. Arătați că: $\left[\frac{1}{2}\right] + \left[\frac{2}{2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{2}\right] = \left[\frac{n}{2}\right] \cdot \left[\frac{n+1}{2}\right]; \forall n \in \mathbb{N}^*$

Soluție Demonstrăm prin inducție matematică:

$P_{(n)}: \left[\frac{1}{2}\right] + \left[\frac{2}{2}\right] + \left[\frac{3}{2}\right] \ldots + \left[\frac{n}{2}\right] = \left[\frac{n}{2}\right] \cdot \left[\frac{n+1}{2}\right]; \forall n \in \mathbb{N}^*$

$P_{(1)}: \left[\frac{1}{2}\right] = \left[\frac{1}{2}\right] \cdot \left[\frac{2}{2}\right]$ „A"

Pp $P_{(k)}: \left[\frac{1}{2}\right] + \left[\frac{2}{2}\right] + \left[\frac{3}{2}\right] \ldots + \left[\frac{k}{2}\right] = \left[\frac{k}{2}\right] \cdot \left[\frac{k+1}{2}\right]; \forall k \in \mathbb{N}^*$

Dem. $P_{(k+1)}: \left[\frac{1}{2}\right] + \left[\frac{2}{2}\right] + \left[\frac{3}{2}\right] \ldots + \left[\frac{k}{2}\right] + \left[\frac{k+1}{2}\right] = \left[\frac{k+1}{2}\right] \cdot \left[\frac{k+2}{2}\right] + \left[\frac{k+1}{2}\right]$

$$= \left[\frac{k}{2}\right] \cdot \left[\frac{k+1}{2}\right] + \left[\frac{k+1}{2}\right] = \left[\frac{k+1}{2}\right] \cdot \left(\left[\frac{k}{2}\right] + 1\right) = \left[\frac{k+1}{2}\right] \cdot \left[\frac{k+2}{2}\right]$$

8. Arătați că, dacă $n, p \in \mathbb{N}^*$ atunci are loc egalitatea $\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n+1}{p}\right] + \cdots + \left[\frac{n+p-1}{p}\right] = n\ \ (p > n)$

Soluție Fixăm $p \in \mathbb{N}^*$ și demonstrăm prin inducție în aport cu , $n \in \mathbb{N}^*$:

$P_{(n)}: \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n+1}{p}\right] + \cdots + \left[\frac{n+p-1}{p}\right] = n;\ \forall n \in \mathbb{N}^*\ (p \in \mathbb{N}^*\ fixat)$

$P_{(1)}: \left[\frac{1}{p}\right] + \left[\frac{2}{p}\right] + \cdots + \left[\frac{p}{p}\right] = 1$ „A"

Pp $P_{(k)}: \left[\frac{k}{p}\right] + \left[\frac{k+1}{p}\right] + \ldots + \left[\frac{k+p-1}{p}\right] = k;\quad \forall k \in \mathbb{N}^*$

Dem. $P_{(k+1)}: \left[\frac{k}{p}\right] + \left[\frac{k+1}{p}\right] + \ldots + \left[\frac{k+p-1}{p}\right] + \left[\frac{k+p}{p}\right] = k + 1$

Avem: $\underbrace{\left[\frac{k}{p}\right] + \left[\frac{k+1}{p}\right] + \ldots + \left[\frac{k+p-1}{p}\right]}_{= k + 1\ (k < p)} + \left[\frac{k+p}{p}\right] = k + \left[\frac{k+p}{p}\right] = k + \left[\frac{k}{p}\right] + 1$

Deci propoziția este adevărată.

9. Să se arate că, pentru $\forall n \in \mathbb{N}^*$, au loc afirmațiile:

a) Există și sunt unice $a_n, b_n \in \mathbb{N}$ astfel încât:
$$\left(2+\sqrt{3}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{3};$$
b) ${a_n}^2 - 3{b_n}^2 = 1;$
c) $\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right] =$ este număr impar.

Soluție

a) Demonstrăm prin inducție matematică:

$P_{(1)}$: există și sunt unice $a_1, b_1 \in \mathbb{N}$ a.î. $\left(2+\sqrt{3}\right)^1 = a_1 + b_1\sqrt{3}$ „A" $\Rightarrow a_1 = 2$ și $b_1 = 1$

Pp $P_{(k)}$: există și sunt unice $a_k, b_k \in \mathbb{N}$ a.î. $\left(2+\sqrt{3}\right)^k = a_k + b_k\sqrt{3}$ „A"

Dem $P_{(k+1)}$: există și sunt unice $a_{k+1}, b_{k+1} \in \mathbb{N}$ a.î. $\left(2+\sqrt{3}\right)^{k+1} = a_{k+1} + b_{k+1}\sqrt{3}$

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{k+1} = \left(2+\sqrt{3}\right)^k \cdot \left(2+\sqrt{3}\right) = \left(a_k + b_k\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)$$
$$= (2a_k + 3b_k) + (2b_k + a_k)\sqrt{3}$$

$$\left.\begin{aligned} a_{k+1} &= 2a_k + 3b_k \in \mathbb{N} \\ b_k &= a_k + 2b_k \in \mathbb{N} \end{aligned}\right\} pt\ a_k, b_k \in \mathbb{N}$$

Cum a_k și b_k sunt unice $\Rightarrow a_{k+1}, b_{k+1}$ sunt unice

b) ${a_n}^2 - 3{b_n}^2 = \left(a_n + \sqrt{3}b_n\right)\left(a_n - \sqrt{3}b_n\right) = \left(2+\sqrt{3}\right)^n\left(2-\sqrt{3}\right)^n = 1$

c) $\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n = 2a_n \Rightarrow \left[\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right] = \left[2a_n - \left(2-\sqrt{3}\right)^n\right]$
$= 2a_n + \left[-\left(2-\sqrt{3}\right)^n\right] = 2a_n + \left[-\frac{1}{\left(2+\sqrt{3}\right)^n}\right] = 2a_n - 1$ (impar).

10. a) Calculați $\left[\sqrt{n^2+k}\right]$, unde $n \in \mathbb{N}$ și $k \in [0; 2n)$

b) Demonstrați că:
$$\left[\sqrt{1}\right] + \left[\sqrt{2}\right] + \cdots + \left[\sqrt{n^2-1}\right] = \frac{n(n-1)(4n+1)}{6} \text{ pentru } \forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}.$$

Soluție

a) $\left[\sqrt{n^2+k}\right] = n$ pentru că $n \leq \sqrt{n^2+k} < n+1 \Leftrightarrow n^2 \leq n^2 + k < n^2 + 2n + 1$
$\Leftrightarrow 0 \leq k < 2n+1$ „A" $\forall k \in [0; 2n)$

b) $\left[\sqrt{1}\right] = \left[\sqrt{3}\right] = \left[\sqrt{3}\right] = 1$
$$\left[\sqrt{4}\right] = \left[\sqrt{5}\right] = \cdots = \left[\sqrt{8}\right] = 2$$
$$\left[\sqrt{9}\right] = \left[\sqrt{10}\right] = \cdots = \left[\sqrt{15}\right] = 3$$
....
$$\left[\sqrt{n^2-2n+1}\right] = \left[\sqrt{n^2-2n}\right] = \cdots = \left[\sqrt{n^2-1}\right] = n-1$$
$$\Rightarrow 1\cdot 3 + 2\cdot 5 + 3\cdot 7 + \cdots + (n-1)(2n-1) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n-1} k(2k+1) = \sum_{k=1}^{n-1}(2k^2+k) = 2\sum_{1}^{n-1} k^2 + \sum_{1}^{n-1} k =$$
$$= 2\,\frac{(n-1)n\cdot(2n-1)}{6} + \frac{(n-1)n}{2} =$$
$$= \frac{n(n-1)\cdot(4n-2+3)}{6} = \frac{n(n-1)\cdot(4n+1)}{6}$$

11. Fie șirul $(x_n)_{n\geq 1}$, cu $x_1 = \frac{3}{2}$ și $x_{n+1} = {x_n}^2 - 2x_n + 2, \forall n \geq 1$

a) Demonstrați că $x_n = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n-1}}$; $\forall n \geq 1$

b) Calculați $[x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_{2023}]$

Soluție

a) Demonstrăm propoziția prin inducție matematică:

$P_{(1)}: x_1 = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2^0}$ „A"

Observăm că $x_{n+1} = (x_n - 1)^2 + 1 \quad \forall n \geq 1$

Pp $P_{(k)}: x_k = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{k-1}}$ „A"

Demonstrăm $P_{(k+1)}: x_{k+1} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2^k}$

Avem $x_{k+1} = (x_k - 1)^2 + 1 = \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{k-1}} - 1\right]^2 + 1 = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{k-1}}\right]^2 + 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^k} + 1$

$\Rightarrow$ ceea ce era de demonstrat;

b) $a = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_{2018}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}a = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^4\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{2022}}\right) =$$

$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{2023}} \Rightarrow a \in (1; 2)$ pentru că $a \geq 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{2023}-1} \Rightarrow [a] = 1.$

12. a) Arătați că $[\sqrt{x}] = \left[\sqrt{[x]}\right]$; $\forall x \in [0; \infty)$

b) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: $\left[\frac{1}{1-\{x\}}\right] = \frac{x}{3\{x\}}$.

Soluție

a) Dacă $[\sqrt{x}] = k, \quad k \in \mathbb{N} \quad x \in [0; \infty)$

$\Rightarrow k \leq \sqrt{x} < k + 1 \Rightarrow k^2 \leq x < (k+1)^2$

$\Rightarrow k^2 = [k^2] \leq [x] < x < (k+1)^2$

$\Rightarrow k \leq \sqrt{[x]} < k + 1 \Rightarrow \left[\sqrt{[x]}\right] = k = [\sqrt{x}]$

b) $\{x\} \in [0; 1) \Rightarrow \frac{1}{1-\{x\}} \geq 1$;

$\left[\frac{1}{1-\{x\}}\right] = \frac{x}{3\{x\}} = k, \quad k \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow 3\{x\}k = [x] + \{x\}$

$\{x\}(x) = [x] \Rightarrow \{x\} = \frac{[x]}{3k-1} \in [0; 1)$

$\Rightarrow \{x\} \in \{1,2,3, \ldots, 3k-2\}$

$\Rightarrow k \leq \frac{1}{1-\{x\}} < k + 1$

$k - k\{x\} \leq k + 1 - k\{x\} - \{x\}$

$\Rightarrow k - 1 \leq k\{x\} \Rightarrow \{x\} \geq 1 - \frac{1}{k}$ și $0 < k - \{x\}(k+1) \Rightarrow \{x\} < 1 - \frac{1}{k+1}$

Așadar avem

$1 - \frac{1}{k} \leq \{x\} < 1 - \frac{1}{k+1} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{k} \leq \frac{[x]}{3k-1} < 1 - \frac{1}{k+1}$

$$\Rightarrow 3k-4+\frac{1}{k}\le [x]<3k-4+\frac{4}{k+1}$$
$$\Rightarrow 3k-3\le [x]<3k-4+\frac{4}{k+1}$$
$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} 1<\dfrac{4}{k+1} \\ k\in\mathbb{Z}\end{matrix}\right\}\Rightarrow k\in\{1,2\}$$

Pentru $k=1\Rightarrow 0\le [x]<1\Rightarrow [x]=0$

Pentru $k=2\Rightarrow 3\le [x]<2+\frac{4}{3}\Rightarrow [x]=3\Rightarrow \{x\}=\frac{3}{5}\Rightarrow x=3+\frac{3}{5}=\frac{18}{5}$.

13. Fie ecuația $2023x=[x]\cdot\{x\};\ x\in\mathbb{R}$

a) Arătați că dacă $x_0\in\mathbb{R}$ este soluție a ecuației, atunci $x_0\le 0$;

b) Rezolvați ecuația.

Soluție

a) Pp $x_0>0\Rightarrow 2023x_0=[x_0]\cdot\{x_0\}\le [x_0]\le x_0\Rightarrow x_0\le 0$, contradicție.

b) Ecuația devine: $2023([x]+\{x\})=[x]\cdot\{x\}$

$$\{x\}=\frac{2023[x]}{[x]-2023};\text{unde } x\notin[2023;2023)\Rightarrow 0\le\frac{2023[x]}{[x]-2023}<1$$
$$\Rightarrow [x]\in\left(-\frac{2023}{2022};0\right]\cap\mathbb{Z}\Rightarrow [x]\in\{-1;0\}$$

Pentru $[x]=-1\Rightarrow \{x\}=\frac{-2023}{-1-2023}=\frac{2023}{2023}\Rightarrow x=-\frac{1}{2024}$

Pentru $[x]=0\Rightarrow \{x\}=0\Rightarrow x=0$

În concluzie $x\in\left\{-\frac{1}{2024};0\right\}$.

14. Fie $n\in\mathbb{N}^*$ fixat. Rezolvați ecuația:

$$\left\{x+\frac{1}{2n}\right\}+\left\{x+\frac{3}{2n}\right\}+\left\{x+\frac{5}{2n}\right\}+\dots+\left\{x+\frac{2n-1}{2n}\right\}=\frac{n(2x-1)}{2}$$

Soluție

$$\{a\}=a-[a]\Rightarrow\left[x+\frac{1}{2n}\right]+\left[x+\frac{3}{2n}\right]+\left[x+\frac{5}{2n}\right]+\dots+\left[x+\frac{2n-1}{2n}\right]=$$
$$=x+\frac{1}{2n}+x+\frac{3}{2n}+\dots+x+\frac{2n-1}{2n}-\frac{n(2x-1)}{2}$$
$$\Rightarrow\left[x+\frac{1}{2n}\right]+\left[x+\frac{3}{2n}\right]+\dots+\left[x+\frac{2n-1}{2n}\right]=nx+\frac{1+3+5+..+2n-1}{2n}-\frac{2nx}{2}+\frac{4}{2}$$
$$\Rightarrow\left[x+\frac{1}{2n}\right]+\left[x+\frac{3}{2n}\right]+\dots+\left[x+\frac{2n-1}{2n}\right]=n$$
$$\Rightarrow\sum_{k=0}^{2n-1}\left(\left[x+\frac{k}{2n}\right]-\left[x+\frac{k}{n}\right]\right)=n\xRightarrow{I.Hermite}[2nx]-[nx]=n\xRightarrow{I.H}\left[nx+\frac{1}{2}\right]=n$$
$$\Rightarrow n\le nx+\frac{1}{2}<n+1$$
$$\left.\begin{matrix} n-\frac{1}{2}\le nx\Rightarrow x\ge 1-\dfrac{1}{2n} \\ nx<n+\frac{1}{2}\Rightarrow x<1+\dfrac{1}{2n}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\ x\in\left[1-\frac{1}{2n};1+\frac{1}{2n}\right)$$

15. Rezolvați ecuația: $\left[\left|\frac{4x-1}{4}\right|\right]+\left[\left|\frac{4x+1}{4}\right|\right]=\frac{2x+3}{2}$.

Soluție

$\left|\frac{4x-1}{4}\right|\geq 0\Rightarrow\left[\left|\frac{4x-1}{4}\right|\right]\in\mathbb{N}$ și $\left[\left|\frac{4x+1}{4}\right|\right]\in\mathbb{N}\Rightarrow\frac{2x+3}{2}\in\mathbb{N}$

Fie $n=\frac{2x+3}{2}\in\mathbb{N}\Rightarrow x=\frac{2n-3}{2}$

Ecuația devine: $\left[\left|\frac{4n-7}{4}\right|\right]+\left[\left|\frac{4n-5}{4}\right|\right]=n\Leftrightarrow\left[\left|n-\frac{7}{4}\right|\right]+\left[\left|n-\frac{5}{4}\right|\right]=n$

I. Dacă $n<\frac{5}{4}\Rightarrow n\in\{0,1\}$

Pentru $n=0\Rightarrow\left[\frac{7}{4}\right]+\left|\left[-\frac{5}{4}\right]\right|=0$ Fals

Pentru $n=1\Rightarrow\left[\left|-\frac{3}{4}\right|\right]+\left|\left[-\frac{51}{4}\right]\right|=1$ Adevărat $\Rightarrow x_1=-\frac{1}{2}$

II. Dacă $\frac{5}{4}\leq n<\frac{7}{4}, n\in\mathbb{N}\Rightarrow n\in\emptyset$

III. Dacă $n>\frac{7}{4}\Rightarrow\left[n-\frac{7}{4}\right]+\left[n-\frac{5}{4}\right]=n\Rightarrow n-2+n-2=n\Rightarrow n=4\Rightarrow x_2=\frac{5}{2}$

Deci $x\in\left\{-\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right\}$.

16. Fie șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, definit astfel: $a_1=1$ și $a_{n+1}=\left[\frac{a_n}{2}\right]+1012$

a) Arătați că $a_n<2024, \forall n\in\mathbb{N}^*$;

b) Determinați a_{131}.

Soluție

a) Demonstrăm prin inducție matematică:

$P_{(n)}: a_n<2024; \forall n\in\mathbb{N}^*$

$P_{(1)}: a_1=1<2024$ „A"

Pp $P_{(k)}: a_k=\left[\frac{a_{k-1}}{2}\right]+1012<2024$ „A"

Demonstrăm $P_{(k+1)}: a_{k+1}=\left[\frac{a_k}{2}\right]+1012<2024$

$$a_{k+1}=\left[\frac{a_k}{2}\right]+1012\leq\frac{a_k}{2}+1012<\frac{2024}{2}+1012=2024$$

$\Rightarrow a_{k+1}<2024\Rightarrow a_n<2024; \forall n\in\mathbb{N}^*$

b) Dacă avem $a_n<2024$ și $a_n\in\mathbb{N}\Rightarrow a_n\in\{0,1,2,3,\ldots,2023\}$

$$a_{n+1}=\left[\frac{a_n}{2}\right]+1012=\left[\frac{a_n+2024}{2}\right]\geq\left[\frac{a_n+a_n}{2}\right]=a_n$$

$\Rightarrow(a_n)_{n\geq 1}$ șir descrescător și mărginit de numere naturale

Caz 1: Dacă $a_n=2023\Rightarrow a_{n+1}=2023$

Caz 2: Dacă $a_n\leq 2022\Rightarrow a_{n+1}=\left[\frac{a_n+2024}{2}\right]\geq\left[\frac{2a_n+2}{2}\right]$

$\Rightarrow a_{n+1}\geq a_n+1\Rightarrow a_n\geq a_p+n-p, \forall n\geq p;\ n,p\in\mathbb{N}$ (1)

Deoarece $a_2=1012, a_3=1518, a_4=1771, a_5=1897$ dacă pp. că $a_{131}\leq 2022\overset{(1)}{\Rightarrow}a_{131}\geq a_5+131-5\Rightarrow a_{131}\geq 1897+126\Rightarrow a_{131}\geq 2023$, contradicție.

Deci $a_{131}=2023$.

17. Determinați mulțimea: $A=\left\{\left\{\frac{p^2-1}{24}\right\}\ /\ p=nr.prim\right\}$.

Soluție

$p = 2 \Rightarrow \left\{\frac{4-1}{24}\right\} = \frac{1}{8}$

$p = 3 \Rightarrow \left\{\frac{8}{24}\right\} = \frac{1}{3}$

$p = 5 \Rightarrow \left\{\frac{25-1}{24}\right\} = 0$

$p = 7 \Rightarrow \left\{\frac{49-1}{24}\right\} = 0$

Vom demonstra că pentru $\forall p \geq 5$, prim avem $\frac{p^2-1}{24} \in \mathbb{N}$

$p = nr.\ prim,\ p$ poate fi de forma $3k+1$ sau $3k+2 \Rightarrow p-1$ sau $p+1$ se divide cu 3 (1)

Cum $p \geq 5$ și $p = n$ prim $\Rightarrow p-1$ și $p+1$ sunt două numere pare consecutive de unde $\Rightarrow (p^2-1) \vdots 8$ (2)

Știm că $(3;8) = 1 \xrightarrow{(1)(2)} (p^2-1) \vdots 24, \forall p \geq 5\ prim$

$\Rightarrow \left\{\frac{p^2-1}{24}\right\} = 0, \quad \forall n \geq 5, prim \quad \Rightarrow A = \left\{0; \frac{1}{8}; \frac{1}{3}\right\}$.

BIBLIOGRAFIE

[1]Matsuoka, Y. (1964). On a proof of Hermite's identity, Amer. Math. Monthly,

[2]www.viitoriiolimpici.ro – material realizat de Lucian Dragomir pentru elevii clasei a VIII-a

[3]Colecția Gazeta Matematică

[4]www.olimpiade.ro

[5]Chirciu, M., Dinulescu,I., Văcaru,D., Ulmeanu, S., Alexe, S. (2007). Olimpiade și concursuri școlare clasele IX-XII, Ed. Tiparg

METODE DE ACTIVIZARE A ELEVILOR LA ORELE DE MATEMATICĂ

Lavinia SABĂU

Colegiul Național „Iosif Vulcan“ Oradea, profesor pentru învățământul primar,
lavinia74.sabau@gmail.com

Rezumat: *Cunoaşterea şi folosirea metodelor didactice în diversitatea lor, ca instrumente importante aflate la dispoziţia profesorului, corelarea acestora cu particularităţile elevilor cu care lucrează, precum şi cu obiectivele care trebuie să le atingă, contribuie la eficientizarea procesului instructiv – educativ, facilitează antrenarea permanentă a elevilor la un efort intelectual susţinut şi înarmarea acestora cu capacităţi necesare unei activităţi de învăţare productivă.*

Cuvinte cheie: metode active, stimularea creativității

În munca la clasă folosim pe lângă **metodele tradiţionale** orientate în direcţia participării cât mai active a elevilor la propria formare şi **metodele active** care dezvoltă gândirea, capacitatea de investigare a elevilor, presupune participarea lor la dobândirea cunoştinţelor, munca lor independentă, deprinderea de a învăţa sistematic şi de a aplica în practică cele însuşite.

Referindu-se la noţiunea de **metode active**, **Ioan Cerghit** precizează: *Conştient de natura sarcinilor ce-i revin, învăţătorul nostru dă prioritate metodelor de mare valoare formativ – educativă, celor care contribuie în cea mai mare măsură la sporirea funcţiilor educative ale procesului de învăţământ. În acest sens sunt formative acele metode care reuşesc să cultive întregul potenţial individual, care caută să respecte condiţiile dezvoltării fiecărui individ, în direcţia capacităţilor şi structurii lui mintale*[3].

Metodele active satisfac cerinţele unui învăţământ de calitate, cultivă dinamismul, aptitudinea pentru schimbare, capacitatea de găsire a noului, de inovare şi de invenţie.

Ca **modalităţi de stimulare a creativităţii**, am folosit:

- problematizarea;
- descoperirea;
- munca independentă, diferenţiată;
- algoritmizarea;
- jocurile didactice.

Prin **problematizare** am cerut elevilor rezolvarea unor „întrebări – probleme” sau „situaţii – probleme” care conţineau dificultăţi pe care le-am creat în diferite momente ale lecţiei. Dificultatea declanşa curiozitatea elevului, interesul de cunoaştere şi-i mobiliza toate capacităţile intelectuale în vederea găsirii răspunsului sau soluţiei cerute, înţeleasă ca organizarea unor situaţii

– problemă care solicită utilizarea, restructurarea unor cunoştinţe anterioare, punând la contribuţie întreaga experienţă şi pricepere a lor, determinând o atitudine pozitivă, activă, solicitând gândirea creatoare.

Aplicând **învăţarea prin descoperire**, elevii au stabilit, prin efort propriu, căile prin care au ajuns la achiziţionarea unor cunoştinţe. Descoperirea reprezintă o continuare şi o întregire a problematizării constând în desfăşurarea propriu – zisă a activităţii de soluţionare a problemei. Ea angajează mai mult şi solicită capacitatea de gândire. Ceea ce descoperă elevul singur, prin efort propriu este însuşit mai trainic, este o achiziţie mai durabilă, duce la formarea deprinderilor de investigaţie, dezvoltându-i curiozitatea, perseverenţa, gândirea productivă.

În rezolvarea de probleme am folosit cu succes **schema logică** ca instrument ajutător

[3] Ioan Cerghit, *Metode de învăţământ*, 2006, pag.122,

în înţelegerea şi stabilirea relaţiilor dintre mărimi. După stabilirea planului de rezolvare prin metoda clasică, s-a transpuns întreaga rezolvare a problemei în **formulă numerică şi literală**.

Munca independentă, susţinută, organizată pe tot parcursul anului şcolar şi în cadrul fiecărei lecţii, verificarea şi aprecierea ei, relevarea dificultăţilor şi a greşelilor făcute de elevi şi înlăturarea lor, a constituit un mijloc eficient de formare a priceperilor şi deprinderilor de a judeca şi rezolva probleme, de stimulare a interesului pentru matematică şi mai ales pentru rezolvări de probleme.

În **activitatea independentă** am folosit tratarea diferenţiată a elevilor pentru a asigura stimularea dezvoltării capacităţilor intelectuale până la nivelul maxim al disponibilităţilor pe care le are fiecare.

Încorporarea în activitatea didactică, elementul **joc** imprimă acesteia un caracter mai viu şi mai atrăgător, aduce varietate şi stare de bună dispoziţie, chiar stimulează creativitatea elevilor. Conţinutul matematic al jocului didactic trebuie să fie accesibil, recreativ, atractiv.

Prin folosirea **jocurilor didactice** în predarea matematicii la clasele mici se realizează şi importante sarcini formative ale procesului de învăţământ. Astfel jocurile didactice matematice:
- antrenează operaţiile gândirii: analiza, sinteza, comparaţia,clasificarea, ordonarea, abstractizarea, generalizarea, concretizarea;
- dezvoltă spiritul de iniţiativă şi independenţa în muncă, precum şi spiritul de echipă;
- dezvoltă spiritul imaginativ - creator şi de observaţie;
- dezvoltă atenţia, disciplina şi spiritul de ordine în desfăşurarea unei activităţi;
- formează deprinderi de lucru corect şi rapid;
- asigură însuşirea mai rapidă, mai temeinică, mai accesibilă şi mai plăcută a unor cunoştinţe relativ aride pentru această vârstă.

Reuşita jocului didactic este condiţionată de proiectarea, organizarea şi desfăşurarea lui metodică, de modul în care învăţătorul ştie să asigure o concordanţă deplină în toate elementele ce-l definesc.

Prin folosirea în permanenţă a metodelor participativ – active, a tehnicilor didactice care ţin seama de particularităţile de vârstă ale elevilor, care angajează efortul propriu de gândire al elevilor în procesul învăţării, se realizează ore dense, plăcute, care contribuie la dezvoltarea creativităţii elevilor.

Aproape toate activităţile desfăşurate în cadrul orei de matematică sunt de natură creativă şi ele stau la îndemâna oricărui învăţător. Pentru a realiza într-adevăr un învăţământ matematic activ, este necesară o temeinică pregătire a învăţătorului.

Gândirea este o trăsătură distinctivă a fiinţei umane şi care se realizează în diferite moduri. Unul dintre acestea este gândirea logică, cu semnificaţie mai degrabă pozitivă.

Gândirea logică este un proces complex ce începe cu asimilarea de cunoştinţe, cu dobândirea unor operaţii şi procedee mintale de procesare a informaţiilor, continuă cu formarea unor credinţe şi convingeri care fundamentează adoptarea unor decizii şi se finalizează prin manifestarea unor comportamente adaptative adecvate şi eficiente.

Rezolvarea şi compunerea de probleme cu scop de a stimula gândirea logică presupune respectarea unor condiţii:
- crearea unor situaţii de învăţare pentru a se exersa procesul gândirii logice;
- încurajarea capacităţii de reflectare, a independenţei în gândire;
- acceptarea diversităţii de opinii şi de idei;
- implicarea activă a elevilor în realizarea unei învăţări prin colaborare şi cooperare;
- încurajarea elevilor de a-şi exprima ideile fără riscul de a fi ridiculizaţi.
- încrederea în capacitatea fiecărui elev de a gândi în mod critic chiar;
- aprecierea pozitivă a ideilor fiecărui elev;

Dezvoltarea gândirii logice constituie un important obiectiv de tip formativ şi se realizează prin folosirea cu precădere a unor strategii activ - participative. Aceste strategii nu trebuie rupte de cele tradiţionale, ele marchează un nivel superior în spirala modernizării strategiilor didactice. Prin metode activ - participative înţelegem toate situaţiile şi nu numai metodele active propriu - zise în care elevii sunt puşi şi care-i scot pe aceştia din ipostaza unui obiectiv al formării şi-i transformă în subiecţi activi, coparticipanţi la propria formare.

"A activiza înseamnă, deci a mobiliza/a angaja intens toate forţele psihice de cunoaştere a elevului pentru a obţine în procesul didactic performanţe maxime, însoţite constant de efecte instructiv - educative, optimale în toate componentele personalităţii".

În spatele fiecărei metode de învăţare există ascunsă o ipoteză în ceea ce priveşte mecanismul de învăţare al elevului. Noi, dascăliiii trebuie să fim preocupaţi de găsirea unor metode şi procedee variate, adaptate diferitelor situaţii de instruire în care elevii vor fi puşi. Pe baza competenţelor sale profesionale mereu actualizate, dascălul încearca noi metode de învăţare. Este loc în acest domeniu pentru manifestarea imaginaţiei şi creativităţii didactice, cu efecte pozitive nu numai asupra elevilor, ci şi asupra dascălului.

Activizarea predării - învăţării presupune folosirea unor metode, tehnici şi procedee care să-l implice pe elev în procesul de învăţare, urmărindu-se dezvoltarea gândirii, cultivarea creativităţii, dezvoltarea interesului pentru învăţare, în sensul formării lui ca participant activ la procesul de educare. Astfel, elevul este ajutat să înţeleagă lumea în care trăieşte şi să aplice în diferite situaţii de viaţă ceea ce a învăţat.

Opţiunea pentru o metodă sau alta este în strânsă relaţie cu personalitatea profesorului şi gradul de pregătire al acestuia, predispoziţie şi stilurile de învăţare ale grupului cu care se lucrează. Din această perspectivă, metodele pentru o învăţare activă se clasifică în:

I. Metode care favorizează înţelegerea conceptelor şi ideilor, valorifică experienţa proprie a elevilor, dezvoltă competenţe de comunicare şi relaţionare, de deliberare pe plan mintal şi vizează formarea unei atitudini active: discuţia, dezbaterea, jocul de rol, etc.

II. Metode care stimulează gândirea şi creativitatea, îi determină pe elevi să caute şi să dezvolte soluţii pentru diferite probleme, să facă reflecţii critice şi judecăţi de valoare, să compare şi să analizeze situaţii date: studiul de caz, rezolvarea de probleme, jocul didactic, exerciţiul, etc.

III. Metodele prin care elevii sunt invitaţi să lucreze productiv cu alţii şi să-şi dezvolte abilităţi de colaborare şi ajutor reciproc: mozaicul, ciorchinele, cafeneaua, proiectul în grupuri mici, etc.

Strategia didactică specifică învăţării matematicii la ciclul primar presupune adaptarea acestor metode la specificul vârstei copiilor şi la specificul disciplinei.

Voi prezenta câteva dintre cele mai folosite metode în activitatea mea didactică, considerate mai eficiente în procesul învăţării matematicii şi în concordanţă cu actuala viziune pedagogică.

Cubul

Cubul este o metodă de explorare din diferite perspective cognitive a unei situaţii de învăţare. Etapele pentru organizarea unor activităţi utilizând metoda cubului, sunt:
- alegerea unităţii de învăţare şi activităţii de învăţare;
- pregătirea materialului didactic: confecţionarea unui cub pe ale cărui feţe s-au notat 6 dintre deprinderile care trebuie exersate: descrie, compară, analizează, asociază, aplică, argumentează;
- organizarea colectivului de elevi;
- valorificarea sarcinilor de lucru în grup: sarcina finalizată este prezentată de reprezentantul fiecărui grup, întregului colectiv de elevi;

Voi exemplifica cu o activitate la clasa a II-a, la geometrie:

Tema: Figuri şi corpuri geometrice
Organizarea colectivului de elevi: 6 grupe de lucru
Fiecare grup are ca sarcină să studieze un set de figuri şi corpuri geometrice din perspectiva cerinţei înscrisă pe una din feţele cubului.
*__Descrie__: culorile, formele, mărimile, etc. Sarcina solicită descrierea unor proprietăţi ale figurilor şi ale corpurilor geometrice referitoare la feţe, laturi, vârfuri sau unghiuri.
* **Compară:** prin ce se aseamănă? Prin ce se deosebesc? Sarcina solicită compararea a două dintre figuri sau corpuri geometrice.
* **Asociază:** Observă şi identifică asemănări şi deosebiri între figuri sau corpuri şi obiectele din mediul înconjurător.
* **Analizează**: care figuri geometrice sau corpuri au proprietăţi asemănătoare? Sarcina solicită identificarea unor proprietăţi caracteristice: număr de laturi, unghiuri, forma feţei corpurilor geometrice, etc.
* **Aplică**: Ce poţi face cu el? Cum poate fi el folosit? Sarcina solicită utilizarea corpurilor sau a figurilor geometrice în scop practic
* **Argumentează**: Ce se întâmplă dacă…? Sarcina solicită realizarea unui demers de rezolvare a unei probleme şi argumentare a soluţiei

Metoda cubului poate fi eficient aplicată în etapa de familiarizare sau de aprofundare şi exersare în cadrul metodologiei de învăţare la clasele a III-a, a IV-a.

<u>Ştiu(Vreau să ştiu/ Am învăţat)</u>

Cercetările în domeniu au arătat că învăţarea este eficientă atunci când se bazează pe învăţare conştientă şi valorifică experienţele anterioare ale elevilor în procesul de dobândire de noi cunoştinţe. Prin această metodă se realizează un inventar a ceea ce elevii ştiu deja despre o temă şi apoi se formulează întrebări la care se aşteaptă găsirea unor răspunsuri prin valorificarea cunoştinţelor anterioare.
Etapele metodei:

- Colectivul clasei se organizează în perechi şi fiecare pereche primeşte ca sarcină realizarea
  unei liste cu tot ce ştiu sau cred că ştiu despre o anume temă. În timp ce elevii realizează lista, învăţătorul desenează pe tablă un tabel:

Ştiu	Vreau să ştiu	Am învăţat
Elevii notează ceea ce ştiu sau cred că ştiu despre tema dată	Elevii notează ceea ce doresc să afle nou în legătură cu acea temă	Elevii notează ceea ce au învăţat despre tema nouă

- Fiecare pereche va prezenta tabelul său şi se vor nota în coloana din stânga in- formaţiile cu care toată clasa este de acord.
- Elevii vor identifica întrebările pe care ei le au despre subiectul abordat , iar învăţătorul le va lista în a doua coloană a tabelului. Aceste întrebări vor evidenţia nevoile de învăţare ale elevilor în legătură cu tema dată lor.
- Elevii citesc o nouă temă din manual. După lecturarea textului se revine asupra întrebărilor formulate în a doua cloană şi se analizează la care dintre întrebări s-a găsit răspunsul în text. Răspunsurile vor fi notate în a treia coloană.
- Elevii vor face comparaţie între ceea ce ei ştiau deja despre tema abordată, tipul şi conţinutul întrebărilor pe care le-au formulat şi ceea ce ei au învăţat.
- Elevii compară ceea ce cunoşteau deja(coloana Ştiu) cu ceea ce ei au învăţat(coloana Am învăţat). Unele din întrebările lor s-ar putea să rămână fără răspuns sau vor apărea întrebări noi. În acest caz întrebările po fi folosite ca punct de plecare pentru investigaţii personale.
- Informaţia cuprinsă în coloana a treia poate fi structurată ca şi conţinut noţional al temei noi.

Această metodă poate fi aplicată la clasele a III-a şi a IV-a în cadrul oricărei unităţi de învăţare. La rezolvarea de probleme poate simplifica parcursul spre rezultat ilustrând sistematic rezolvarea.

Pentru a rezolva problema:

Într-un depozit sunt 9 t de zahăr, de 8 ori mai multe t de griş, iar făină cât zahăr şi griş la un loc.

Câte tone de produse sunt în depozit?

În prima coloană se vor scrie datele, în a doua planul de rezolvare cu întrebări iar în a treia, rezolvarea.

Ştiu	Vreau să ştiu	Am învăţat
Zahăr 9 t Griş de 8 ori mai mult decât zahăr <u>Făină zahăr + griş</u> Câte tone de produse în total	1.Câte tone de griş sunt? 2.Câte tone de făină sunt ? 3.Câte tone de produse sunt ?	9x8=72 3+72=81 9+72+81=162 R: 162 t.

Aceeaşi problemă poate fi pusă unei prelucrări creative, inventive, pe mai multe planuri,într-o prezentare organizată, folosind <u>**metoda cadranelor**</u>. Aceasta presupune următoarele etape:

- propunerea problemei ce urmează a fi rezolvată;
- desenarea pe tablă a celor patru cadrane;
- împărţirea clasei în grupe de câte patru elevi;
- anunţarea temei fiecărui cadran;
- discuţii lămuritoare;
- activitatea pe grupe;
- prezentarea în faţa clasei de către reprezentantul fiecărei grupe a rezolvării sarcinilor de lucru.
- În cele patru cadrane vor fi trecute, în ordine, patru sarcini:

I**. Datele problemei** Zahăr 9 t Griş de 8 ori mai mult decât zahăr Făină - zahăr + gris	II. **Planul de rezolvare** 1.Câte t de griş? 9x8=72 2.Câte t de făină? 9+72=81 3.Câte t în total? 9+72+81=162
III **Scrierea rezolvării sub formă de exerciţiu** 9+(9x8)+(9+9x8)=9+72+81=162	IV. **Alcătuirea unei noi probleme pe baza exerciţiului din cadranul III**. *

* Într-o livadă s-au plantat 9 nuci, meri de 8 ori mai mult decât nuci şi pruni cât nuci şi meri la un loc. Câţi pomi s-au plantat în livadă?

Conform etapelor prezentate, elevii vor lucra, punându-şi la contribuţie atât gândirea cât şi inventivitatea. La clasa a IV-a, acest mod de abordare a rezolvării problemelor, lărgeşte orizontul cunoaşterii şi pregăteşte elevii pentru activitatea ciclului următor.

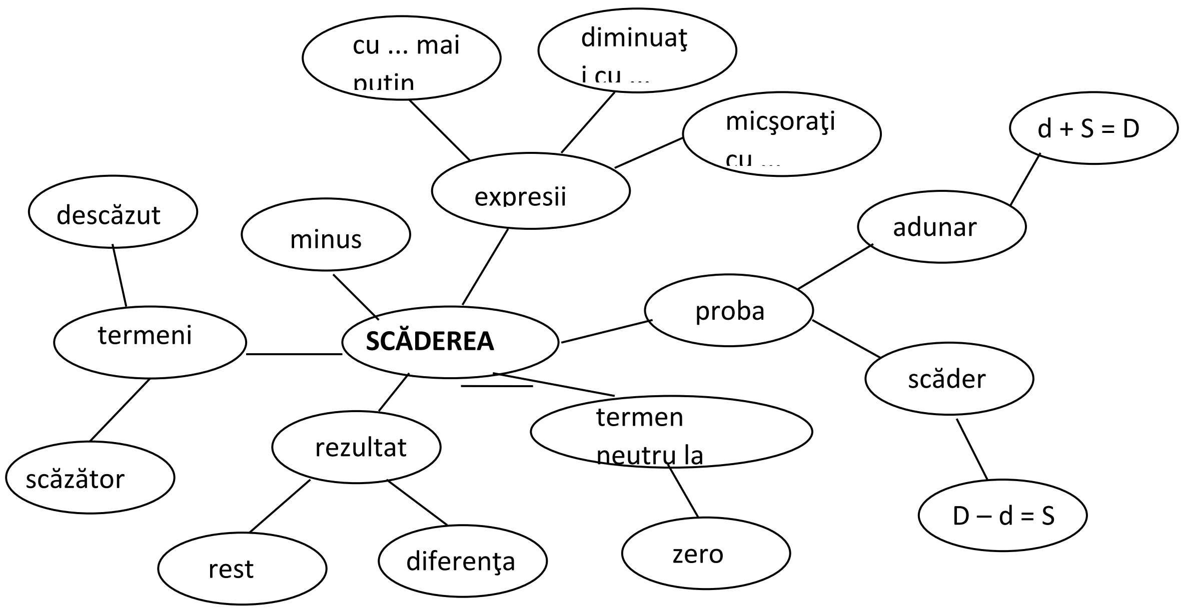
<u>**Ciorchinele**</u>

Este o metodă de brainstorming neliniară care stimulează găsirea de conexiuni între idei.

Etape:
- Se scrie un cuvânt, temă, în mijlocul tablei/ foii;
- Se notează în jurul acestuia toate ideile, sintagmele sau cunoştinţele care vin în minte în legătură cu tema respectivă, trăgându-se linii între acestea şi cuvântul iniţial.
- Pe măsură ce se scriu cuvintele, ideile noi, se trag linii între cele ce par a fi corecte.
- Activitatea se opreşte când se epuizează toate ideile, sintagmele sau cunoştinţele sau când s-a atins limita de timp acordată.

Etapele pot fi precedate de brainstorming în grupuri mici sau în perechi. În acest fel se îmbogăţesc şi se sintetizează cunoştinţele.

În activităţile matematice, această metodă se poate aplica cu eficienţă la recapitularea şi sintetizarea cunoştinţelor referitoare la fiecare dintre cele patru operaţii.
Exemplific cu recapitularea scăderii la clasa a IV-a.



Realizând ciorchinele, informaţiile teoretice însuşite referitor la operaţia de scădere vor sistematizate, clarificate şi pregătite pentru a fi aplicate în situaţii concrete.

<u>Mozaicul</u>

Este o metodă de învăţare prin colaborare şi învăţare prin " predarea" de către elevi colegilor lor. Ea cuprinde mai multe etape:
Etapa I. Se formează grupe de câte 4 elevi. Fiecare membru al grupei primeşte un număr de la 1 la 4 .
- Se distribuie fiecărui membru al grupei o fişă de lucru cu 4 sarcini structurate. Se discută cu toată clasa enunţul problemei, fără a da explicaţii referitoare la modul de rezolvare. Fiecare elev are o sarcină de studiu în care trebuie să devină expert.

Etapa II. Toţi elevii care au numărul 1 se adună într-un grup; cei cu numărul 2 în alt grup şi aşa mai departe. Grupurile formate din elevi cu numerele 1,2,3,4 se vor numi " experţi " şi sarcina lor este să rezolve corect cerinţa cu acelaşi număr din fişa de lucru. Fiecare grup trebuie să citească sarcina şi să discute între ei posibile soluţii. Apoi vor hotărî împreună modul în care pot preda colegilor, pentru că urmează să se întoarcă fiecare, în grupul său şi să explice colegilor modul de rezolvare.

Fiecare dintre membri grupului de experţi trebuie să înţeleagă că poartă o mare responsabilitate deoarece de explicaţiile sale depinde munca ulterioară a colegilor săi.
Etapa III.
După ce grupele de " experţi" şi-au încheiat lucrul, fiecare elev se întoarce la grupul său iniţial şi explică colegilor modul de rezolvare al sarcinii. Fiecare elev din grup trebuie să cunoască conţinutul tuturor cerinţelor problemei.

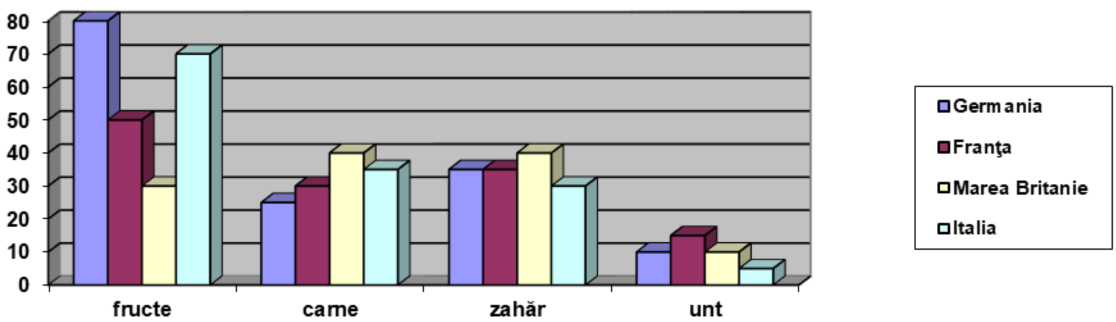
Elevii notează orice întrebări sau nelămuriri în legătură cu rezolvarea problemei şi cer apoi învăţătorului clarificări. Dacă neclarităţile persistă se vor adresa întrebările grupului de experţi pentru rezolvarea respectivelor cerinţe.

Învăţătorul cere elevilor să prezinte rezolvarea fiecăreia dintre sarcini pe fişa de lucru, aşa cum au înţeles-o "predată" de colegii lor. Pentru inversă a activităţii, se pot adresa elevilor întrebările de tip productiv.

În timpul învăţării prin colaborare învăţătorul monitorizează activitatea grupurilor pentru a fi sigur că informaţia se transmite corect, stimulează cooperarea, asigură implicarea şi participarea tuturor membrilor.

La clasa a IV-a, problemele care au datele sugerate de grafice, tabele diagrame,pot fi rezolvate folosind această metodă. Spre exemplu:

Diagrama următoare indică cantitatea de alimente de bază, consumate într-un an, de fiecare locuitor al uneia dintre cele patru ţări. Aflaţi cantitatea totală de alimente consumată anual de un locuitor în Germania Franţa, Marea Britanie şi Italia



a) Germania
b) Franţa
c) Marea Britanie
d) Italia
- Se discută cu toată clasa enunţul problemei fără a da explicaţii referitoare la modul de lectură a diagramei.
- Toţi cei care au numărul 1 vor primi prima sarcină: cantitatea de alimente consumată anual de un locuitor din Germania. Cei cu numărul 2 vor avea de altfel cantitatea de alimente consumată de un locuitor din Franţa, şi aşa mai departe.
- Toţi elevii se grupează în modul indicat şi în cadrul grupului de experţi, sarcina lor este să rezolve corect cerinţa care le revine. Fiecare trebuie să citească sarcina, să analizeze diagrama, să discute între ei posibile soluţii şi să hotărască asupra modului în care vor explica colegilor rezolvarea sarcinii.
- După ce grupele de experţi şi-au încheiat lucrul, fiecare elev se întoarce la grupul său iniţial şi explică colegilor săi modul de rezolvare.
- Elevii notează neclarităţile pe care le au în legătură cu rezolvarea problemei şi cer lămuriri învăţătorului.
- Elevii prezintă rezolvarea aşa cum au înţeles ei explicaţiile colegilor.

Pentru a evalua capacitatea elevilor de a citi în grafic şi a interpreta datele se vor formula întrebări lămuritoare: Locuitorul cărei ţări consumă într-un an cea mai mare cantitate de carne? Dar zahăr? Care este naţionalitatea celui de-al treilea consumator de fructe? Ce cantitate de carne şi unt consumă un francez într-un an? Am putea calcula cantitatea de carne consumată de toţi locuitorii Franţei într-un an? Cu ce condiţie?

Dacă timpul permite, întrebările pot fi rezolvate, punând elevii în situaţia de a desfăşura raţionamente în lanţ pentru a ajunge la soluţie.

În contextul modernizării învăţământului românesc profesorii ciclului primar sunt nevoiţi să găsească noi căi de prezentare a cunoştinţelor în tematici mai interesante, mai atrăgătoare şi mai antrenante şi să manifeste disponibilitate şi aplicarea noilor metode activizante. Scopul acelor metode este creşterea eficienţei orelor de matematică.

A pregăti copilul pentru o lume din ce în ce mai complexă înseamnă a-i oferi şansa de a se regăsi în această lume, iar educatorii au datoria de a le netezi calea spre a face faţă acestei lumi.

BIBLIOGRAFIE

[1] Alb Lupaş, A. (2013). Predarea matematicii în învăţământul primar. Aspecte metodice, Editura Universităţii din Oradea

[2] Cerghit I. (2006). Metode de învăţământ, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti

[3] Atanasiu G., Purcaru, M. A. P. (2002). Metodica predării matematicii la clasele I-IV, Editura Universităţii „Transilvania” din Braşov, Braşov

[4] Cîrjan, F. (2002). Didactica matematicii, Editura Corint, Bucureşti

[5] Dăncilă E., Dăncilă, I. (2002). Matematica pentru bunul învăţător, Editura Erc Press, Bucureşti

ALGEBRE UNIVERSALE LIBERE

Oana Nadia TANCHIŞ

Studentă anul III, Matematică, Facultatea de Informatică și Științe, Universitatea din Oradea,
oanatanchis@yahoo.com

Rezumat: *În această lucrare sunt prezentate câteva algebre universale libere, și anume: monoizii liberi, grupurile libere, modulele libere și grupurile abeliene libere.*
Cuvinte cheie: algebră universală, monoid liber, grup liber, modul liber.

Definiția 1. Fie A o mulțime și n un număr întreg nenegativ. O aplicație $\omega : A^n \longrightarrow A$ se numește operație n-ară pe A, iar n se numește tipul (aritatea) lui ω.
O aplicație $\omega : B \longrightarrow A$, unde $B \subseteq A^n$, se numește operație n-ară parțială pe A.
Exemple. a) O operație nulară ($n = 0$) pe A este o aplicație ω a mulțimii $A^0 = \{\emptyset\}$ în A. O astfel de aplicație este complet determinată de cunoașterea imaginii $\omega(\emptyset) \in A$ a singurului element $\emptyset$ al lui A^0. Deci, prin intermediul unei operații nulare punem în evidență anumite elemente din A. De multe ori, o operație nulară se identifică cu elementul din A pe care îl pune în evidență. De exemplu, 1 și 0 sunt operații nulare pe mulțimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale.
b) O operație unară ($n = 1$) pe A este o aplicație a lui A în A, iar o operație unară parțială în A este o aplicație a unei submulțimi a lui A în A. De exemplu, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ pentru care $f(x) = -x$ este o operație unară pe $\mathbb{R}$, iar $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ pentru care $g(x) = x^{-1}$ este o operație unară parțială pe $\mathbb{R}$.
c) O operație binară ($n = 2$) pe A este o aplicație a lui A^2 în A, iar o operație binară parțială pe A este o aplicație a unei submulțimi a lui A^2 în A. Pentru notarea operațiilor binare se folosesc adesea simboluri speciale ca $\cdot$ sau $+$. Adunarea și înmulțirea pe mulțimea $\mathbb{R}$ sunt operații binare, iar împărțirea este o operație binară parțială, deoarece este definită numai pentru perechile (a, b) cu $b \neq 0$.
Definiția 2. O pereche (A, Ω), unde A este o mulțime nevidă numită mulțime suport, iar Ω este o mulțime de operații pe A numită domeniul de operații al lui (A, Ω), se numește algebră universală sau Ω −algebră.
Definiția 3. Fie (A, Ω) o algebră universală. Aplicația $\tau : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$ care pentru fiecare operație $\omega \in \Omega$ asociază tipul $\tau(\omega)$ a lui ω, se numește tipul algebrei (A, Ω).
Exemple: a) Fie M o mulțime. Mulțimea $\mathcal{P}(M)$ a submulțimilor lui M formează o algebră universală în raport cu operațiile binare de reuniune și intersecție și cu operația unară de trecere la complement. Tipul algebrei $(\mathcal{P}(M), \cup, \cap, \complement)$ este
$$\tau = \begin{pmatrix} \cup & \cap & \complement \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
b) Fie $(M, \cdot)$ un monoid cu elementul neutru $1 \in M$. $(M, \cdot, 1)$ este o algebră universală. Tipul algebrei $(M, \cdot, 1)$ este
$$\tau = \begin{pmatrix} \cdot & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$
c) Fie $(G, \cdot)$ un grup cu elementul neutru $1 \in G$. $(G, \cdot, 1, ^{-1})$ este o algebră universală. Tipul algebrei $(G, \cdot, 1, ^{-1})$ este
$$\tau = \begin{pmatrix} \cdot & 1 & ^{-1} \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
d) Un inel $(R, +, \cdot)$ poate fi privit ca algebră universală $(R, +, 0, -, \cdot)$, tipul acesteia fiind:
$$\tau = \begin{pmatrix} + & 0 & - & \cdot \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

e) Fie R un inel și M un R −modul stâng. Pentru fiecare $\alpha \in R$, definim operația unară

$$\varphi_\alpha : R \to R,\ \varphi_\alpha(x) = \alpha x.$$

Astfel, $(M, +, 0, -, (\varphi_\alpha)_{\alpha\in R})$ este o algebră universală. Tipul algebrei $(M, +, 0, -, (\varphi_\alpha)_{\alpha\in R})$ este:

$$\tau = \begin{pmatrix} + & 0 & (\varphi_\alpha)_{\alpha\in R} \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definiția 4. Dacă (A, Ω) și (B, Ω) sunt două algebre universale de tipul τ, atunci o aplicație $f : A \to B$ este un morfism dacă pentru orice $\omega \in \Omega$ și pentru orice $(x_1, x_2, \dots, x_{\tau(\omega)}) \in A$ avem:

$$f(\omega(x_1, x_2, \dots, x_{\tau(\omega)})) = \omega\left(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_{\tau(\omega)})\right).$$

Definiția 5. Fie K o clasă de algebre universale de tipul τ și fie $F(X)$ o algebră de tipul τ care este generată de X. Dacă, pentru orice $A \in K$ și orice funcție $\alpha : X \to A$, există un morfism $\bar{\alpha} : F(X) \to A$ care extinde pe α (adică $\bar{\alpha}(x) = \alpha(x)$ pentru orice $x \in X$), atunci $F(X)$ se numește liber generat de X, iar X se numește sistem de generatori liberi.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & F(X) \arrow[dl, dashed, "\bar{\alpha}"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Figura 1

Monoidul liber

Definiția 6. Fie X o mulțime si $FM(X) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X^n$. Elementele lui $FM(X)$ se numesc cuvinte în alfabetul X, ele fiind n-tuple $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de elemente din X, $n \in \mathbb{N}$; pentru $n = 0$, X^0 este o mulțime cu un singur element și, acest unic cuvânt cu "zero litere", deși se numește de obicei cuvânt vid, noi îl vom nota cu 1. Pe mulțimea $FM(X)$ se definește legea de compoziție binară de juxtapunere, adică:

$$(x_1, x_2, \dots, x_m)(y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Evident, juxtapunerea cuvintelor este o lege de compoziție asociativă și are ca element neutru cuvântul vid 1. Prin urmare, $FM(X)$ este un monoid, numit monoidul liber generat de mulțimea X.

Pentru orice cuvânt $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ în alfabetul X, avem:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1)(x_2)\dots(x_n)$$

și, renunțând la paranteze pentru cuvintele cu o singură literă, putem scrie

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 x_2 \dots x_n.$$

Numărul n se numește lungimea lui x și se notează cu $l(x)$. Din definiția produsului rezultă

$$l(xy) = l(x) + l(y)$$

Vom nota cu $i_X : X \to FM(X)$, incluziunea canonică.

Acum, vom arăta că monoidul liber poate fi introdus și ca soluție a unei probleme "universale" în clasa monoizilor și morfismelor de monoizi.

Teorema 7. (Proprietatea de universalitate a monoidului liber)

Fie X o mulțime nevidă. Pentru orice monoid M și orice aplicație $f : X \to M$, există un unic morfism de monoizi $\bar{f} : FM(X) \to M$, astfel încât diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "i_X"] \arrow[dr, "f"'] & & FM(X) \arrow[dl, dashed, "\bar{f}"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Figura 2

să fie comutativă, adică $\bar{f} \circ i_X = f$.

Demonstrație: Dacă $\bar{f}: FM(X) \to M$ este un morfism de monoizi, cu proprietatea că $\bar{f} \circ i_X = f$, atunci:

$$\bar{f}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bar{f}\big((x_1)(x_2)\dots(x_n)\big) =$$
$$= \bar{f}(x_1)\bar{f}(x_2)\dots\bar{f}(x_n) = (\bar{f} \circ i_X)(x_1)(\bar{f} \circ i_X)(x_2)\dots(\bar{f} \circ i_X)(x_n) = f(x_1)f(x_2)\dots f(x_n).$$

Aceasta demonstrează afirmația de unicitate din enunț. Pentru a demonstra afirmația de existență, definim aplicația $\bar{f}: FM(X) \to M$, prin $\bar{f}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1)f(x_2)\dots f(x_n)$. Evident, $\bar{f}$ este morfism de monoizi și că $\bar{f} \circ i = f$.

Observația 8. a) Monoidul $FM(X)$ este generat de X.

b) Pentru orice $x \in FM(X)$, există un întreg $n \geq 0$, un $(x_1, \dots, x_n) \in X^n$ astfel ca $x_i \neq x_{i+1}$ $(i = 1, \dots, n-1)$ și un șir de întregi $\alpha_i > 0$ $(i = 1, \dots, n)$, astfel ca: $x = {x_1}^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot {x_n}^{\alpha_n}$.

Șirul $(x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ este unic determinat de condițiile de mai sus.

c) Dacă $|X| > 1$, atunci $FM(X)$ este un monoid infinit și necomutativ, iar dacă $|X| = 1$, atunci $FM(X)$ este izomorf cu $(\mathbb{N}, +)$.

Definiția 9. Un monoid M se numește liber, dacă există o mulțime X astfel ca monoidul $FM(X)$ să fie izomorf cu M. Dacă $f: FM(X) \to M$ este un izomorfism, atunci $f(X)$ se numește sistem de generatori liberi al lui M.

Grupul liber

Definiția 10. Grupul liber FG(X) pe mulțimea X constă din toate elementele de forma ${x_1}^{\alpha_1}{x_2}^{\alpha_2}\dots{x_n}^{\alpha_n}$, $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$, $x_i \neq x_{i+1}$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{Z}$, împreună cu operația de juxtapunere.

Propoziția 11. (Proprietatea de universalitate a grupului liber) Fie X o mulțime. Pentru orice grup G și orice aplicație $f: X \to G$, există un unic morfism de grupuri $\bar{f}: FG(X) \to G$, astfel ca $\bar{f} \circ i = f$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "f"'] & & FG(X) \arrow[dl, dashed, "\bar{f}"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

Figura 3

Demonstrație: Definim aplicația $\bar{f}: FG(X) \to G$, prin $\bar{f}(x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_m^{\alpha_m}) = f(x_1)^{\alpha_1}\cdot f(x_2)^{\alpha_2}\cdot\dots\cdot f(x_m)^{\alpha_m}$.
Evident, $(\bar{f}\circ i)(x) = \bar{f}(i(x)) = \bar{f}(x) = f(x), \forall x \in X$, adică $\bar{f}\circ i = f$.
Dacă $u = x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_m^{\alpha_m}$ și $v = y_1^{\beta_1}y_2^{\beta_2}\dots y_p^{\beta_p}$ sunt două elemente din $FG(X)$, atunci:

$$\bar{f}(u\cdot v) = \bar{f}(x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_m^{\alpha_m}y_1^{\beta_1}y_2^{\beta_2}\dots y_p^{\beta_p}) =$$
$$= f(x_1)^{\alpha_1}f(x_2)^{\alpha_2}\dots f(x_m)^{\alpha_m}f(y_1)^{\beta_1}f(y_2)^{\beta_2}\dots f(y_p)^{\beta_p} =$$
$$= \bar{f}(u)\cdot\bar{f}(v).$$

Așadar, $\bar{f}$ este un morfism de grupuri.
Ne rămâne de demonstrat unicitatea. Pentru aceasta, fie $\bar{\bar{f}}: FG(X) \to G$ un morfism de grupuri cu proprietatea $\bar{\bar{f}}\circ i = f$. Dacă $u = x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_m^{\alpha_m}$, atunci:

$$\bar{\bar{f}}(u) = \bar{\bar{f}}(x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_m^{\alpha_m}) = \bar{\bar{f}}(x_1^{\alpha_1})\bar{\bar{f}}(x_2^{\alpha_2})\dots\bar{\bar{f}}(x_m^{\alpha_m}) =$$
$$= \left(\bar{\bar{f}}(x_1)\right)^{\alpha_1}\left(\bar{\bar{f}}(x_2)\right)^{\alpha_2}\dots\left(\bar{\bar{f}}(x_m)\right)^{\alpha_m} =$$
$$= \left(\bar{\bar{f}}(i(x_1))\right)^{\alpha_1}\left(\bar{\bar{f}}(i(x_2))\right)^{\alpha_2}\dots\left(\bar{\bar{f}}(i(x_m))\right)^{\alpha_m} =$$
$$= f(x_1)^{\alpha_1}f(x_2)^{\alpha_2}\dots f(x_m)^{\alpha_m} =$$
$$= \bar{f}(u)$$

adică, $\bar{\bar{f}} = \bar{f}$.
Exemple: 1) Singurul grup liber de rang 1 este, abstracție făcând de un izomorfism, grupul ciclic infinit, adică $(\mathbb{Z}, +)$.
2) Se consideră funcțiile $\alpha, \beta : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, definite prin:
$\alpha(x) = x + 2, \quad \beta(x) = \dfrac{x}{2x+1}, \forall x \in \mathbb{C}\cup\{\infty\}$.
Aici prin simbolul ∞ întelegem $\frac{1}{0} = \infty$ și convenim ca $\frac{\infty}{\infty} = 1$.
Atunci, α și β sunt bijecții și au inversele $\alpha^{-1}(x) = x - 2$ și $\beta^{-1}(x) = \frac{x}{1-2x}$.
Astfel, α și β generează un grup F de permutări ale lui $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, grup care este liber pe mulțimea $\{\alpha, \beta\}$. De fapt, grupul F poate fi privit ca și grupul generat de: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
Fiecare putere nenulă a lui α transportă punctele din interiorul cercului $|z| = 1$ în exteriorul cercului unitate și orice putere nenulă a lui β transportă punctele din exteriorul cercului unitate în interiorul acestuia fără zero. Astfel, niciun cuvânt nebanal nu poate fi identitatea.
3) (Generalizare a exemplului anterior) Pentru orice număr complex z cu $|z| \geq 2$, matricele $\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix}$ generează un grup liber de rang 2.

Module libere

Definiția 12. Vom considera module la stânga peste un inel unitar R. Fie M un $R-$ modul și $S \subset M$ o submulțime a sa. Spunem că S este o mulțime de generatori pentru M sau că S formează un sistem de generatori al lui M dacă $< S > = M$, unde prin $< S >$ am notat submodulul lui M generat de S.
Orice modul M admite cel puțin un sistem de generatori, de exemplu $S = M$.
Dacă M admite o mulțime finită de generatori spunem că este modul finit generat sau de tip finit.
Fie $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ o mulțime de elemente ale unui $R-$ modul M. Spunem că mulțimea $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ este liniar independentă sau că formează un sistem liniar independent al lui M dacă din orice relație de forma
$a_1x_1 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0, a_i \in \mathbb{R}$,

rezultă că $a_i = 0$, oricare ar fi $i = 1,2,\dots n$.
În caz contrar, dacă există elementele $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, nu toate nule, astfel încât $a_1x_1 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$ spunem că $x_1, x_2, \dots, x_n$ este un sistem liniar dependent al lui M. O familie arbitrară $X = (x_i)_{i\in I}$ de elemente ale lui M spunem că este liniar independentă sau că formează un sistem liniar independent al lui M dacă orice parte finită a sa este liniar independentă. În caz contrar, dacă există cel puțin o parte finită a sa liniar dependentă spunem că familia X este liniar dependentă sau că formează un sistem liniar dependent al lui M.
Dacă $(x_i)_{i\in I}$ este o familie de elemente ale unui $R -$ modul M, atunci mulțimea
$supp(x_i)_{i\in I} = \{i \in I \mid x_i \neq 0\}$
se numește suportul familiei $(x_i)_{i\in I}$.
Familia $(x_i)_{i\in I}$ se numește de suport finit dacă $supp(x_i)_{i\in I}$ este o mulțime finită și scriem $|supp(x_i)_{i\in I}| < \infty$.
Având în vedere cele precedente, familia $X = (x_i)_{i\in I}$ de elemente ale $R -$ modulului M este liniar independentă dacă oricare ar fi familia $(a_i)_{i\in I}$ de elemente ale lui R, de suport finit, astfel încât $\sum_{i\in I} a_ix_i = 0$ rezultă $a_i = 0$, oricare ar fi $i \in I$.
Spunem că un element $x \in M$ este o combinație liniară cu coeficienți în R de familia $(x_i)_{i\in I}$ de elemente din M, dacă există o familie de suport finit $(a_i)_{i\in I}$ de elemente din R astfel încât $x = \sum_{i\in I} a_ix_i$.
Este clar că o familie $(x_i)_{i\in I}$ de elemente din M formează un sistem de generatori al lui M dacă oricare element din M este o combinație liniară cu coeficienți în R de această familie.
Definiția 13. O familie $B = (e_i)_{i\in I}$ de elemente ale unui $R -$ modul M se numește bază dacă, B formează totodată un sistem de generatori și un sistem liniar independent al lui M. Un modul care admite cel puțin o bază se numește modul liber.
Teorema 14. (Proprietatea de universalitate a modulelor libere) Fie L un $R -$ modul liber de bază $B = (e_i)_{i\in I}$. Atunci oricare ar fi modulul M și oricare ar fi familia $(x_i)_{i\in I}$ de elemente din M, există un unic morfism de module $\varphi : L \to M$ astfel încât $\varphi(e_i) = x_i$ pentru orice $i \in I$. Mai mult, φ este injectivă (respectiv surjectivă, bijectivă) dacă și numai dacă $(x_i)_{i\in I}$ este un sistem liniar independent (respectiv sistem de generatori, bază).
Demonstrație: Dacă $x \in L$, există o unică familie $(a_i)_{i\in I}$ de elemente din R de suport finit astfel încât $x = \sum_{i\in I} a_ie_i$. Definim $\varphi(x) = \sum_{i\in I} a_ix_i$. Este clar că φ este bine definită și vom demonstra că φ este morfism de module. Dacă $x' \in L$, există o unică familie $(a'_i)_{i\in I}$ de elemente din R de suport finit astfel încât $x' = \sum_{i\in I} a'_ie_i$.
Atunci $x + x' = \sum_{i\in I}(a_i + a'_i)e_i$ și deci:
$$\varphi(x + x') = \sum_{i\in I}(a_i + a'_i)x_i = \sum_{i\in I} a_ix_i + \sum_{i\in I} a'_ix_i = \varphi(x) + \varphi(x').$$
Dacă $a \in R$, atunci $ax = \sum_{i\in I}(aa_i)e_i$ și deci $\varphi(ax) = \sum_{i\in I}(aa_i)x_i = a\sum_{i\in I} a_ix_i = a\varphi(x)$. Deci φ este morfism de $R -$ module. Să demonstrăm unicitatea lui φ. Într-adevăr, fie $\psi : L \to M$ un morfism de module astfel încât $\psi(e_i) = x_i$ pentru orice $i \in I$. Pentru $x \in L$, $x = \sum_{i\in I} a_ie_i$ avem $\psi(x) = \psi(\sum_{i\in I} a_ix_i) = \sum_{i\in I} a_i\psi(e_i) = \sum_{i\in I} a_ix_i = \psi(\sum_{i\in I} a_ie_i) = \varphi(x)$ și deci $\psi = \varphi$.
Să presupunem acum că φ este injectivă și fie $(a_i)_{i\in I}$ o familie de elemente din R de suport finit astfel încât $\sum_{i\in I} a_ix_i = 0$. Deoarece $x_i = \varphi(e_i)$, pentru orice $i \in I$, avem $0 = \sum_{i\in I} a_i\varphi(e_i) = \varphi(\sum_{i\in I} a_ie_i)$ și cum φ este injectivă, obținem că $\sum_{i\in I} a_ie_i = 0$, de unde $a_i = 0$, pentru orice $i \in I$. Deci $(x_i)_{i\in I}$ este un sistem liniar independent. Reciproc, fie $x \in L$ astfel încât $\varphi(x) = 0$. Dacă $x = \sum_{i\in I} a_ie_i$ unde $(a_i)_{i\in I}$ este o familie de elemente din R de suport finit, atunci $\sum_{i\in I} a_i\varphi(e_i) = 0$ adică $\sum_{i\in I} a_ix_i = 0$. Deoarece $(x_i)_{i\in I}$ este un sistem de

elemente din M liniar independent, atunci $a_i = 0$ pentru orice $i \in I$ și deci $x = 0$. Prin urmare φ este injectivă.
Fie acum φ surjectivă. Pentru $y \in M$ există $x \in L$ astfel încât $\varphi(x) = y$. Deoarece $x = \sum_{i \in I} a_i e_i$, unde $(a_i)_{i \in I}$ este o familie de suport finit de elemente din R, atunci:

$$y = \varphi(x) = \varphi\left(\sum_{i \in I} a_i e_i\right) = \sum_{i \in I} a_i \varphi(e_i) = \sum_{i \in I} a_i x_i.$$

Prin urmare $(x_i)_{i \in I}$ este un sistem de generatori al lui M. Reciproc, fie $(x_i)_{i \in I}$ un sistem de generatori al lui M. Dacă $y \in M$, există o familie $(a_i)_{i \in I}$ de elemente din R de suport finit astfel încât $y = \sum_{i \in I} a_i x_i$. Atunci $y = \sum_{i \in I} a_i \varphi(e_i) = \varphi(\sum_{i \in I} a_i e_i)$, unde $\sum_{i \in I} a_i e_i \in L$. Deci φ este sujectivă. Din cele precedente rezultă că φ este bijectivă dacă și numai dacă $(x_i)_{i \in I}$ este bază.
Exemplu: Un exemplu clasic de modul liber este structura de spațiu vectorial.

Grupuri abeliane libere

Fie $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ o mulțime finită și nevidă.
Definiția 15. Grupul abelian liber FAG(X) pe mulțimea $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, constă din toate elementele de forma $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$, unde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{Z}$. Pentru $u = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ și $v = x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \dots x_n^{\beta_n}$, operația se definește prin:

$$u \cdot v = x_1^{\alpha_1+\beta_1} x_2^{\alpha_2+\beta_2} \dots x_n^{\alpha_n+\beta_n}.$$

Pe de altă parte, grupul abelian liber $FAG(X)$ se poate privi ca și $\mathbb{Z} -$ modulul liber cu baza X. În acest mod, dacă $u = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$ și $v = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n$ sunt două elemente din $FAG(X)$, atunci:

$$u + v = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n =$$
$$= (\alpha_1 + \beta_1) x_1 + (\alpha_2 + \beta_2) x_2 + \dots + (\alpha_n + \beta_n) x_n.$$

Propoziția 16. Grupul liber $FAG(X)$ este izomorf cu $\underbrace{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}}_{de\ n\ ori}$.

Propoziția 17. (Proprietatea de universalitate a grupului abelian liber) Fie X o mulțime. Pentru orice grup abelian G și orice aplicație $f : X \to G$ există un unic morfism de grupuri $\bar{f} : FG(X) \to G$ astfel ca $\bar{f} \circ i = f$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "f"'] & & FAG(X) \arrow[dl, dashed, "\bar{f}"] \\
& G &
\end{tikzcd}$$

Figura 4

Demonstrație: Construim funcția $\bar{f} : FAG(X) \to G$, astfel: dacă $u = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \in FAG(X)$, atunci definim $\bar{f}(x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}) = f(x_1)^{\alpha_1} \cdot f(x_2)^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot f(x_n)^{\alpha_n}$.
Evident, $(\bar{f} \circ i)(x) = \bar{f}(i(x_k)) = \bar{f}(x_k) = f(x_k)$, $\forall k \in \{1,2, \dots, n\}$, adică $\bar{f} \circ i = f$.
Dacă $u, v \in FAG(X)$, $u = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ și $v = x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \dots x_n^{\beta_n}$, atunci

$$\bar{f}(u \cdot v) = \bar{f}\left(x_1^{\alpha_1+\beta_1} x_2^{\alpha_2+\beta_2} \dots x_n^{\alpha_n+\beta_n}\right) =$$
$$= f(x_1)^{\alpha_1+\beta_1} f(x_2)^{\alpha_2+\beta_2} \dots f(x_n)^{\alpha_n+\beta_n} =$$

$$= \left(f(x_1)^{\alpha_1} f(x_2)^{\alpha_2} \dots f(x_n)^{\alpha_n}\right) \cdot \left(f(x_1)^{\beta_1} f(x_2)^{\beta_2} \dots f(x_n)^{\beta_n}\right) =$$
$$= \bar{f}(u) \cdot \bar{f}(v)$$

adică, $\bar{f}$ este morfism de grupuri.

Ne mai rămâne de demonstrat unicitatea. Fie $\bar{\bar{f}} : FG(X) \to G$ un morfism de grupuri, astfel încât $\bar{\bar{f}} \circ i = f$. Dacă $u = {x_1}^{\alpha_1} {x_2}^{\alpha_2} \dots {x_n}^{\alpha_n}$, atunci

$$\begin{aligned}
\bar{\bar{f}}(u) &= \bar{\bar{f}}({x_1}^{\alpha_1} {x_2}^{\alpha_2} \dots {x_n}^{\alpha_n}) = \\
&= \bar{\bar{f}}({x_1}^{\alpha_1}) \bar{\bar{f}}({x_2}^{\alpha_2}) \dots \bar{\bar{f}}({x_n}^{\alpha_n}) \\
&= \left(\bar{\bar{f}}(x_1)\right)^{\alpha_1} \left(\bar{\bar{f}}(x_2)\right)^{\alpha_2} \dots \left(\bar{\bar{f}}(x_n)\right)^{\alpha_n} = \\
&= \left(\bar{\bar{f}}(i(x_1))\right)^{\alpha_1} \left(\bar{\bar{f}}(i(x_2))\right)^{\alpha_2} \dots \left(\bar{\bar{f}}(i(x_n))\right)^{\alpha_n} = \\
&= f(x_1)^{\alpha_1} f(x_2)^{\alpha_2} \dots f(x_n)^{\alpha_n} = \\
&= \bar{f}(u)
\end{aligned}$$

adică $\bar{\bar{f}} = \bar{f}$.

BIBLIOGRAFIE

[1] Anderson, F. W., Fuller, K. R. (1992). Rings and categories of modules, Springer-Verlag, New York
[2] Creangă, I., Simovici, D. (1977). Teoria algebrică a semigrupurilor cu aplicaţii, Ed. Tehnică, Bucureşti
[3] Gratzer, G. (1979). Universal algebra, Second Edition, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, and Berlin
[4] Ion, I.D., Radu, N. (1970). Algebră, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti,.
[5] Năstăsescu, C., Niţă, C., Vraciu, C. (1986). Bazele Algebrei Vol. 1, Ed. Academiei, Bucureşti
[6] Purdea, I., Pic, G. (1977). Tratat de algebră modernă, vol. I, Editura Academiei, Bucureşti
[7] Purdea, I. (1982). Tratat de algebră modernă, vol. II, Editura Academiei, Bucureşti,.
[8] Purdea, I., Pop, I. (2003). Algebră, Editura GIL, Zalău
[9] Purdea, I., Pelea, C. (2008). Probleme de algebră, Ed. Eikon

TEOREMA LUI LAGRANGE

Iulius Radu TIMAR [1], Alina Nicoleta TIMAR [2]

[1] Colegiul Național "Onisifor Ghibu" Oradea, profesor de matematică, timariuliusradu@yahoo.com
[2] Școala Gimnazială "Nicolae Bălcescu" Oradea, profesor de matematică, alina_ptimar@yahoo.com

Rezumat: *În acest material ne propunem să venim cu câteva idei mai accesibile pentru a putea fi mai pe întelsul elevilor în studiul demonstrării unor inegalități prin teorema lui Lagrange .*
Cuvinte Cheie : Funcție continuă, funcție derivabilă, Teorema lui Lagrange

Teorema lui Lagrange mai este denumită și Prima teorema a creșterilor finite sau Prima teoremă de medie. Teorema lui Lagrange reprezintă un rezultat deosebit de important în analiza matematică, cu ajutorul căruia se demonstrează multe alte rezultate esențiale în studiul variației funcțiilor sau în calculul integral.

Teorema lui Lagrange

Fie $f:[a;b]\to\mathbb{R}$; $a,b\in\mathbb{R}, a\prec b$, o funcție ce satisface următoarele proprietăți

1) f continuă pe $[a;b]$
2) f derivabilă pe (a;b)

Atunci $\exists\ c\in(a;b)$ a.î. $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f^{'}(c)$

Demonstrarea unor inegalități prin teorema lui Lagrange

Exemplu : Să se demonstreze inegalitățile:

1. $$\frac{b-a}{\cos^2 a}\prec tgb-tga\prec\frac{b-a}{\cos^2 b},0\prec a\prec b\leq\frac{\pi}{2}$$

Considerăm $f:[a;b]\to\mathbb{R}$; $f(x)=tgx;[a;b]\subset(0;\frac{\pi}{2})$

Funcția f este continuă pe $[a;b]$ și derivabilă pe (a;b) ceea ceînseamnă că prin teorema lui Lagrange $\exists c\in(a;b)$ a.î. $\dfrac{f(a)-f(b)}{b-a}=f^{'}(c);(f^{'}(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}\Rightarrow f^{'}(c)=\dfrac{1}{\cos^2 c})$

$$\frac{tgb-tga}{b-a}=\frac{1}{\cos^2 c}$$

$a\prec c\prec b$ și cum funcția cos este descrescătoare pe $(0;\frac{\pi}{2})$

$$\cos b\prec\cos c\prec\cos a\Big|^2$$

$$\cos^2 b\prec\cos^2 c\prec\cos^2 a$$

$$\frac{1}{\cos^2 a}\prec\frac{1}{\cos^2 c}\prec\frac{1}{\cos^2 b}$$

$$\frac{1}{\cos^2 a}\prec\frac{tgb-tga}{b-a}\prec\frac{1}{\cos^2 b}\Big|(b-a)$$

$$\frac{b-a}{\cos^2 a}\prec tgb-tga\prec\frac{b-a}{\cos^2 b};0\prec a\prec b\leq\frac{\pi}{2}$$

2. $$\frac{a-b}{\sin^2 a}\prec ctgb-ctga\prec\frac{a-b}{\sin^2 b};0\prec a\prec b\leq\frac{\pi}{2}$$

Considerăm funcția $f:[a;b]\to \mathbb{R}$; $f(x)=ctgx$

Funcția f este continuă pe [a;b] și derivabilă pe (a;b) ca funcție elementră și atunci prin teorema lui Lagrange $\exists$ $c\in(a;b)$ a.î. $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f^{'}(c)$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f^{'}(c);(f^{'}(x)=-\frac{1}{\sin^2 x}\Rightarrow f^{'}(c)=-\frac{1}{\sin^2 c})$$

$$\frac{ctgb-ctga}{b-a}=\frac{-1}{\sin^2 c}$$
$$a\prec c\prec b$$
$$\sin a\prec \sin c\prec \sin b\Big|^2$$ „ sin'' este crescătoare pe [a;b]$\subset$(a; $\frac{\pi}{2}$)
$$\sin^2 a\prec \sin^2 c\prec \sin^2 b$$
$$\frac{1}{\sin^2 b}\prec\frac{1}{\sin^2 c}\prec\frac{1}{\sin^2 a}\Big|(-1)$$
$$\frac{-1}{\sin^2 a}\prec\frac{-1}{\sin^2 c}\prec\frac{-1}{\sin^2 b}$$
$$-\frac{1}{\sin^2 a}\prec\frac{ctgb-ctga}{b-a}\prec\frac{-1}{\sin^2 b}\Big|(b-a)$$
$$\frac{a-b}{\sin^2 a}\prec ctgb-ctga\prec\frac{a-b}{\sin^2 b},0\prec a\prec b\le\frac{\pi}{2}$$

3. $$\frac{b-a}{b}\prec\ln\frac{b}{a}\prec\frac{b-a}{a},0\prec a\prec b$$

Considerăm $f:[a;b]\to \mathbb{R}$; $f(x)=\ln x$

Funcția f este continuă pe [a;b] și derivabilă pe (a;b) ca funcțție elementară și atunci prin Teorema lui Lagrange

$$\exists c\in(a;b)a.\hat{i}.\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f^{'}(c)$$
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f^{'}(c);(f^{'}(x)=\frac{1}{x}\Rightarrow f^{'}(c)=\frac{1}{c})$$
$$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}=\frac{1}{c}$$
$$a\prec c\prec b$$
$$\frac{1}{b}\prec\frac{\ln b-\ln a}{b-a}\prec\frac{1}{a}\Big|(b-a)$$
$$\frac{b-a}{b}\prec\ln a-\ln b\prec\frac{b-a}{a}$$
$$\frac{b-a}{b}\prec\ln\frac{b}{a}\prec\frac{b-a}{a},0\prec a\prec b$$

4. $$|\sin b-\sin a|\prec|b-a|,a;b\in\mathbb{R}$$

Considerăm funcția $f:[a;b]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x$

Cum f este continuă pe [a;b] și derivabilă la (a;b) prin teorema lui Lagrange

$\exists c \in (a;b), a.î. \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f^{'}(c)$

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f^{'}(c), (f^{'}(x) = \cos x \Rightarrow f^{'}(c) = \cos c)$

$\dfrac{\sin b - \sin a}{b-a} = \cos c$

$\forall c \in \mathbb{R}, \cos c \in [-1;1] \Leftrightarrow -1 \le \cos c \le 1$

$-1 \le \cos \le 1$

$-1 \le \dfrac{\sin b - \sin a}{b-a} \le 1$

$\left|\dfrac{\sin b - \sin a}{b-a}\right| \le 1$

$\dfrac{|\sin b - \sin a|}{|b-a|} \le 1$

$|\sin b - \sin a| \le |b-a|; a,b \in \mathbb{R}$

5. $1-\dfrac{1}{x} \prec \ln x \prec x-1; \forall x \succ 0$

Considerăm $f:[1;x] \to \mathbb{R}; f(x) = \ln t, x \succ 0$

Funcția f este continuă pe [1; x] și derivabilă pe (1; x) și atunci prin teorema lui Lagrange

$\exists c \in (1;x) a.î. \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = f^{'}(c)$

$\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = f^{'}(c); (f^{'}(x) = \dfrac{1}{x} \Rightarrow f^{'}(c) = \dfrac{1}{c})$

$\dfrac{\ln x - \ln 1}{x-1} = \dfrac{1}{c}$

$1 \prec c \prec x$

$\dfrac{1}{x} \prec \dfrac{\ln x}{x-1} \prec 1 | (x-1)$

$\dfrac{x-1}{x} \prec \ln x \prec x-1, \forall x \succ 0$

$1-\dfrac{1}{x} \prec \ln x \prec x-1, \forall x \succ 0$

6. $\dfrac{x}{1+x^2} \prec arctgx \prec x, \forall x \succ 0$

Considerăm $f:[0;x] \to \mathbb{R}, f(x) = arctgx; 0 \prec x \prec \dfrac{\pi}{4}$

Cum f este continuă pe [0; x] și derivabilă pe (0; x) prin teorema lui Lagrange

$\exists\ c \in (0;x)\ a.î.\ a.î.\ \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = f^{'}(c)$

$\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = f^{'}(c); (f^{'}(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \Rightarrow f^{'}(c) = \dfrac{1}{1+c^2})$

$\dfrac{arctgx - arctg0}{x-0} = \dfrac{1}{1+c^2}$

$$0 \prec c \prec x \Big|^{2}$$
$$0^2 \prec c^2 \prec x^2 \Big| +1$$
$$1 \prec 1 + c^2 \prec 1 + x^2$$
$$\frac{1}{1+x} \prec \frac{1}{1+c^2} \prec 1$$
$$\frac{1}{1+x^2} \prec \frac{arctgx}{x} \prec 1 \Big| x$$
$$\frac{x}{1+x} \prec arctgx \prec x, \forall x \succ 0$$

BIBLIOGRAFIE

[1] Schneider, V., Schneider, C. (2009) Culegere-matematică, Editura Valeriu Craiova
[2] Țena, M., Gheorghe, A., (2001). Matematică XI, Editura GIL Zalău
[3] Țena, M., Andronache, M., Șerbănescu, D. (2010). Matematică XI, Editura ART București

STUDIUL LUNGIMII CERCULUI

Bianca TRIP

Studentă anul III, Matematică, Facultatea de Informatică și Științe, Universitatea din Oradea,
biancatrip@yahoo.com

Rezumat: *În această lucrare se prezintă aspecte referitoare la aflarea lungimii unui cerc, făcându-se trimitere la tehnicile lui Arhimede.*
Cuvinte cheie: lungimea cercului, valoarea lui π, poligon regulat

În geometria euclidiană, **cercul** este mulțimea tuturor punctelor din plan, egal depărtate de un punct fix numit centru. Distanța comună este denumită de obicei *raza cercului*.

Arhimede este cunoscut pentru contribuțiile sale în geometrie și, în special, pentru calculul lungimii cercului. El a fost primul care a reușit să aproximeze cu o precizie mare lungimea cercului prin metode geometrice.

Metoda lui Arhimede a constat în înscrierea și circumscrierea unui cerc cu două poligoane regulate cu 6,12,24,48,96 laturi, astfel poligonul asemănându-se tot mai mult cu un cerc(*fig.1*). Apoi, a calculat lungimea fiecărui segment și a adunat toate aceste lungimi pentru a obține o aproximare a lungimii cercului.

Arhimede a folosit această metodă pentru a calcula o aproximare a valorii lui π (pi), care este constanta matematică care reprezintă raportul dintre circumferința cercului și diametrul acestuia. El a obținut o aproximație a lui π cuprinsă între 3,1408 și 3,1429, care a fost una dintre cele mai precise aproximații cunoscute la vremea respectivă.

Metoda lui Arhimede a fost îmbunătățită de alți matematicieni, precum al-Khwarizmi și al-Mahani în secolele al IX-lea și al X-lea, dar principiul de bază rămâne același și este încă utilizat în mod obișnuit și astăzi pentru a calcula circumferința cercului și valoarea lui π.

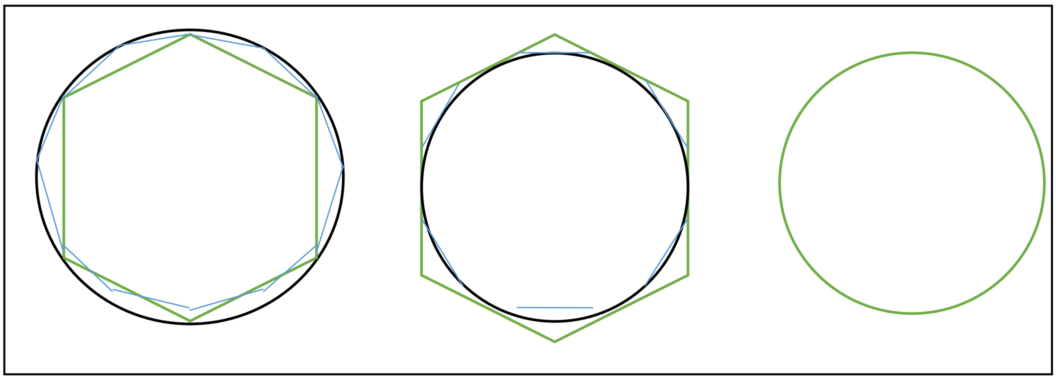


fig 1

Cazul I

În cercul $C(O,R)$ se înscrie un poligon regulat de latură *l*. Notăm α unghiul dintre două raze ale cercului $C(O,R)$ și P_n perimetrul poligonului cu *n* laturi.

Aplicăm teorema cosinusului într-unul dintre triunghiurile isoscele de bază *l* (fig. *2*).

$$l^2 = R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cdot cos\alpha \qquad (1)$$
$$l^2 = 2R^2(1 - cos\alpha)$$
$$l = R\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - cos\alpha}$$

$$l = R\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - 1 + 2sin^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$l = 2Rsin \frac{\alpha}{2} \quad (2)$$

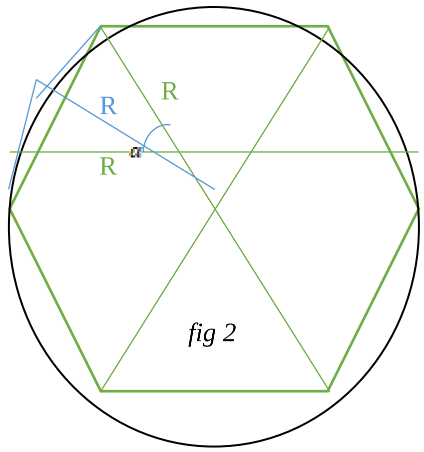


fig 2

În cazul în care poligonul are 6 laturi

$$\alpha = 60° \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 30° \Longrightarrow l = R \quad (3)$$

$$\Longrightarrow \frac{P_6}{2R} = \frac{6R}{2R} = 3 \quad (4)$$

În cazul în care poligonul are 12 laturi

$$\alpha = 30° \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 15° \Longrightarrow l \simeq 0{,}5176R \quad (5)$$

$$\Longrightarrow \frac{P_{12}}{2R} = \frac{12 \cdot 0{,}5176R}{2R} \simeq 3{,}1058 \quad (6)$$

În cazul în care poligonul are 24 laturi

$$\alpha = 15° \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 7°30' \Longrightarrow l \simeq 0{,}2611R \quad (7)$$

$$\Longrightarrow \frac{P_{24}}{2R} = \frac{24 \cdot 0{,}2611R}{2R} \simeq 3{,}1326 \quad (8)$$

În cazul în care poligonul are 48 laturi

$$\alpha = 7°30' \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 3°45' \Longrightarrow l \simeq 0{,}1308R \quad (9)$$

$$\Longrightarrow \frac{P_{48}}{2R} = \frac{48 \cdot 0{,}1308R}{2R} \simeq 3{,}1410 \quad (10)$$

În cazul în care poligonul are 96 laturi

$$\alpha = 3°45' \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 1°52'30'' \Longrightarrow l \simeq 0{,}0654R \quad (11)$$

$$\Longrightarrow \frac{P_{96}}{2R} = \frac{96 \cdot 0{,}0654R}{2R} \simeq 3{,}1415 \quad (12)$$

Cazul II

Un cerc $\mathcal{C}(O, R)$ se înscrie într-un poligon regulat de latură *l*.

Dacă poligonul are șase laturi, considerăm ΔOAB (*fig. 3*) echilateral, unde R este înălțime și $\alpha = \sphericalangle(R, OA)$. Notăm P_n perimetrul poligonului cu *n* laturi.

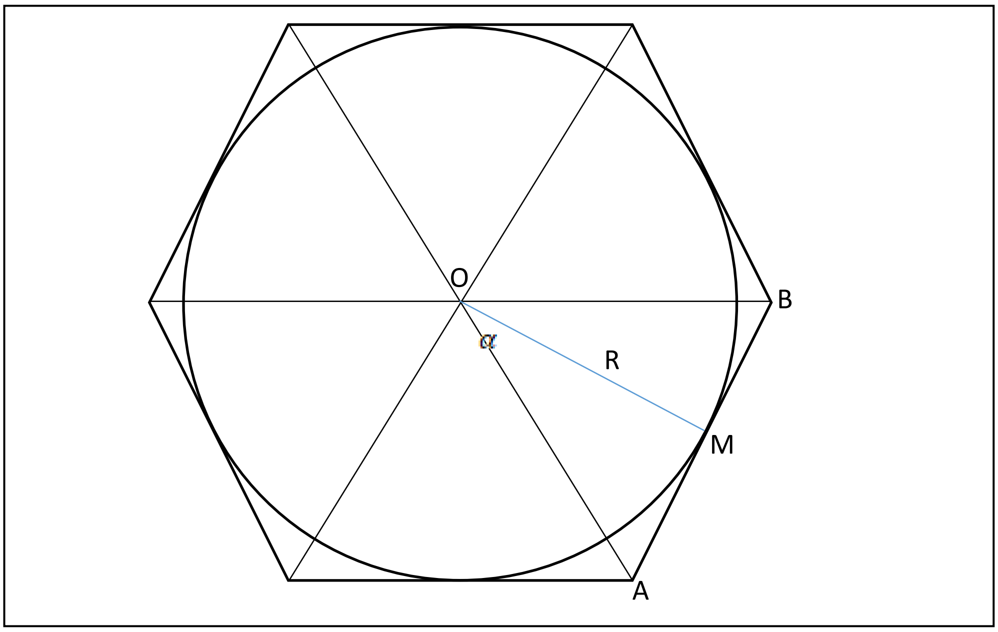


fig. 3

În $\Delta OAM\ dreptunghic, OA = l, AM = \frac{l}{2}$

$$tg\ \alpha = \frac{AM}{OM} \Leftrightarrow tg\ \alpha = \frac{l}{2R} \Longrightarrow l = 2R \cdot tg\ \alpha \qquad (13)$$

Dacă poligonul are 6 laturi

$$\Longrightarrow \alpha = 30° \Longrightarrow l \simeq 1{,}1548R \qquad (14)$$

$$\Longrightarrow \frac{P_6}{2R} = \frac{6 \cdot 1{,}1548R}{2R} \simeq 3{,}4644 \qquad (15)$$

Dacă poligonul are 12 laturi

$$\Longrightarrow \alpha = 15° \Longrightarrow l \simeq 0{,}5358R \qquad (16)$$

$$\Longrightarrow \frac{P_{12}}{2R} = \frac{12 \cdot 0{,}5358R}{2R} \simeq 3{,}2148 \qquad (17)$$

Dacă poligonul are 24 laturi

$$\Longrightarrow \alpha = 7°30' \Longrightarrow l \simeq 0{,}2634R \qquad (18)$$

$$\Longrightarrow \frac{P_{24}}{2R} = \frac{24 \cdot 0{,}2634R}{2R} \simeq 3{,}1608 \qquad (19)$$

Dacă poligonul are 48 laturi

$$\Longrightarrow \alpha = 3°45' \Longrightarrow l \simeq 0{,}131R \qquad (20)$$

$$\Longrightarrow \frac{P_{48}}{2R} = \frac{48 \cdot 0{,}131R}{2R} \simeq 3{,}144 \qquad (21)$$

Dacă poligonul are 96 laturi

$$\Longrightarrow \alpha = 1°52'30'' \Longrightarrow l \simeq 0{,}0654R \qquad (22)$$

$$\Longrightarrow \frac{P_{96}}{2R} = \frac{96 \cdot 0{,}0654R}{2R} \simeq 3{,}139 \qquad (23)$$

Cazul III

Considerăm cercul $\mathcal{C}(O, R)$(*fig. 4*) și funcția $f : \left[-\frac{R}{\sqrt{2}}, \frac{R}{\sqrt{2}}\right] \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$

$$f'(x) = \frac{(R^2 - x^2)'}{2\sqrt{R^2 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

$$\mathit{Lungimea\ cercului\ este}: 4 \cdot l_{\widehat{AB}} = 4 \cdot \int_{-\frac{R}{\sqrt{2}}}^{\frac{R}{\sqrt{2}}} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx \qquad (24)$$

$$= 4 \cdot \int_{-\frac{R}{\sqrt{2}}}^{\frac{R}{\sqrt{2}}} \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\, dx = 4 \cdot R \int_{-\frac{R}{\sqrt{2}}}^{\frac{R}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2}}\, dx = 4 \cdot R \left(\arcsin \frac{x}{R} \right) \Bigg|_{-\frac{R}{\sqrt{2}}}^{\frac{R}{\sqrt{2}}}$$

$$= 8 \cdot R \cdot \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\pi R$$

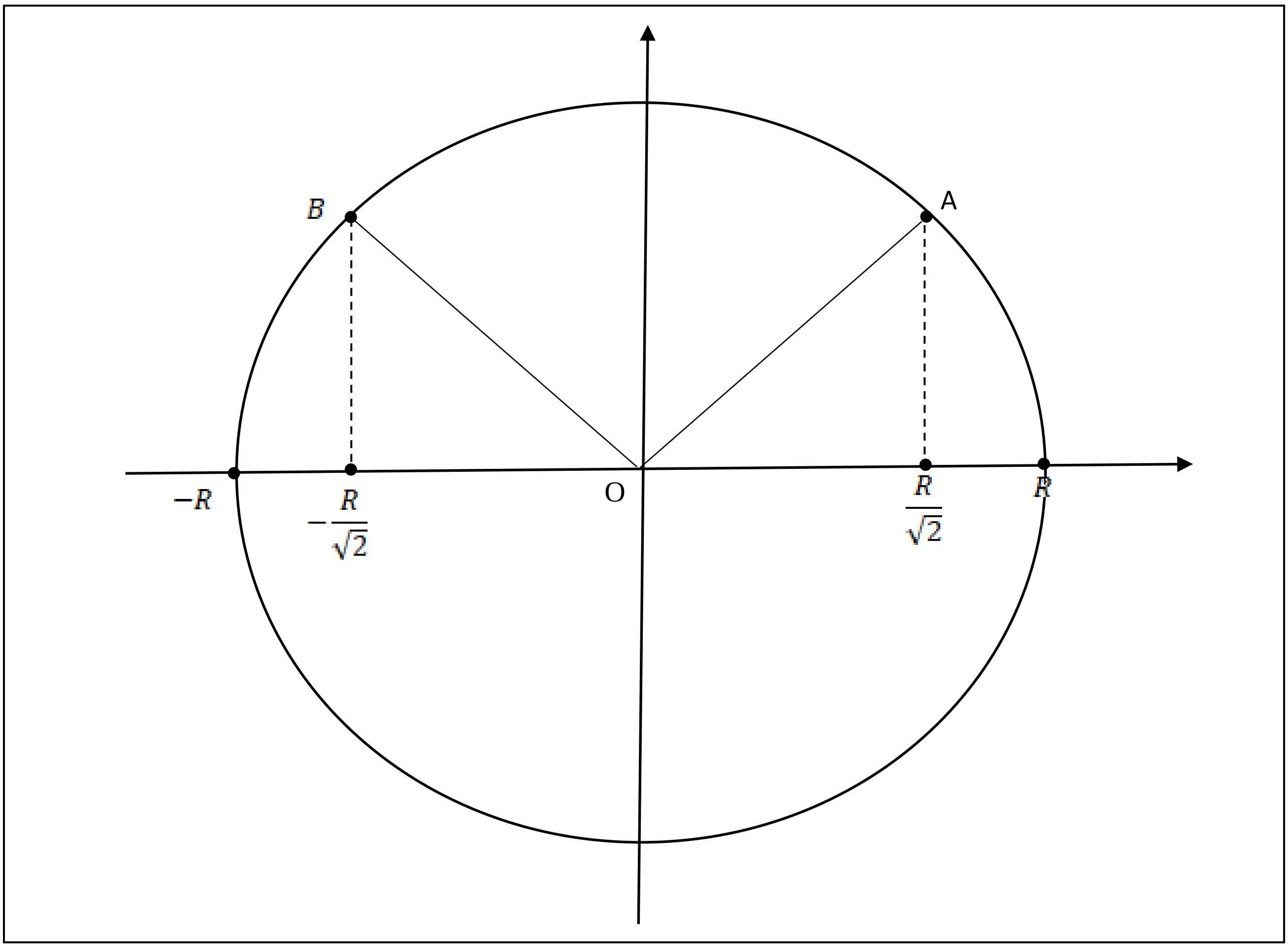


fig. 4

BIBLIOGRAFIE

[1] Mohry. B., (2003). Matematică, Geometrie Pocket Teacher. București: Editura ALL Educațional
[2] Moise. E.E. (1980). Geometrie elemetară. Dintr-un punct de vedere superior. București: Editura Didactică și Pedagogică
[3] Degree calculator. Accesat online la data de 10 mai 2023 de pe https://calculator-online.org/degrees
[4] Spike's Calculators. Trig Functions Ratio's from Angles in Degrees. Accesat online la data de 10 mai 2023 de pe https://www.spikevm.com/construction-math/trigonometric.php

METODE NUMERICE PENTRU REZOLVAREA ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE

Daria TRIP

Studentă anul III, Matematică, Facultatea de Informatică și Științe, Universitatea din Oradea, daria.trip001@gmail.com

Rezumat: *În această lucrare se prezintă două metode numerice pentru rezolvarea ecuațiilor diferențiale: metoda liniior poligonale (metoda lui Euler) și metoda lui Runge Kutta, precum și rezultatele obținute care sunt reprezentate grafic cu ajutorul unui soft personalizat realizat în limbajul de programare C#.*
Cuvinte cheie: ecuatii diferentiale, metode numerica

În această lucrare studiem rezultatul soluției exacte pentru 3 ecuații diferențiale – rezultat la care se ajunge în urma rezolvării efective a ecuației diferențiale – care este comparat cu rezultatele obținute pentru cele două metode numerice menționate anterior.

Folosind lucrarea lui Gh. Micula și P. Pavel [7], se vor prezenta în această lucrare următoarele metode numerice pentru rezolvarea ecuațiilor diferențiale.

Metoda liniilor poligonale este o metodă discretă. Considerăm problema

$$y' = f(x, y),\ y(x_0) = y_0 \tag{1}$$

unde funcția $f: D \to \mathbb{R}, \mathbb{R}^2 \supset D := \{(x, y) \| x - x_0| \leq a,\ |y - y_0| \leq b\}$ satisface condițiile:

$$|f(x,\ y_1) - f(x,\ y_2)| \leq L|y_1 - y_2|,\ \ L = const.,\ (x,\ y_1),\ (x,\ y_2) \in D, \tag{2}$$

$$\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + f(x,y)\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| \leq M,\ \ M = const.,\ (x_1 y) \in D \tag{3}$$

Considerăm o partiție cu nodurile echidistante $x_i = x_0 + ih,\ (i = 0, 1, 2,\ \dots)$ ale intervalului de definiție a soluției y a problemei (2.1).

Metoda lui Euler constă în aproximarea valorilor $y(x_i)$, prin valorile y_i, care se calculează succesiv după formula

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i),\ \ i = 0, 1, 2,\ \dots \tag{4}$$

Astfel curba integrală $y = y(x)$ care trece prin punctul $M_0(x_0,\ y_0)$ este aproxi-mată prin linia poligonală $M_0M_1M_2 \dots$ unde punctele M_i, au coordonatele $(x_i, y_i),\ i = 0, 1, 2,\ \dots$ Fiecare segment M_iM_{i+1} al acestei linii poligonale, denumită *linia poligonală a lui Euler*, are ecuația $y = y_i + (x - x_i)f(x_i,\ y_i)$ și are direcție ce coincide cu direcția tangentei la curba integrală a ecuației (2.1) ce trece prin punctul M_i.

Dacă $y(x_n)$ este valoarea exactă a soluției problemei (2.1) pentru $x = x_n$, iar y_n este valoarea aproximativă obținută din (2.4) atunci are loc următoarea delimitare a erorii:

$$|y(x_n) - y_n| \leq \frac{h}{2}\frac{M}{L}[(1 + hL)^n - 1] \tag{5}$$

Metoda liniilor poligonale se poate aplica și la sisteme de ecuații diferențiale sau la ecuația de ordin superior scrisă sub forma echivalentă a unui sistem.
De exemplu, în cazul sistemului de două ecuații

$$\begin{aligned} y' &= f_1(x, y, z) \\ z' &= f_2(x, y, z),\ \ y(x_0) = y_0,\ \ z(x_0) = z_0 \end{aligned} \tag{6}$$

valorile aproximative $y(x_i) \approx y_i$ și $z(x_i) \approx z_i$ se calculează succesiv după formulele
$y_{i+1} = y_i + hf_1(x_i, y_i, z_i)$

$$z_{i+1} = z_i + hf_2(x_i, y_i, z_i),\ \ i = 0, 1, 2, \dots \tag{7}$$

Observație. Pentru rezolvarea aproximativă a problemei (2.1) se utilizează adesea așa-numita *metoda lui Euler îmbunătățită*, care are următorul algoritm de calcul al valorilor aproximative

$$y_{i+1} = y_i + hf_{i+1/2} \tag{8}$$

unde: $f_{i+1/2} := f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2});, x_{i+1/2} := x_i + \frac{h}{2}, y_{i+1/2} := y_i + \frac{h}{2} f_i,$ (9)

În continuare, se prezintă metoda lui Runge Kutta:

Se consideră următoarea problemă Cauchy:

$$y' = f(x, y), \; y(x_0) = y_0 \tag{10}$$

în aceleași condiții ca și în paragraful precedent. Notăm valorile aproximative ale soluției y a problemei (2.10) în punctul x_i prin y. Pe baza metodei Runge-Kutta soluția aproximativă y_{i+1} în punctul următorse $x_{i+1} = x_i + h$ se calculează după formula

$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$

$$\Delta y_i = \frac{1}{6}\left[K_1^{(i)} + 2K_2^{(i)} + 2K_3^{(i)} + K_4^{(i)}\right] \tag{11}$$

unde

$$K_1^{(i)} = hf(x_i, y_i)$$

$$K_2^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{1}{2}h, \; y_i + \frac{1}{2}K_1^{(i)}\right)$$

$$K_3^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{1}{2}h, \; y_i + \frac{1}{2}K_2^{(i)}\right)$$

$$K_4^{(i)} = hf\left(x_i + h, \; y_i + K_3^{(i)}\right) \tag{12}$$

Este convenabil să se efectueze calculele după schema din următorul tabel:

i	x	y	$K = hf(x, y)$	y
0	x_0 $x_0 + \frac{1}{2}h$ $x_0 + \frac{1}{2}h$ $x_0 + h$	y_0 $y_0 + \frac{1}{2}K_1^{(0)}$ $y_0 + \frac{1}{2}K_2^{(0)}$ $y_0 + \frac{1}{2}K_3^{(0)}$	$K_1^{(0)}$ $K_2^{(0)}$ $K_3^{(0)}$ $K_4^{(0)}$	$K_1^{(0)}$ $2K_2^{(0)}$ $2K_3^{(0)}$ $K_4^{(0)}$
				Δy_0
1	x_1	y_1		

Acest tabel se completează în următoarea ordine:

(1) Se scriu valorile x_0, y_0 în prima linie a tabelului și se calculează $f(x_0, y_0)$, care se înmulțește cu h și se trece în tabel valoarea $K_1^{(0)}$.

(2) Se scriu în linia a doua a tabelului valorile $x_0 + \frac{1}{2}h$ și $y_0 + \frac{1}{2}K_1^{(0)}$.

(3) Se calculează $f\left(x_0 + \frac{1}{2}h, \; y_0 + \frac{1}{2}K_1^{(0)}\right)$ care se înmulțește cu h și se obține $K_2^{(0)}$ care se trece în tabel.

(4) Se scriu în linia a treia valorile $x_0 + \frac{1}{2}h, \; y_0 + \frac{1}{2}K_2^{(0)}$, se calculează $\left(x_0 + \frac{1}{2}h, \; y_0 + \frac{1}{2}K_2^{(0)}\right)$ care se înmulțește cu h, pentru obținerea lui $K_3^{(0)}$ care se trece în tabel.

(5) Se scriu în linia a patra valorile$x_0 + h, y_0 + K_3^{(0)}$, se calculează $f(x_0 + h, \; y_0 + K_3^{(0)})$ care se înmulțește cu h dă valoarea lui $K_4^{(0)}$, ce se trece de asemenea în tabel.

(6) Se adună numerele $K_1^{(0)}, 2K_2^{(0)}, 2K_3^{(0)}, K_4^{(0)}$ din coloana a patra și împărțind rezultatul cu 6 se obține Δy_0.

(7) Se calculează $y_1 = y_0 + \Delta y_0$.

(8) Calculul se continuă în aceeași ordine luându-se (x_1, y_1) ca punct inițial.

Notăm că pasul h poate fi schimbat de la un nod la altul. Pentru a verifica dacă alegerea lui h este satisfăcătoare se calculează numărul

$$\theta = \left|\frac{K_2^{(i)} - K_3^{(i)}}{K_1^{(i)} - K_2^{(i)}}\right| \tag{13}$$

care nu trebuie să depășească câteva sutimi, în caz contrar, h trebuie micșorat.

Ordinul de mărime al erorii la metoda Runge-Kutta este 0 (h^4) pe întregul interval $[x_0, b]$.

Observație. Metoda Runge-Kutta poate fi utilizată și la rezolvarea aproximativă a sistemelor de ecuații diferențiale.

În continuare sunt prezentate 3 aplicații pentru care sunt determinate soluția lor exacte prin rezolvarea efectivă a ecuației diferențiale cu ajutorul [1],[2],[3],[4],[5] și [6]. Rezultatele soluției exacte vor fi comparate și evidențiate - cu rezultatele obținute în urma aplicării celor două metode numerice - într-un tabel precum și printr-o reprezentare grafică cu ajutorul programului scris în limbajul de programare C#.

Aplicația 1. Se dă următoarea problema Cauchy: $\begin{cases} y' = y - \frac{2x}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

Determinarea soluției exacte:

$$\begin{cases} y' = y - \dfrac{2x}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} yy' = y^2 - 2x \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

Notăm $y^2(x) = z(x) \Rightarrow \begin{cases} y^2(0) = z(0) \Rightarrow z(0) = 1 \\ z'(x) = (y^2(x))' = 2y(x)y'(x) \end{cases}$

Problema Cauchy se rescrie $\begin{cases} \frac{1}{2} z'(x) = z(x) - 2x \\ z(0) = 1 \end{cases}$.

Noua ecuație obținută este binară și neomogenă.

Se rezolvă ecuația omogenă:

$\frac{1}{2} z'(x) = z(x) \Rightarrow$

$\frac{dz}{z} = 2dx.$

După integrare, obținem:

$\ln z(x) = 2x + C \Rightarrow z_o = C \cdot e^{2x}$ – soluția ecuației omogene.

Se caută o soluție particulară a ecuației neomogene $z_p = C(x) \cdot e^{2x}$.

Cum $z_p' = z_p - 2x \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{2}(C'(x) \cdot e^{2x} + C(x) \cdot 2e^{2x}) = C(x) \cdot e^{2x} - 2x \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}C'(x) \cdot e^{2x} = -2x$$

$$C'(x) = -4x \cdot e^{2x}$$

$$C(x) = \int -4x \cdot e^{-2x}\, dx = \int 2x(-2e^{-2x})\, dx = \int 2x \cdot (e^{-2x})'\, dx = 2x \cdot e^{-2x} + e^{-2x}$$

$\Rightarrow z_p = 2x + 1.$

Soluția ecuației $z(x) = z_o + z_p = C \cdot e^{2x} + 2x + 1.$

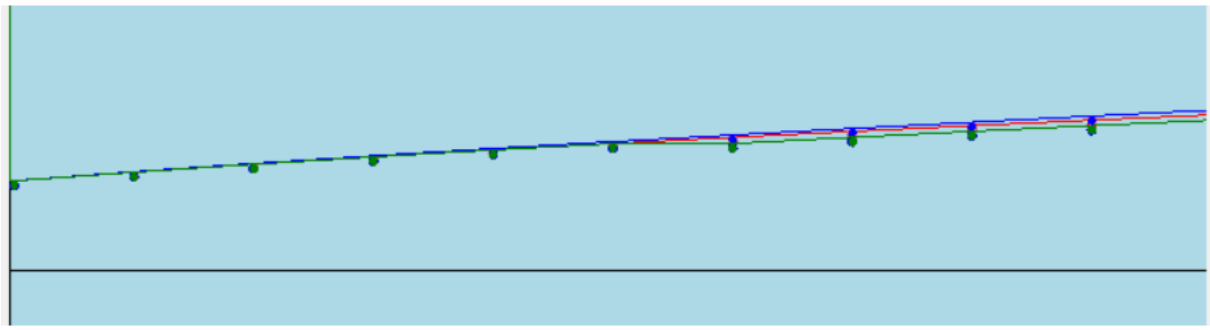
Cum $z(0) = 1$ obținem $C = 0 \Rightarrow$

$\mathbf{y(x) = \sqrt{(2x + 1)}}$ **– soluția exactă.**

Se generează soluțiile pentru ecuația diferențială dată, cu ajutorul metodei de numărare a lui Euler și Runge Kutta, rezultate care sunt comparate cu soluția exactă în tabelul de mai jos. Ca și date inițiale, valoarea lui x aparține intervalului $[0,1]$, iar pasul diviziunii îl considerăm $h = 0{,}1$

i	**x** $x_{i+1} = x_i + h$	**Euler** $y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$	**Runge Kutta** $y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$	**Soluția exactă** $y = \sqrt{(2x+1)}$
1	0	1	1	1
2	0,1	1,1	1,0954	1,0954
3	0,2	1,1918	1,1832	1,1832
4	0,3	1,2774	1,2649	1,2649
5	0,4	1,3582	1,3416	1,3416
6	0,5	1,4351	1,4142	1,4142
7	0,6	1,5089	1,4142	1,4832
8	0,7	1,5803	1,4832	1,5492
9	0,8	1,6497	1,5492	1,6125
10	0,9	1,7177	1,6125	1,6733
11	1,0	1,7847	1,6733	1,7321

Reprezentarea grafică a soluției exact, precum și a celor două metode de numărare este următoarea:



- Soluția exactă
- Euler
- Runge Kutta

Aplicația 2. Se dă următoarea problemă Cauchy: $\begin{cases} y' = \frac{1}{x+1} \cdot y - y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}.$

Determinarea soluției exacte:

$\begin{cases} y' = \frac{1}{x+1} \cdot y - y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{y^2} y' = y^2 - \frac{1}{x+1} \cdot \frac{1}{y} - 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}.$ Notăm

$\frac{1}{y(x)} = z(x) \Rightarrow \begin{cases} z(0) = \frac{1}{y(0)} = 1 \\ z'(x) = \left(\frac{1}{y(x)}\right)' = -\frac{y'(x)}{y^2(x)} \end{cases}$

Problema Cauchy se rescrie $\begin{cases} -z'(x) = \frac{1}{x+1} \cdot z(x) - 1 \\ z(0) = 1 \end{cases}$.

Se rezolvă ecuația omogenă: $z'(x) = -\frac{1}{x+1} \cdot z(x)$

$\Rightarrow \frac{dz}{z} = -\frac{1}{x+1}$

$\Rightarrow \int \frac{dz}{z} = \int -\frac{1}{x+1}$

$\Rightarrow \ln z = -\ln(x+1) + \ln C$

$\Rightarrow z_0 = \frac{C}{x+1}$ – soluția ecuației omogene.

Se caută o soluție particulară a ecuației neomogene $z_p(x) = \frac{C(x)}{x+1}$

$\Rightarrow z_p'(x) = -\frac{1}{x+1} \cdot z_p(x) + 1$

$\Rightarrow \left(\frac{C(x)}{x+1}\right)' = -\frac{C(x)}{(x+1)^2} + 1$

$\Rightarrow \frac{C'(x)(x+1) - C(x)}{(x+1)^2} = -\frac{C(x)}{(x+1)^2} + 1$

$\Rightarrow C'(x) = x + 1$

$\Rightarrow \frac{1}{2}x^2 + x$

$\Rightarrow z_p(x) = \frac{x^2+2x}{2(x+1)}$.

Soluția ecuației $z(x) = z_o(x) + z_p(x) = \frac{C}{x+1} + \frac{x^2+2x}{2(x+1)}$.

Cum $z(0) = 1$ obținem $C = 1$

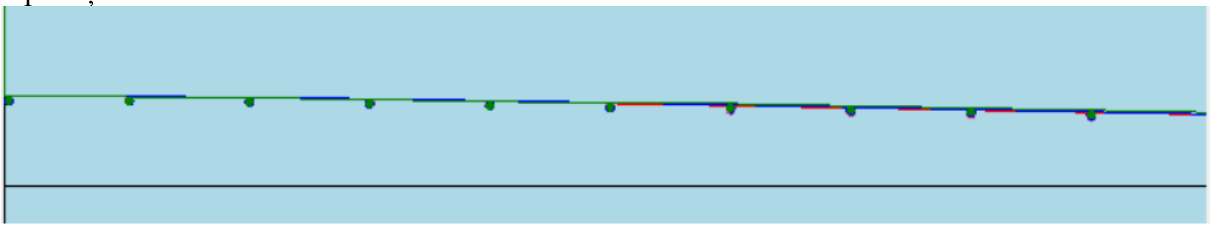
$\Rightarrow z(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{x^2+2x}{2(x+1)} = \frac{x^2+2x+2}{2(x+1)} \Rightarrow$

$\mathbf{y(x)} = \frac{1}{z(x)} = \frac{2(x+1)}{x^2+2x+2}$ **– soluția exactă.**

Vom genera soluțiile cu ajutorul aplicației pentru Aplicația 2, cu ajutorul metodei de numărare a lui Euler și Runge Kutta, rezultate care sunt comparate cu soluția exactă în tabelul de mai jos. Ca și date inițiale, valoarea lui x aparține intervalului $[0,1]$, iar pasul diviziunii îl considerăm $h = 0,1$:

i	**x** $x_{i+1} = x_i + h$	**Euler** $y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$	**Runge Kutta** $y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$	**Soluția exactă** $y = \frac{2(x+1)}{x^2+2x+2}$
1	0	1	1	1
2	0,1	1	0,9955	0,9955
3	0,2	0,9909	0,9836	0,9836
4	0,3	0,9753	0,9665	0,9665
5	0,4	0,9552	0,9459	0,9459
6	0,5	0,9322	0,9231	0,9231
7	0,6	0,9074	0,9231	0,8989
8	0,7	0,8818	0,8989	0,8740
9	0,8	0,8559	0,8740	0,8491
10	0,9	0,8302	0,8491	0,8243
11	1,0	0,8050	0,8243	0,8

Reprezentarea grafică a soluției exact, precum și a celor două metode de numărare pentru Aplicația 2 este următoarea:



- Soluția exactă
- Euler
- Runge Kutta

Aplicația 3. Fie următoarea problemă Cauchy: $\begin{cases} y' = \frac{1}{2} \cdot xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \cdot xy \\ y(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{1}{2} dx.$

După integrare, obținem $\Rightarrow lny = \frac{1}{4}x^2 + C \Rightarrow y(x) = C \cdot e^{\frac{1}{4}x^2}$.

Determinăm C din ecuația inițială: $y(0) = 1$.

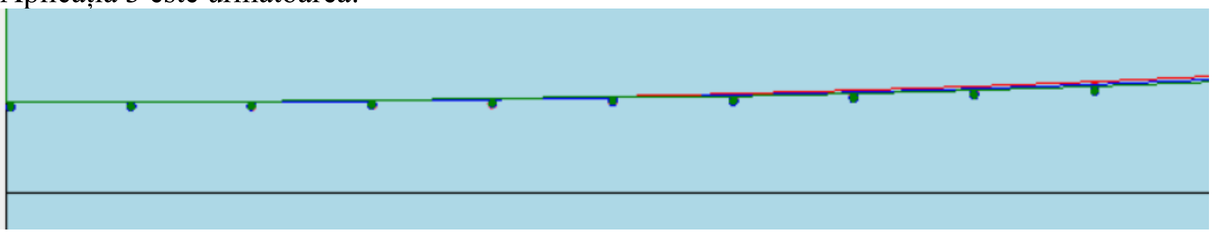
Cum $y(0) = C \cdot e^0 \Rightarrow C = 1$.

$\Rightarrow$ **$\mathbf{y(x)} = e^{\frac{1}{4}x^2}$ – soluția exactă.**

Vom genera soluțiile cu ajutorul aplicației pentru Aplicația 3, cu ajutorul metodei de numărare a lui Euler și Runge Kutta, rezultate care sunt comparate cu soluția exactă în tabelul de mai jos. Ca și date inițiale, valoarea lui x aparține intervalului $[0,1]$, iar pasul diviziunii îl considerăm $h = 0,1$:

i	**x** $x_{i+1} = x_i + h$	**Euler** $y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$	**Runge Kutta** $y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$	**Soluția exactă** $y = e^{\frac{1}{4}x^2}$
1	0	1	1	1
2	0,1	1	1,0025	1,0025
3	0,2	1,0050	1,0101	1,0101
4	0,3	1,0151	1,0228	1,0228
5	0,4	1,0303	1,0408	1,0408
6	0,5	1,0509	1,0645	1,0645
7	0,6	1,0772	1,0645	1,0942
8	0,7	1,1095	1,0942	1,1303
9	0,8	1,1483	1,1303	1,1735
10	0,9	1,1942	1,1735	1,2245
11	1,0	1,2480	1,2245	1,2840

Reprezentarea grafică a soluției exact, precum și a celor două metode de numărare pentru Aplicația 3 este următoarea:



- Soluția exactă

- Euler
- Runge Kutta

BIBLIOGRAFIE

[1] Ionescu, D.V. (1964). Ecuaţii diferenţiale şi integrale,Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti
[2] Drăgan, S., Paşca D. (1995). Lecţii de ecuaţii diferenţiale şi integrale, Editura Universitatea din Oradea
[3] Rus, I.A., Pavel, P. (1982). Ecuaţii diferenţiale ,Editura Didactică şi Pedagogică
[4] Precup, R. (2011). Ecuaţii diferenţiale, Editura Risoprint, Cluj-Napoca
[5] Ghermănescu, M. (1963). Culegere de probleme de ecuaţii diferenţiale,Editura Didactică şi Pedagogică;
[6] Drăgan, S., Seremi, L, Cătaş, A. (2011). Ecuaţii diferenţiale:culegere de probleme, Editura Universitatea din Oradea
[7] Micula, G., Pavel P. (1989). Ecuaţii diferenţiale şi integrale prin probleme şi exerciţii, Editura Dacia

.

FUNCȚIILE LUI EULER: BETA ȘI GAMMA

Petra VÁRADI

Studentă anul III, Matematică, Facultatea de Informatică și Științe, Universitatea din Oradea, petravaradi5@gmail.com

Rezumat: *În cadrul aceastei lucrări se prezintă funcțiile Beta și Gamma, proprietățile acestora și aplicații ale acestora. În plus, sunt prezentate exemple relevante de integrale improprii, alături de metodele eficiente utilizate pentru rezolvarea acestora.*
Cuvinte cheie: *integrală definită, integrală improprie, funcția Beta, funcția Gamma, convergență.*

1. Introducere

În definiția dată integralei definite $\int_a^b f(x)\,dx$, am presupus că a și b sunt finite, și că funcția $f(x)$ este mărginită pe $[a,b]$.

Noțiunea de integrală se extinde în mod natural la cazul funcțiilor arbitrare mărginite sau nemărginite, şi definite pe intervale arbitrare, mărginite sau nemărginite, închise sau neînschise. O serie de proprietăţi ale funcţiilor integrabile se transmit la funcţiile integrabile în sens generalizat. Pentru a arăta că o integrală improprie este convergentă vom folosi următoarele corolari.

Corolar 1. [1] Fie $-\infty < \boldsymbol{a} < \boldsymbol{b} < \infty$ și $\boldsymbol{f}: [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \to \mathbb{R}_+$, local integrabilă. Atunci

1. Dacă $(\exists)\ 0 < p < 1$ astfel încât $\lim\limits_{x \nearrow b}(b-x)^p f(x)$ există și este diferită de ∞, rezultă că $\int_a^{b-} f(x)\,dx$ este convergentă;
2. Dacă $(\exists)\ 1 \le p < \infty$ astfel încât $\lim\limits_{x \nearrow b}(b-x)^p f(x)$ există și este diferită de 0, rezultă că $\int_a^{b-} f(x)\,dx$ este divergentă.

Corolar 2. [1] Fie $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$ și $\boldsymbol{f}: [\boldsymbol{a}, \infty) \to \mathbb{R}_+$ o funcție local integrabilă. Atunci

1. Dacă $(\exists)\ 1 < p < \infty$ astfel încât $\lim\limits_{x \to \infty} x^p f(x)$ există și este diferită de ∞, rezultă că $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ este convergentă;
2. Dacă $(\exists)\ 0 \le p \le 1$ astfel încât $\lim\limits_{x \to \infty} x^p f(x)$ există și este diferită de 0, rezultă că $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ este divergentă.

2. Funcția Beta a lui Euler

Definiție 2.1. [1,2,3] Se numește integrală euleriană de prima speță și se reprezintă prin notația

$$\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx\,, p, q \in \mathbb{R}_+^*.$$

Propoziție 2.1. [1,2,3] Oricare ar fi $p, q \in \mathbb{R}_+^*$ integrala improprie $\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1--x)^{q-1}\,dx$ este convergentă și are proprietățile:

1. $\beta(p+1,q) + \beta(p,q+1) = \beta(p,q), (\forall)\ p,q \in [1,\infty)$;
2. $q \cdot \beta(p+1,q) = p \cdot \beta(p,q+1)$;
3. $\beta(p,q) = \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}$, dacă $p,q \in \mathbb{N}$;
4. $\beta(p,q) = \beta(q,p), p,q \in \mathbb{R}_+^*$;
5. $\beta(p,1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$, pentru $0 < p < 1$.

Demonstrație. Fixăm $p, q \in \mathbb{R}_+^*$ și fie funcția $f(x) = x^{p-1}(1-x)^{q-1}, x \in [0,1]$. Pentru a arăta că integrala este convergentă vom aplica Corolarul 1.
Pentru aceasta calculăm
$L = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^{1-p} \cdot f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^{1-p} \cdot x^{p-1} \cdot (1-x)^{q-1} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (1-x)^{q-1} = 1.$

Rezultă că $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{1-p}(1-x)^{q-1}\,dx$ este convergentă dacă $0 < 1-p < 1$, adică $p > 0$.
Calculăm
$L = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (1-x)^{1-q} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (1-x)^{1-q} x^{1-p}(1-x)^{q-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} x^{1-p} = 1$
și deci integrala improprie $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{1-p}(1-x)^{q-1}\,dx$ este convergentă.

Deoarece $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ și $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ și $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ sunt convergente rezultă că integrala improprie $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ este convergentă.

Să arătăm în continuare proprietățile enunțate.
1.
$\beta(p+1,q) + \beta(p,q+1) = \int_0^1 x^p(1-x)^{q-1}\,dx + \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^q\,dx = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}(x+1-x)\,dx = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = \beta(p,q).$

$Deci, \beta(p+1,q) + \beta(p,q+1) = \beta(p,q).$
Să arătăm a doua proprietate:
2. Dacă notăm $f = x^p \Rightarrow f' = px^{p-1}, g' = (1-x)^{q-1} \Rightarrow q = \int (1-x)^{q-1} =$
$= -\frac{(1-x)^q}{q}$ obținem

$$q\beta(p+1,q) = q\left[-x^p\frac{(1-x)^q}{q}\bigg|_0^1 + \int_0^1 px^{p-1}\frac{(1-x)^q}{q}\,dx\right] = p\int_0^1 px^{p-1}(1-x)^q\,dx =$$
$$= p\beta(p,q+1).$$

Deci, $q\beta(p+1,q) = q\int_0^1 x^p(1-x)^{q-1}\,dx$.
3. Fixăm un $n \in \mathbb{N}$ și facem $q = n-1$. Din 2. avem:
$\beta(p,q+1) = \frac{q}{p}\beta(p+1,q)$, înlocuind $q = n-1$, obținem

$$\beta(p,(n-1)+1) = \frac{n-1}{p}\beta(p+1,n-1)$$

$$\beta(p+1,n-1) = \beta(p+1,(n-2)+1) = \frac{n-2}{p+1}\beta(p+2,n-2)$$

$$\beta(p+2,n-2) = \beta(p+2,(n-3)+1) = \frac{n-3}{p+2}\beta(p+2,n-3)$$

...

$$\beta(p+n-2,2) = \beta(p+n-2,1+1) = \frac{1}{p+n-2}\beta(p+n-1,1).$$

Înmulțim relațiile de mai sus:

$$\beta(p,n)=\frac{(n-1)(n-2)(n-3)\dots 1}{p(p+1)\dots(p+n-2)}\beta(p+n-1,1).$$

Dar, $\beta(p+n-1,1)=\int_0^1 x^{(p+n-1-1)}(1-x)^{1-1}\,dx=\int_0^1 x^{p+n-2}\,dx=\frac{x^{p+n-1}}{p+n-1}\Big|_0^1=\frac{1}{p+n-1}$.

Înlocuind $\beta(p+n-1,1)$ în relație obținem:

$$\beta(p,n)=\frac{(n-1)!}{p(p+1)(p+2)\dots(p+n-1)}.$$

Dacă notăm $p=m\in\mathbb{N}$, obținem:

$$\beta(m,n)=\frac{(n-1)!}{m(m+1)\dots(m+n-1)}=\frac{(n-1)!\,(m-1)!}{(m-1)!\,m(m+1)\dots(m+n-1)}$$
$$=\frac{(n-1)!\,(m-1)!}{(m+n-1)!}.$$

Deci, $\beta(m,n)=\frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}$.

4. $\beta(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ și $\beta(q,p)=\int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-1}\,dt\,,t\in[0,1]$.

Facem schimbarea de variabilă $t=1-x$, $x=1-t$, $t=0\to x=1$, $t=1\to x=0$, $dt=-dx$ și avem:

$$\beta(q,p)=\int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-1}\,dt=\int_0^1(1-x)^{q-1}x^{p-1}(-dx)=-\int_1^0(1-x)^{q-1}x^{p-1}\,dx=$$
$$=-\left[-\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx\right]=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx=\beta(q,p).$$

Deci, $\beta(p,q)=\beta(q,p)$.

5. Pentru $0<p<1$ are loc.

$$\beta(p,1-p)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{-p}\,dx=\int_0^1\frac{x^p}{(1-x)^p}\cdot\frac{1}{x}dx$$

Facem schimbarea de variabilă $\frac{x}{1-x}=t$, atunci $x=0\to t=0$, $x=1\to t=\infty$,

$x=(1-x)\to tx=t-xt\to x(1+t)=t\to x=\frac{t}{1+t}$, $dx=\frac{1}{(1+t)^2}dt$.

$$\int_0^1\frac{x^p}{(1-x)^p}\cdot\frac{1}{x}dx=\int_0^\infty t^p\frac{1}{\frac{t}{1+t}}\frac{1}{(1+t)^2}dt=\int_0^\infty t^p\frac{1+t}{t(1+t)^2}dt=\int_0^\infty\frac{t^{p-1}}{1+t}dt.$$

Se arată că $\int_0^\infty\frac{t^{p-1}}{1+t}dt=\frac{\pi}{\sin p\pi}$, pentru $p<1$, rezultă că

$\beta(p,1-p)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{-p}\,dx==\frac{\pi}{\sin p\pi}$, $0<p<1$.

3. Funcția Gamma a lui Euler

Definiție 3.1. Funcția Gamma a lui Euler sau funcția de speța a doua a lui Euler, este definită de integrala

$$\Gamma(p)=\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\,dx\,,x>0$$

este o funcție convergentă și are proprietățile:

1. $\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)$, $(\forall)\ p\in\mathbb{R}_+^*$;
2. $\Gamma(n+1)=n!$, $n\in\mathbb{N}$;

3. $\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$, $(\forall)\ p,q \in \mathbb{N}$, iar β este funcția Beta;
4. Pentru $0 < p < 1$, $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$.

Demonstrație. Fixăm $p \in \mathbb{R}_+^*$ și fie funcția $f(x) = x^{p-1}e^{-x}, x \in \mathbb{R}_+^*$.
Deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^{1-p}f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^{1-p}x^{p-1}e^{-x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^{-x} = 1.$
Rezultă folosind Corolarul 1. că integrala improprie $\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\,dx$ este convergentă dacă $0 < 1-p < 1$ i.e. $p > 0$.
Calculăm $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha x^{p-1}e^{-x} = \lim\limits_{x\to\infty} x^{\alpha+p-1}e^{-x} = 0.$
Folosind Corolarul 2. integrala $\int_1^\infty x^{p-1}e^{-x}\,dx$ este convergentă, rezultă că integrala $\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\,dx$ este convergentă.
Să arătăm proprietățile acestei funcții.

$$\Gamma(p+1) = \int_0^x x^p e^{-x}\,dx$$

Integrând prin părți, unde alegem $f = x^p \to f' = px^{p-1}, g' = e^{-x} \to g = \int e^{-x}\,dx = -e^{-x}$ obținem:

$$\Gamma(p+1) = \int_0^\infty x^p e^{-x}\,dx = -x^p e^{-x}|_0^\infty + \int_0^\infty px^{p-1}e^{-x}\,dx.$$

Calculăm $-x^p e^{-x}|_0^\infty = \lim\limits_{x\to\infty} -x^p e^{-x} = 0,\ (\forall)\ p \in \mathbb{R}_+^*.$
Înlocuind în relația de mai sus avem:

$$\Gamma(p+1) = p\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\,dx = p\Gamma(p).$$

Egalitatea $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ se numește relația funcțională pentru funcția $\Gamma(p)$.
Folosind relația funcțională avem:

$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$
$\Gamma(p+2) = (p+1)\Gamma(p+1)$
$\Gamma(p+3) = (p+2)\Gamma(p+2)$
...
$\Gamma(p+n+1) = (p+n)\Gamma(p+n)$

Înmulțind aceste relații avem:
$\Gamma(p+n+1) = p(p+1)(p+2)\dots(p+n)\Gamma(p).$
Pentru $p = 1$:
$\Gamma(n+2) = 1\cdot 2\cdot 3\dots(1+n)\cdot\Gamma(p) = (n+1)!\,\Gamma(p).$
Calculăm $\Gamma(1)$:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty x^{1-1}e^{-x}\,dx = \int_0^\infty e^{-x} = -e^{-x}|_0^\infty = -\left(\frac{1}{e^\infty} - 1\right) = 1.$$

Înlocuind obținem:
$\Gamma(n+2) = (n+1)!\cdot 1 = (n+1)!.$
Pentru $x > 0$, $x \neq n$ extrapolează factorialul.
Știm că $\beta(p, 1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$, pentru $0 < p < 1$.
Pe de altă parte avem:

$$\beta(p,1-p) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(1-p)}{\Gamma(p+1-p)} = \frac{\Gamma(p)\Gamma(1-p)}{\Gamma(1)} = \frac{\Gamma(p)\Gamma(1-p)}{1}.$$

Folosind cele două egalități

$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \dfrac{\pi}{\sin p\pi}, 0 < p < 1.$

Observație 3.1. Calculând integrala dublă

$I = \int\int_D e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx \int_0^{\infty} e^{-y^2}\,dy == \frac{\pi}{4}.$

Dacă $x = y$ avem:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx \int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$$

$$\left(\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2 = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

4. Aplicații

Să calculăm $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} x^{\frac{1}{2}-1} e^{-x}\,dx = \int_0^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{\sqrt{x}}.$

Facem substituția $x = t^2 \to dx = 2t\,dt.$

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_0^{\infty} e^{-t^2}\frac{2t\,dt}{t} = 2\int_0^{\infty} e^{-t^2}\,dt = 2\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}.$$

Folosind acest rezultat putem calcula $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right).$

Demonstrație.

$$\boldsymbol{\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$\boldsymbol{\Gamma\left(2+\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(1+\left(1+\frac{1}{2}\right)\right) = \left(1+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)}$$

$$\boldsymbol{\Gamma\left(3+\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(1+\left(2+\frac{1}{2}\right)\right) = \left(2+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(2+\frac{1}{2}\right)}$$

...

$$\boldsymbol{\Gamma\left(n-1+\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(1+\left(n-2+\frac{1}{2}\right)\right) = \left(n-2+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-2+\frac{1}{2}\right)}$$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(1+\left(n-1+\frac{1}{2}\right)\right) = \left(n-1+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-1+\frac{1}{2}\right)$$

Înmulțind aceste egalități obținem:

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\frac{2n-1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2^n}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

Deoarece $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, avem:

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}.$$

Folosind acest rezultat putem obține următoarele valori:

$n = 1, \Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi};$

$n = 2, \Gamma\left(2 + \frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3}{2^2}\sqrt{\pi} = \frac{3}{4}\sqrt{\pi};$
$n = 3, \Gamma\left(3 + \frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3}\sqrt{\pi} = \frac{15}{8}\sqrt{\pi};$
valori care ne dă posibilitatea să calculăm unele integrale cum ar fi:
Exemplu 4.1. Să se calculeze integrala:
$I_1 = \int_0^\infty x^6 e^{-x^2}\, dx.$

Rezolvare. Facem substituția $x^2 = t \to 2x\,dx = dt, x = 0 \to t = 0, x = \infty \to t = \infty,$
$I_1 = \int_0^\infty x^6 e^{-x^2}\, dx = \int_0^\infty t^3 e^{-t} \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty t^{3-\frac{1}{2}} e^{-t}\, dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty t^{\frac{5}{2}} e^{-t}\, dt = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{7}{2}\right).$
Dar, $\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \Gamma\left(3 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1\cdot3\cdot5}{2^3}\sqrt{\pi} = \frac{15}{8}\sqrt{\pi}.$
Înlocuind în I_1, obținem: $I_1 = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{8}\sqrt{\pi} = \frac{15}{16}\sqrt{\pi}.$
Exemplu 4.2. Să se calculeze integrala:
$I_2 = \int_0^\infty x^{80} e^{-x^2}\, dx.$

Rezolvare. Folosind substituția $x^2 = t \to 2x\,dx = dt, x = 0 \to t = 0, x = \infty \to t = \infty,$
obținem:
$I_2 = \int_0^\infty x^{80} e^{-x^2}\, dx = \int_0^\infty t^{40} e^{-t} \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty t^{\frac{79}{2}} e^{-t}\, dt = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{81}{2}\right).$
Calculăm $\Gamma\left(\frac{81}{2}\right) = \Gamma\left(40 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2\cdot40-1)}{2^{40}}\sqrt{\pi} = \frac{1\cdot3\cdot5\ldots79}{2^{40}}\sqrt{\pi}.$
Înlocuind în I_2, obținem: $I_2 = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{81}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1\cdot3\cdot5\ldots79}{2^{40}}\sqrt{\pi} = \frac{1\cdot3\cdot5\ldots79}{2^{41}}\sqrt{\pi}.$
Exemplu 4.3. Să se calculeze integrala:
$I = \int_0^1 \sqrt{x - x^2}\, dx.$

Rezolvare. $I = \int_0^1 \sqrt{x - x^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\, dx = \int_0^1 \sqrt{x}\sqrt{1-x}\, dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}\, dx$

Notăm $p - 1 = \frac{1}{2} \to p = \frac{3}{2}, q - 1 = \frac{1}{2} \to q = \frac{3}{2}.$
$\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}\, dx = \beta\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$
Folosind relația $\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ avem:

$\beta\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(3)}.$
Calculăm $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ și $\Gamma(3) = 2! = 1 \cdot 2 = 2$ și obținem:
$\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(3)} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{8}\sqrt{\pi}.$
Deci, $I = \int_0^1 \sqrt{x - x^2}\, dx = \frac{1}{8}\sqrt{\pi}.$
Exemplu 4.4. Să se calculeze integrala:

$$I = \int_0^a x\sqrt[2]{a^2 - x^2}\,dx.$$

Rezolvare. $I = \int_0^a x\sqrt[2]{a^2 - x^2}dx = \int_0^a x\sqrt[2]{a^2\left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right]}dx = \int_0^a x^2 a\left[1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dx.$

Facem schimbarea de variabilă $\frac{x^2}{a^2} = u \to \frac{2x}{a^2}dx = du, x = 0 \to u = 0, x = a \to u = 1.$
Folosind această substituție, avem:

$$I = \int_0^1 (a^2\sqrt{u})(1-u)^{\frac{1}{2}}\frac{a^2 \cdot a}{2a\sqrt{u}}du = \int_0^1 \frac{a^4}{2}u^{\frac{1}{2}}(1-u)^{\frac{1}{2}}du = \frac{a^4}{2}\beta\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right) = \frac{a^4}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\right)}$$

$$= \frac{a^4}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{2} = \frac{a^4}{16}\pi.$$

Exemplu 4.5. Să se calculeze integrala:

$$I = \int_0^\infty x^n e^{-x^2}\,dx.$$

Rezolvare. Facem schimbarea de variabilă
$x^2 = t \to dx = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt, x = 0 \to t = 0, x = \infty \to t = \infty$ obținem:

$$I = \int_0^\infty x^n e^{-x^2}\,dx = \int_0^\infty t^{\frac{1}{2}n}\cdot e^{-x^2}\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty t^{\frac{n-1}{2}}e^{-x^2}\,dt = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right),$$

deoarece $\frac{n-1}{2} = p - 1 \to p = \frac{n-1}{2} + 1 = \frac{n+1}{2}.$

BIBLIOGRAFIE

[1] Sirețchi, G. (1985). Calcul diferențial și integral, vol. I., Noțiuni fundamentale. Editura Științifică și Enciclopedică, București
[2] Roșculeț, M. N. (1966). Analiză matematică, vol. II. Editura Didactică și Pedagogică, București
[3] Olariu, V. (1981). Analiză matematică. Editura Didactică și Pedagogică, București

TIPURI DE PROGRESII

Tatiana Maria VOICU

Colegiul Național „Octavian Goga” Marghita, jud. Bihor, profesor de matematică,
tana69v@yahoo.com

Rezumat: *Articolul propune trei tipuri de șiruri de numere reale, fiecare cu proprietățile sale, derivate din modul de definire, care pot fi utilizate cu succes la ora de matematică. Am subliniat principalele beneficii ale unor astfel de șiruri care se aplică în diverse tipuri de exerciții*
Cuvinte cheie: șiruri, termen general, sume, rezolvare de probleme.

Definiții:

*Un șir de numere reale în care orice termen începând cu al doilea se obține din termenul precedent adunat cu același număr fixat, se numește **progresie aritmetică.***

Un șir de numere reale cu primul termen nenul, în care orice termen începând cu al doilea se obține din termenul precedent înmulțit cu același număr fixat nenul, se numește progresie geometrică.

*Un șir de numere reale ai cărui termeni sunt inversele termenilor unei progresii aritmetice date, se numește **progresie armonică***

Remarcă: Denumirea acestor progresii provine de la proprietatea oricărui număr din şir (începând cu al doilea) de a fi egal cu un anumit tip de medie a celor doi vecini ai săi: la progresia aritmetică este media aritmetică, la progresia geometrică este media geometrică (cu condiţia ca termenii şirului să fie numere strict pozitive), la progresia armonică este media armonică

Exemple de progresii: aritmetică: 1,3,5,7, …
geometrică: 0,001; 0,01; 0,1; 1; 10; …
armonică: 1, 1/3, 1/5, 1/7, …

Caracterizarea progresiilor:

-pentru progresiile aritmetice: diferenţa constantă între oricare doi termeni consecutivi, numită rație și notată r. Ele sunt de forma $a_1, a_2, ..., a_n, …$ sau $a_1, a_1 + r, a_1 + 2r, ..., a_1 + (n-1)r, …$ deci $a_n = a_1 + (n - 1)r$ este formula termenului general, iar r este raţia : $r = a_n – a_{n-1}$

- pentru progresiile geometrice: raportul dintre oricare doi termeni consecutivi este constant; numit raţie și notat q. Ele sunt de forma $b_1, b_2, …, b_n, …$ sau $b_1, b_1 q, b_1 q^2, …, b_1 q^{n-1}, …$

- pentru progresiile armonice: de forma $\frac{1}{a}; \frac{1}{a+r}; \frac{1}{a+2r}; \dots ; \frac{1}{a+nr}; \dots$

unde *a* este nenul, *n* este un număr natural iar $-a/d$ nu este un număr natural sau este mai mare decât *k*.

Prin raționament logic, se deduce formula **sumei primilor n termeni consecutivi** ai unei progresii aritmetice/ geometrice:

$s_n = \frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}$, respectiv $s_n = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$,(cu rația diferită de 1)

iar pentru progresia armonică suma tinde la infinit (nu este posibil ca suma unei progresii armonice de fracții cu numărătorul 1 , altul decât cazul banal în care $a = 1$ și $k = 0$, să fie un număr întreg ; motivul este că, în mod necesar, cel puțin un numitor al progresiei va fi divizibil cu un număr prim care nu divide niciun alt numitor[3])

Exerciții:

1. Să se determine numărul real x știind că numerele x+1, 2x-3 şi x-3sunt termenii onsecutivi ai unei progresii aritmetice

Rezolvare: dacă a_1 , a_2 , a_3 sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice, atunci $a_2 = \frac{a_1+a_3}{2}$, deci 2x -3 =[(x + 1) + (x - 3)] / 2, de unde prin calcul x = 4

2. Se consideră mulţimea M = { 0, 4, 8, 12, 16, 20, 24 }

Să se determine numărul tripletelor (a, b, c) cu a, b, c din M , a < b < c ;I care sunt sunt în progresie aritmetică

Rezolvare: raţia unui triplet este evident cu de 4, deci poate fi 4, 8 sau 12.
Pentru r = 4 obținem (0, 4, 8); (4,8,12); (8, 12,16); (12, 16, 20); (16,20, 24).
Pentru r = 8 obținem (0, 8, 16); (4, 12, 20); (8, 16, 24).
Pentru r =12 obţinem (0,12, 24).
Avem în total 9 triplete.

3. Se consideră funcția f : R → R, f (x) = 3 - 2x

Să se arate că numerele f(1), f(0) și f(-3) sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

Rezolvare: Numerele f(1), f(0) și f(-3) sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice dacă îndeplinesc condiția $[f(0)]^2 = f(1) \cdot f(-3)$ şi cum f(0)=3, f(1)=1 și f(-3)=9 obţinem $3^2 = 1 \cdot 9$ adevărat

4. Să se determine a, b numere reale ştiind că numerele 2, a, b sunt în progresie geometrică şi 2, 17, a sunt în progresie aritmetică

Rezolvare: avem condiţia că 2, 17, a sunt în progresie aritmetică, deci $17 = \frac{2+a}{2}$ de unde se obține a =32

Dacă 2, a, b sunt în progresie geometrică avem că $a^2 = 2b$ și înlocuind a, avem $2b = 32^2$, deci $2b = 32 \cdot 32$, $b = 32 \cdot 16$, b = 512.

BIBLIOGRAFIE:

[1] Ganga, M. (2008). Matematica manual pentru clasa a IX-a, editura Mathpress
[2] Gibilisco, S. Norman H. C. (2007). Mastering Technical Mathematics
[3] Colectiv autori (216). Culegere bacalaureat, Editura Campion

PROBLEME DE LOC GEOMETRIC

Tatiana Maria VOICU

Colegiul Național „Octavian Goga” Marghita, jud. Bihor, profesor de matematică,
tana69v@yahoo.com

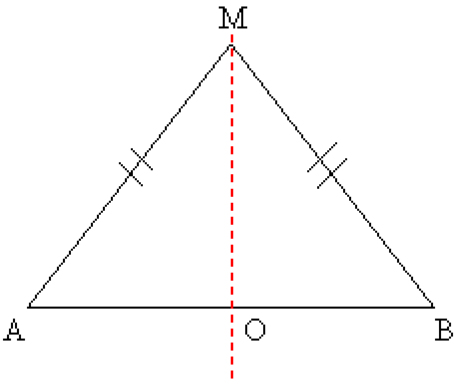
Rezumat: *Articolul propune spre aprofundare etapele de abordare a unei probleme de loc geometric, caracterizarea mediatoarei, respective a bisectoarei ca loc geometric, teoreme ce demonstrează concurența acestora într-un triunghi, Toate aceste informații pot fi utilizate cu succes la ora de matematică.*
Cuvinte cheie: loc geometric, mediatoare, bisectoare, concurență.

Definiție: Figura geometrică formată din mulțimea tuturor punctelor care au aceeași proprietate se numește *loc geometric*.

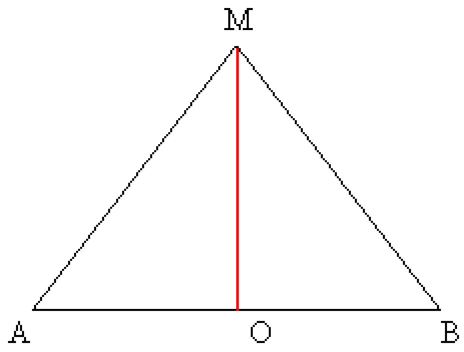
După modul în care este formulată problema de loc geometric, distingem:
1) probleme în care locul geometric este precizat prin enunț;
2) probleme în care enunțul cere și determinarea locului geometric.

În rezolvarea problemelor de loc geometric trebuie parcurse următoarele **etape**:
1) Se construiesc puncte care au proprietatea locului geometric, arătând în acest fel că mulțimea punctelor locului geometric nu este vidă.
2) Se observă elementele geometrice fixe sau de măsură constantă precum și legătura lor cu cele variabile, folosind proprietățile corespunzătoare cunoscute.
3) Pe baza celor stabilite la (2) și folosind eventual locuri geometrice fundamentale, se deduce cărei mulțimi de puncte îi aparțin punctele locului geometric.
4) Se demonstrează că:
a) Orice punct cu proprietatea locului geometric cerut aparține mulțimii stabilite.
Uneori în locul propoziției (a) se folosește una echivalentă: Orice punct care nu are proprietatea enunțată nu aparține figurii.
b) Orice punct care are proprietatea enunțată aparține figurii.
În locul propoziției (b) se folosește una echivalentă: Orice punct care nu aparține figurii nu are proprietatea enunțată.

Definiție: Mediatoarea unui segment este dreapta perpendiculară pe segment dusă prin mijlocul acestuia. Existența si unicitatea mediatoarei rezultă din faptul că mijlocul unui segment există și este unic, perpendiculara printr-un punct al dreptei pe dreaptă există și este unică.



Teorema 1: Orice punct de pe mediatoarea unui segment este egal depărtat de capetele segmentului.
Fig. 1.1
Demonstrație: Se consideră (AB), O Є (AB), (OA) ≡ (OB) și M un punct de pe mediatoarea segmentului (AB) (Fig.1.1). Dacă M = O, afirmatia este evidentă. Dacă M≠O, ΔAOM ≡ ΔBOM (C.C.) și rezultă (AM) ≡ (BM) , deci AM = BM.



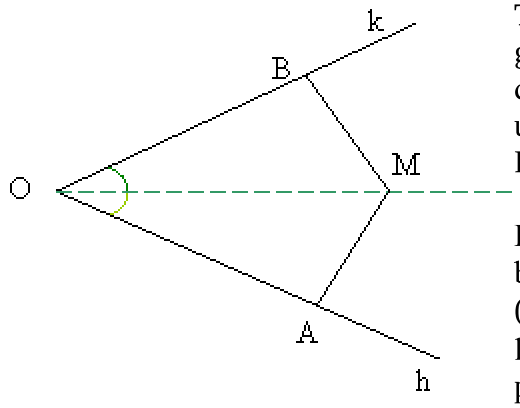
Teorema 2: Orice punct egal depărtat de capetele unui segment aparține mediatoarei segmentului.
Fig. 1.2

Demonstrație: Se consideră (AB) si M un punct astfel încât (MA) = (MB) (Fig.1.2). Dacă M€ (AB), atunci M este mijlocul segmentului (AB) si aparține mediatoarei. Dacă M $\notin AB$, fie O mijlocul segmentului (AB), ΔAOM ≡ ΔBOM (LLL). Deci $\measuredangle AOM \equiv \measuredangle BOM$. Deoarece cele două unghiuri sunt și suplementare, rezultă că MO$\perp AB$, ceea ce înseamnă că MO este mediatoarea segmentului (AB).

Concluzie: mediatoarea unui segment este locul geometric al punctelor egal depărtate de capetele segmentului.

Un alt exemplu de loc geometric este bisectoarea unui unghi.

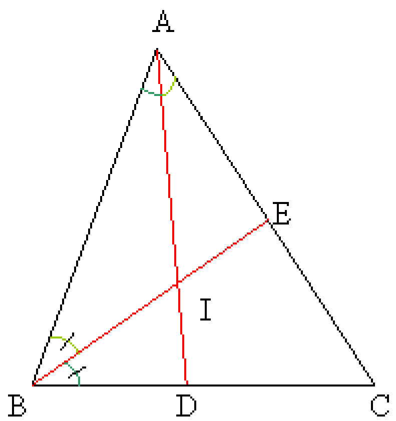
Definiție: Bisectoarea unui unghi este dreapta care trece prin intersecția a două drepte diferite, împărțind unghiul format de cele două drepte în două unghiuri congruente.



Teorema 3: Bisectoarea unui unghi este locul geometric al punctelor din interiorul unghiului egal depărtate de laturile unghiului, reunit cu vârful unghiului.
Fig. 1.3

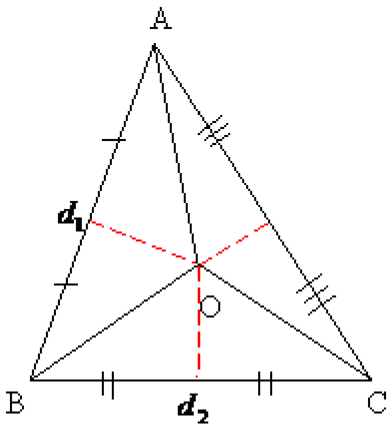
Demonstrație: a) Arătăm că orice punct de pe bisectoare este egal depărtat de laturile unghiului (Fig.1.3). Fie$\measuredangle hOK$, O vârful unghiului, s bisectoarea lui și punctul M € s-{O}. Se notează cu A și B picioarele perpendicularelor din M pe h, respectiv pe k. ΔOAM ≡ ΔOBM (IU) , deci (MA) ≡ (MB).
b) Arătăm că orice punct M egal depărtat de laturile unghiului situat în interiorul unghiului, aparține bisectoarei. Se notează cu A și B picioarele perpendicularelor duse din M pe laturile unghiului. Din (MA) ≡ (MB), (OM) latură comună și ∡MAO ≡ ∡MBO (90^0) , deducem că ΔOBM ≡ ΔOAM (IC) , de unde ∡AOM ≡ ∡BOM, deci OM bisectoare.

Pe baza proprietăților de loc geometric ale bisectoarelor si mediatoarelor se pot demonstra următoarele două teoreme referitoare la concurența bisectoarelor si mediatoarelor unui triunghi.



Teorema 4: Bisectoarele unghiurilor unui triunghi sunt concurente.
Fig. 1.4
Dem.: Din teorema transversalei rezultă că bisectoarele unghiurilor A și B intersectează pe (BC) și (AC) în câte un punct D, respectiv E (Fig.1.3). Din aceeasi teoremă rezultă că există punctul {I}=(AD)∩(BE = (BE)∩(AD). Așadar {I}€ int $\measuredangle ACB$. Din proprietatea punctelor bisectoarei unui unghi rezultă că d(I,BC) = d(I,AB), d(I,AB) = d(I,AC) și deci

d(I,BC) = d(I,AC) și ținând cont că {I}€ int $\sphericalangle ACB$, rezultă că [CI este bisectoarea unghiului C.



Teorema 5 Mediatoarele laturilor unui triunghi sunt concurente.
Fig. 1.5
Demonstrație.: Fie un triunghi ABC și d_1, d_2 mediatoarele segmentelor (AB), respectiv (BC),{O}= $d_1 \cap d_2$ (Fig.1.5).
Din proprietatea punctelor mediatoarei, deducem că (OA) = (OB) și (OB) = (OC), de unde (OA)=(OC), deci O aparține mediatoarei segmentului (AC).

Rezolvarea unor probleme de loc geometric

Pe lângă bisectoare, mediatoare, cerc sau arc, luate ca locuri geometrice, se mai pot adăuga și:

- mulțimea punctelor situate la aceeași distanță față de o dreaptă dată d este reuniunea a două drepte paralele cu d, situate în semiplane diferite (Fig.2.1.);
- fiind dată o semidreaptă (AB, mulțimea punctelor M pentru care unghiul $\sphericalangle MAB$ are o măsură dată este reuniunea a două semidrepte deschise, cu originea comună în A, situate în semiplane diferite față de AB (Fig.2.2.).

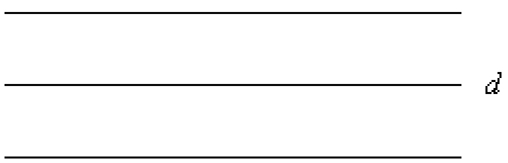


Fig. 2.1

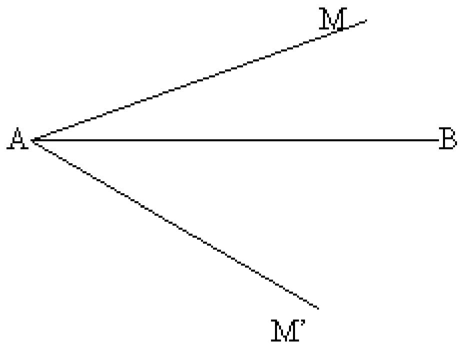


Fig. 2.2

Rezolvarea acestor probleme se realizează în două etape: prima este aceea in care se încearcă determinarea intuitivă a mulțimii respective, iar in etapa următoare se demonstrează efectiv că această mulțime este locul geometric căutat.

Problemele au următorul tip: poziția unui punct M se determină după o regulă dată în funcție de poziția altor puncte și se cere să se afle locul geometric al punctelor M atunci când unul sau mai multe din celelalte puncte sunt variabile și parcurg mulțimi date

În prima etapă se încearcă găsirea unor puncte speciale ale locului geometric.

Determinarea a trei puncte ale locului geometric poate sugera dacă este vorba despre un segment de dreapta sau un arc de cerc, după care se încearcă a se demonstra presupunerea făcută. Astfel, dacă se presupune că punctul M descrie o dreaptă, se va demonstra, de exemplu, ca M este la o distanță constantă de o dreaptă dată sau că AM formează unghi constant cu o semidreaptă fixă. Dacă se presupune că este vorba despre un arc de cerc se va arăta, de exemplu, că punctele sunt la distanță constantă față de un punct fix sau determină un unghi de măsură constantă cu două puncte fixe și este situat într-unul din cele două semiplane determinate de punctele fixe.

După ce s-a arătat în acest fel că punctele loculuigeometric aparţin unei multimi M (o dreaptă, un cerc, un arc de cerc, etc), se arată că, reciproc, orice punct al mulţimii M aparţine locului geometric (în care caz locul geometric este M), sau dacă acest lucru nu este adevărat, se determină submulţimea M_1 a lui M care aparţine locului geometricși atunci locul geometric căutat este M_1 .

Exemplu:

Se dă triunghiul ABC, dreptunghic în A. Proiectăm în P, Q punctele B şi C pe o dreaptă variabilă d, care trece prin A. Să se afle locul geometric descris de mijlocul M al segmentului [PQ], când dreapta d se rotește în jurul lui A.

Rezolvare:

Fie A', B', C' mijloacele lui [BC], [CA], [AB]. Dacă *d* ia poziția AB, atunci P = B și Q = A, deci C' aparține locului geometric, la fel B'. Se observă ușor că dacă *d* ajunge în poziția AA', punctul M este în A'. Deci A', B', C' aparțin locului geometric, ceea ce ne conduce la presupunerea că locul căutat este cercul P circumscris dreptunghiului AC'A'B'. Urmând în gând mișcarea lui M când *d* se rotește în jurul lui A, intuiția întărește presupunerea noastră, ea devenind plauzibilă dar nu sigură.

Este necesară o demonstrație care se face în două etape.

a) Demonstrăm mai întâi că M Є P.

Va trebui să arătăm că $m(\measuredangle_{AMA^{I}}) = 90^{0}$.

Paralela prin A^{I} la BP și (CQ) intersectează pe *d* în mijlocul lui [PQ] (teorema paralelelor echidistante), deci în M.

Cum BP$\perp$ *d*, avem și $A^{I}M^{I} \perp d$, deci $m(\measuredangle_{AMA^{I}}) = 90^{0}$.

Rezultă că M este situat pe arcul capabil de 90^{0} față de [AA'], așadar (Fig.2.3).

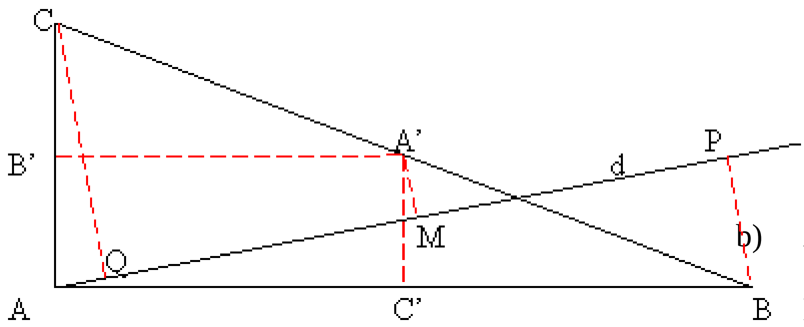


Fig. 2.3

b) Arătăm că orice punct N Є P aparține locului geometric. Dacă N≠A , unim A cu N și proiectăm B și C pe AN în P' și Q' (Fig.2.4.).

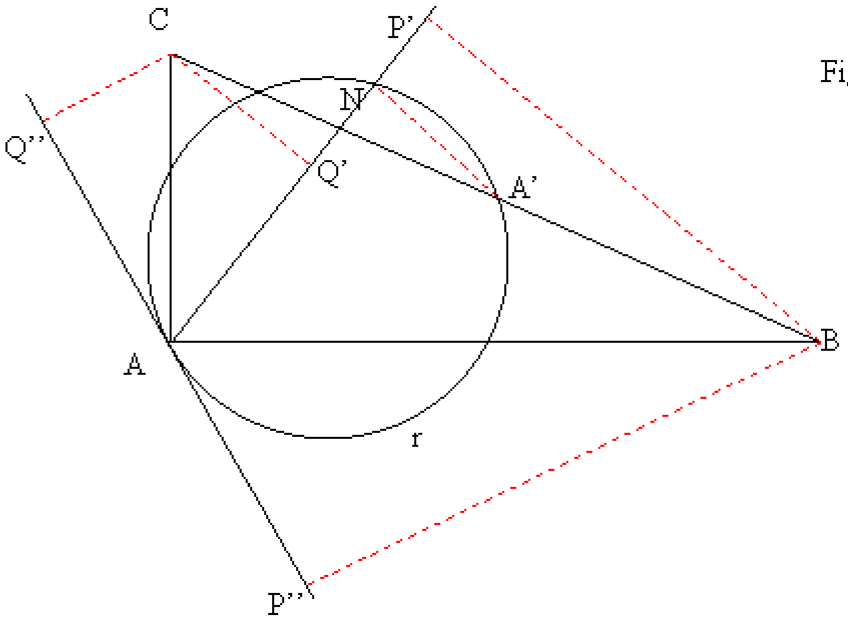


Fig. 2.4

Unghiul $\sphericalangle ANA'$ fiind înscris într-un semicerc, este drept; rezultă că BP', A'N, CQ' sunt paralele echidistante şi N este mijlocul lui [P'Q']. Așadar, N aparține locului geometric.

Dacă N = A, se duce perpendiculara din A pe AA' și se proiectează pe ea B și C în P", Q". Din nou se observă că A este mijlocul segmentului [P"Q"], deci și în acest caz N aparține locului geometric.

Deci, locul geometric descris de mijlocul M al segmentului [PQ], când dreapta d se rotește în jurul lui A este cercul P circumscris dreptunghiului AC'A'B'.

Concluzie: Așadar, problemele de loc geometric au fost întotdeauna o adevărată provocare datorită frumuseții și complexității lor. Îndemnându-ne să căutăm, să intuim, să pășim nesiguri, cu un sentiment de îndoială, ne oferă în schimb satisfacția reușitei, amplificată de drumul oscilant, de risipa de încercări și întrebări.

BIBLIOGRAFIE:

[1] Matematică, clasa a VI-a, Algebră. Geometrie, (2020). Editura Paralela 45
[2] Challenging Mathematical Problems, https://cmp.gil.ro/
[3] Blaga, P. A. Constucții geometrice, -https://www.cs.ubbcluj.ro/~pablaga/geom2/ curs1_3.pdf

APLICAȚIILE DERIVATEI ÎN FIZICĂ

Marinel ZAHA

Școala Gimnazială nr. 1 Petreu, județul Bihor, profesor de matematică, marinel.zaha@yahoo.com

Rezumat: *În această lucrare vom discuta despre noțiunile de viteză și accelerație în mișcarea rectilinie, viteza și accelerația unghiulară, debitul unui lichid și intensitatea curentului electric*
Cuvinte cheie: viteză, accelerație, debit, intensitatea curentului electric

APLICAȚIILE DERIVATEI ÎN FIZICĂ

Mărimile fizice se schimbă cu timpul (variază în timp). O asemenea mărime fizică se scrie în matematică printr-o funcție *f(t),* unde argumentul *t* semnifică timpul, iar valorile *f(t)* ale funcției reprezintă măsura mărimii respective, la momentele *t*. De cele mai multe ori este convenabil să utilizăm ecuația *y=f(t),* unde *y* semnifică măsura mărimii respective. Este important adesea să se cunoască ”viteza de variație” a unei mărimi, care este o nouă mărime fizică și a cărei măsură este derivata $\frac{df}{dt}$ a funcției f în raport cu timpul.

1.VITEZA ÎN MIȘCAREA RECTILINIE

Să considerăm un mobil M în mișcarea rectlinie (v. fig. 75). Dacă alegem un punct de referință *O,* un sens pozitiv de parcurgere pe dreapta pe care se mișcă mobilul și un moment inițial $t_0 = 0$, abscisa *s* a mobilului M la un moment *t* este dată de o ecuație

$$s = f(t)$$

numită legea de mișcare a mobilului.

s are semnificația ”spațiului parcurs de mobil” din momentul inițial până la momentul *t*.

La începutul capitolului , s-a definit *viteza* $v(t_0)$ a mobilului la un moment t_0 ca fiind limita

$$\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} = v(t_0).$$

Așadar

$$v(t_0) = f'(t_0)$$

Adică, *viteza în mișcarea rectilinie este derivata spațiului în raport cu timpul*.

În scris: $v = s' = \frac{ds}{dt}$.

Dacă viteza este constantă spunem că mișcarea este *uniformă. Mișcarea mobilului este uniformă dacă și numai dacă legea de mișcare este de forma* $s = \alpha t + \beta (\alpha,\ \beta \in R)$.

Ăntr-adevăr, dacă $s = \alpha t + \beta$ atunci $v = s' = \alpha \equiv$ ct. ; reciproc, dacă viteza este constantă, $v = \alpha = ct.$, adică $s' = \alpha$, atunci $s = \alpha t + \beta$.

În paricular, dacă viteza este nulă, $v = 0$, atunci legea de mișcare este $s = \beta =$ ct., adică mobilul nu se mișcă. Reciproc, dacă mobilul nu se mișcă, avem $s = \beta =$ ct., deci $v = s' = 0$.

Viteza este pozitivă, dacă și numai dacă mobilul se mișcă în sensul pozitiv al axei.

Într-adevăr, $v \ge 0$ dacă și numai dacă funcția $f(t)$ este crescătoare.

Aceasta înseamnă că dacă $t_1 < t_2$, atunci $f(t_1) \le f(t_2)$, deci mobilul se mişcă de la $s_1 = f(t_1)$ la $s_2 = f(t_2)$ în sensul pozitiv al axei. În mod asemănător:

Viteza este negativă, dacă și numai dacă mobilul se mişcă în sensul negative al axei.

Dacă $v(t_0) = 0$ *și dacă înainte de* t_o *și după* t_0 *viteza are semne diferite, atunci în momentul t mobilul își schimbă sensul mișcării* (în acest moment mobilul ”se întoarce”).

Dacă $v(t_{0)}) = 0$ și dacă viteza are același semn înainte și după t_0, mobilul are un moment de oprire în punctul $s_0 = f(t_0)$ după care își continuă mișcarea în același sens ca și mai înainte.

2.ACCELERAȚIA ÎN MIȘCAREA RECTILINIE

”Viteza de variație” a vitezei v cu care se mișcă mobilul se numește *accelerație.* Așadar:

Accelerația în mișcarea rectilinie este derivata vitezei în raport cu timpul sau derivata a doua a spațiului în raport cu timpul.

Pentru accelerație folosim litera *a*:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Dacă accelerația este constantă, spunem că mișcarea este uniform accelerată.

Mișcarea mobilului este uniform accelerată dacă și numai dacă legea de mișcare este de forma $s = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$.

Într-adevăt, dacă accelerația este constantă $a \equiv A$, atunci $v = At + \beta$ și deci $s = \frac{1}{2}At^2 + \beta t + \gamma$.

Reciproc, dacă $s = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$, atunci $v = 2\alpha t + \beta$, deci $a = 2\alpha =$ ct.

Mișcarea mobilului este uniformă dacă și numai dacă accelerația este nulă.

În adevăr, mișcarea este uniformă, $s = \alpha t + \beta$, dacă și numai dacă viteza este constantă, $v = \alpha =$ ct., deci dacă și numai dacă accelerația este nulă, $a = v' \equiv 0$.

Un exemplu important de mișcare uniform accelerată este căderea corpurilor în vid, în care legea de mișcare este:

$$s = \frac{1}{2}gt^2.$$

Accelerația mișcaării este egală cu accelerația gravitațională g.

3.VITEZA ȘI ACCELERAȚIA UNGHIULARĂ

Să considerăm un mobil *M* care se mișcă pe o traiectorie circulară (fig. 106). Poziția mobilului în fiecare moment *t* este perfect determinată de unghiul la centru α format de raza *OM* cu o dreaptă fixă *OA*, măsurat în sens trigonometric. Așadar, mișcarea mobilului este dată de o ecuație $\alpha = f(t)$.

Unghiul la centru descris de mobil, în intervalul de timp dintre un moment t_0 și un alt moment *t,* este $f(t) - f(t_0)$.

Raportul

$$\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$$

se numeşte viteza unghiulară medie a mobilului în intervalul de timp de la t_o la t.

Limita

$$\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}=f'(t_0)$$

(dacă există și este finită) se numește viteza unghiulară a mobilului în momentul t_0.

Așadar:

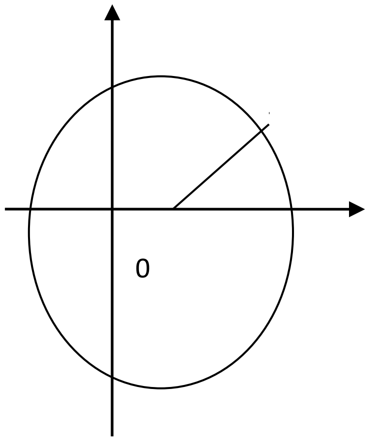


Fig. 106

Viteza unghiulară în mișcarea circulară este derivata unghiului la centru, în raport cu timpul.

Dacă viteza unghiulară este constantă, spunem că mișcarea circulară este uniformă.

Derivata a doua a unghiului la centru într-o mișcare circulară se numește accelerație unghiulară.

Mișcarea circulară este uniformă dacă și numai dacă accelerația unghiulară este nulă.

4.DEBITUL UNUI LICHID

Să considerăm un lichid în scurgere printr-un tub. Să notăm cu $Q(t)$ cantitatea de lichid care trece printr-o secțiune a tubului, în intervalul de timp *t*, începând de la un anumit moment de referință, pe care-l notăm cu 0.

Diferența $Q(t)-Q(t_0)$ exprimă cantitatea de lichid scursă între momentele t_0 și t.

Dacă în intervalele de timp egale se scurg cantități egale , se spune că scurgerea lichidului are debit constant.

În acest caz se numește debit cantitatea de lichid scursă în unitatea de timp.

Dacă debitul lichidului nu este constant, considerăm debitul mediu

$$\frac{Q(t)-Q(t_0)}{t-t_0}$$

în intervalul de timp de la t_0 la t.

Limita

$$\lim_{t\to t_0}\frac{Q(t)-Q(t_0)}{t-t_0}=Q'(t_0)$$

se numește debitul scurgerii lichidului în momentul t_0. Așadar:

Debitul este derivata cantității de lichid în raport cu timpul.

5.INTENSITATEA CURENTULUI ELECTRIC

Un curent electric care trece printr-un conductor se poate asemui cu un lichid în scurgere printr-o conductă. Putem vorbi și în acest caz de cantitatea de electricitate $Q(t)$ scursă prin conductor într-un timp *t*, începând de la un anumit moment de referință.

Putem vorbi de asemenea de debitul de electricitate. Debitul de electricitate se numește *intensitatea curentului electric*. Așadar:

Intensitatea curentului electric este derivata cantității de electricitate în raport cu timpul.

6.DENSITATEA UNEI REPARTIȚII LINIARE DE MASĂ

Problema definirii densității unei bare liniare a fost pusă, la începutul acestui capitol,ca una din problemele ce conduc la noțiunea de derivată:

Densitatea unei repartiții liniare de masă este derivata masei în raport cu lungimea.

BIBLIOGRAFIE

[1] Colectiv de autori (1980). Analiză Matematică, Vol. I EDPB

APLICAŢII ALE NUMERELOR COMPLEXE ÎN ALGEBRA. PROBLEME DE MAXIM ŞI MINIM

Simona Gabriela ZAU

Liceul cu Program Sportiv ,,Bihorul" Oradea, județul Bihor, profesor de matemetică, simona_zau@yahoo.com

Rezumat: *Lucrarea îşi propune să orienteze cititorul în ,,imaginara" teorie a numerelor complexe, să ofere strategii de rezolvare a exerciţiilor cu aplicabilitate ale numerelor complexe in algebră.*

Cuvinte cheie: numere complexe-probleme de maxim şi minim

Numărul reprezintă un punct important în dezvoltarea ştiinţei. Încercarea de a măsura dimensional obiectele a condus la extinderea semnificaţiei de număr, astfel rezultatele fundamentale utilizate în matematica studiată azi îşi are originile în antichitate. Cercetătorii au fost preocupaţi de ceea ce îi înconjoară, iar momentul în care au înţeles că omul este o fiinţă superioară şi până la primele rezultate nu a fost decât un pas. Ce a urmat după studii şi cercetări a condus la dezvoltarea tuturor domeniilor de activitate.

Teoria numerelor complexe este foarte utilă în aplicaţii, astfel s-a dovedit a fi un mijloc pe deplin real, dar,,imaginar" în rezolvarea a numeroase probleme din diferite ramuri ale mecanicii, fizicii sau tehnologiei.

Lucrarea îşi propune să orienteze cititorul în ,,imaginara" teorie a numerelor complexe, să ofere strategii de rezolvare a exerciţiilor cu aplicabilitate ale numerelor complexe in algebră. De asemenea urmăreşte îndeaproape programa şcolară, exerciţiile şi problemele propuse au fost selectate din literatura de specialitate, manuale şcolare, din culegeri care cuprind subiectele propuse la concursurile școlare.

Aplicaţia 1. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$ astfel încât $|z_1| = |z_2| = |z_3| = r$. Să se afle minimul expresiei: $E = \dfrac{9|z_1|^2 - |z_1 + z_2 + z_3|^2}{|z_1 - z_2| \cdot |z_2 - z_3| \cdot |z_3 - z_1|}$ în funcţie de r.

Soluţie: Fie $z_1 = a_1 + b_1 \cdot i$, $z_2 = a_2 + b_2 \cdot i$, $z_3 = a_3 + b_3 \cdot i$.

$$|z_1 - z_2|^2 = (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2$$

$$|z_2 - z_3|^2 = (a_2 - a_3)^2 + (b_2 - b_3)^2$$

$$|z_3 - z_1|^2 = (a_3 - a_1)^2 + (b_3 - b_1)^2$$

Având cele trei egalităţi obţinem:

$$|z_1 - z_2|^2 + |z_2 - z_3|^2 + |z_3 - z_1|^2 = 2\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right) + 2\left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\right) - 2\left(a_1a_2 + a_2a_3 + a_1a_3\right) -$$
$$- 2\left(b_1b_2 + b_2b_3 + b_1b_3\right) = 3\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right) - \left(a_1 + a_2 + a_3\right)^2 + 3\left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\right) - \left(b_1 + b_2 + b_3\right)^2.$$

Exprimăm numărătorul expresiei în funcţie de a_i şi b_i, $i \in \overline{1,3}$.

$$9|z_1|^2 - |z_1 + z_2 + z_3|^2 = 9\left(a_1^2 + b_1^2\right) - \left(a_1 + a_2 + a_3\right)^2 - \left(b_1 + b_2 + b_3\right)^2 \quad (1)$$

Deoarece $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ avem $a_1^2 + b_1^2 = a_2^2 + b_2^2 = a_3^2 + b_3^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 9\left(a_1^2 + b_1^2\right) = 3\left(a_1^2 + b_1^2\right) + 3\left(a_2^2 + b_2^2\right) + 3\left(a_3^2 + b_3^2\right) = 3\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right) + 3\left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\right) \quad (2)$$

Din (1) şi (2) $\Rightarrow$ $9|z_1|^2 - |z_1 + z_2 + z_3|^2 = |z_1 - z_2|^2 + |z_2 - z_3|^2 + |z_3 - z_1|^2$.

Astfel expresia devine: $E = \dfrac{|z_1 - z_2|^2 + |z_2 - z_3|^2 + |z_3 - z_1|^2}{|z_1 - z_2| \cdot |z_2 - z_3| \cdot |z_3 - z_1|}$.

Notăm $a = |z_1 - z_2|, b = |z_2 - z_3|, c = |z_3 - z_1|$. Atunci $E = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{a \cdot b \cdot c}$, unde a, b, c sunt lungimile laturilor triunghiului determinat de imaginile numerelor complexe z_1, z_2, z_3. Astfel $E = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{a \cdot b \cdot c} \geq \dfrac{ab + ac + bc}{a \cdot b \cdot c} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$ cu egalitatea dacă $a = b = c$. Dar ştim că $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \geq \dfrac{\sqrt{3}}{R}$ cu egalitate dacă $a = b = c$, unde R raza cercului circumscris triunghiului. În cazul nostru $|z_i| = r = R,\ i \in \overline{1,3}$ deoarece numerele având acelaşi modul se află pe cercul cu centrul în origine O şi rază r. Prin urmare $\min(E) = \dfrac{\sqrt{3}}{r}$.

Aplicaţia 2. Să se determine maximul expresiei $|z^2 + az + b|$, unde $a, b \in \mathbf{R}$ când $|z| = 1,\ z \in \mathbf{C}$.

Soluţie:

$$\max_{|z|=1} |z^2 + az + b| = \max_{|z|=1} (z^2 + az + b)(\bar{z}^2 + a\bar{z} + b) =$$

$$= \max_{|z|=1} \left(1 + az + bz^2 + a\bar{z} + a^2 + abz + b\bar{z}^2 + ab\bar{z} + b^2\right) =$$

$$= 1 + a^2 + b^2 + \max_{|z|=1} \left[a(1+b)(z + \bar{z}) + b(z + \bar{z})^2 - 2b\right] =$$

$$= a^2 + (b-1)^2 + \max_{|z|=1} \left[a(1+b)(z + \bar{z}) + b(z + \bar{z})^2\right].$$

Fie $z = x + iy$ pentru care $x^2 + y^2 = 1$. Avem $2x = z + \bar{z}$, deci

$$\max_{|z=1|} |z^2 + az + b| = a^2 + (b-1)^2 + 2\max_{x \in [0,1]} \left[2bx^2 + a(1+b)x\right].$$

Urmează o discuţie în funcţie de poziţia vârfului parabolei ,,$2bx + a(1+b)x$'' faţă de intervalul $[0,1]$ şi de semnul coeficientului dominant $b \neq 0$. Cazul $b = 0$ îl tratăm separat.

Discuţie:

a) Dacă $b < 0$ şi $-\dfrac{a(1+b)}{4b} \in [0,1]$ adică $0 \leq a(1+b) \leq -4b$, atunci

$$\max_{|z|=1} |z^2 + az + b| = \frac{(b-1)^2 (4b - a^2)}{4b}$$

b) Dacă $b < 0$ şi $-\dfrac{a(1+b)}{4b} < 0$ adică $a(1+b) < 0$ sau dacă $b > 0$ şi $-\dfrac{a(1+b)}{4b} \geq 0$ adică $a \leq 0$, atunci $\max\limits_{|z|=1} |z^2 + az + b| = a^2 + (b-1)^2$.

c) Dacă $b < 0$ şi $-\dfrac{a(1+b)}{4b} > 1$ adică $a(1+b) > -4b$ sau dacă $b > 0$ şi $-\dfrac{a(1+b)}{4b} < 0$ adică $a > 0$, atunci $\max\limits_{|z|=1} |z^2 + az + b| = (a + b + 1)^2$

d) Dacă $b=0$, atunci $\max\limits_{|z|=1}\left|z^2+az\right|=\begin{cases}(a+1)^2, \text{ pentru } a>0\\ a^2+1, \text{ pentru } a\le 0\end{cases}$

(Deoarece $\max\limits_{|z|=1}\left|z^2+az\right|=a^2+1+\max\limits_{|z|=1}\left[a(z+\bar{z})\right]=a^2+1+2\max\limits_{x\in[0,1]}(ax)$).

Aplicaţia 3. Fie $a\in\mathbf{R}$ şi $z\in\mathbf{C}^*$, astfel încât $a=\left|z+\frac{1}{z}\right|$. Să se determine în funcţie de a ,cea mai mare şi cea mai mică valoare a lui $|z|$.

Soluţie: Deoarece $a\ge 0$, avem:

$$a^2=\left|z+\frac{1}{z}\right|^2=\left(z+\frac{1}{z}\right)\left(\bar{z}+\frac{1}{\bar{z}}\right)=|z|^2+\frac{1}{|z|^2}+\frac{z^2+\bar{z}^2}{|z|^2}=\frac{|z|^4+(z+\bar{z})^2-2|z|^2+1}{|z|^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow |z|^4-|z|^2\left(a^2+a\right)+1=1(z+\bar{z})^2\le 0\Rightarrow |z|^2\in\left[\frac{a^2+2-\sqrt{a^4+4a^2}}{2},\frac{a^2+2+\sqrt{a^4+4a^2}}{2}\right].$$

Aplicând formula radicalilor compuşi rezultă că: $|z|^2\in\left[\frac{-a+\sqrt{a^2+4}}{2},\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}\right]$ aşa că

$\max|z|\in\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}$, $\min|z|\in\frac{-a+\sqrt{a^2+4}}{2}$ şi ele se ating când $(z+\bar{z})^2=0$ adică $z=-\bar{z}$.

Aplicaţia 4. Să se determine valorile extreme ale lui $|z|$, unde $z\in\mathbf{C}$ şi verifică relaţia $\left|z^2+1\right|=|z-1|$.

Soluţie:

$\left|z^2+1\right|=|z-1|\Leftrightarrow\left(z^2+1\right)\left(\bar{z}^2-1\right)=(z-1)(\bar{z}-1)$ adică

$|z|^4+(z+\bar{z})^2-2|z|^2+1=|z|^2-(z+\bar{z})+1$

Avem $\left(|z|^4-3|z|^2+\frac{9}{4}\right)+\left[(z+\bar{z})^2+(z+\bar{z})+\frac{1}{4}\right]-\frac{5}{2}=0$, adică

$$\left(|z|^2-\frac{3}{2}\right)^2+\left(z+\bar{z}+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2}$$

Deci $|z|^2-\frac{3}{2}\in\left[-\frac{\sqrt{10}}{2},\frac{\sqrt{10}}{2}\right]$ adică $0\le|z|\le\sqrt{\frac{3+\sqrt{10}}{2}}$.

$$|z|=\sqrt{\frac{3+\sqrt{10}}{2}}\Leftrightarrow\left(z+\bar{z}+\frac{1}{2}\right)^2=0\Leftrightarrow \operatorname{Re} z=-\frac{1}{4}.$$

BIBLIOGRAFIE:

[1] Andrica, D., Bişboacă, N. (2001). Numere complexe de la A la Z, Editura Millenium, Alba Iulia

[2] Dinică, M., Chiriţă, M. (1996). Numere complexe în matematica de liceu, Editura All Educational, Bucureşti

[3] Ganga, M. (2000). Matematică. Manual pentru clasa a X-a. Profil M_1, Editura Mathpress, Ploieşti,

[4] Andrei, Gh., Caragea, C., Cucurezeanu, I., Bordea, G. (1993). Probleme de algebră pentru concursuri de admitere şi olimpiade şcolare, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti,

[5] Zau, S., Timpul-resursă a educaţiei, (2006). Timpul ca resursă a educaţiei, Editura Napoca Star, Cluj-Napoca

CUPRINS

SECTIUNEA MATEMATICĂ-INFORMATICĂ